АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

8358—9035

*

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
№ 11 МОСКВА 1957

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

Н. В. Агеев, В. В. Алпатов, Б. С. Балакшин, Е. Е. Захаров, С. М. Лисичкин (зам. председателя), В. Ю. Ломоносов, А. И. Михайлов (председатель), С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, В. В. Покшишевский, Л. И. Седов, В. В. Серпинский, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии 9
Основания математики и математическая логика 12
Теория чисел 14
Алгебра 19
Многочлены и линейная алгебра 19
Группы 20
Поля, кольца и структуры 24
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 30
Теория функций действительного переменного 37
Теория множеств 40
Приближение функций полиномами и их обобщениями 41
Теория функций комплексного переменного 44
Дифференциальные уравнения 53
Обыкновенные дифференциальные уравнения 53
Уравнения в частных производных . . . 61
Приложения к физике, технике и естественным наукам 73
Интегральные уравнения . . . . . —
Приложения интегральных уравнений —
Вариационное исчисление . . . . . —
Анализ (другие вопросы) 75
Числовые ряды 78
Специальные функции 79
Интегральные преобразования и операционное исчисление 81
Приложения общих методов математического анализа 82
Функциональный анализ 84
Теория вероятностей 96
Математическая статистика 102
Теория игр и математическая экономика 108
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 110
Геометрия 114
Приложения геометрии 116
Элементарная геометрия 117
Проективная и начертательная геометрия 118
Алгебраическая геометрия 119
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства и обобщения 120
Геометрия n-мерного пространства и теория относительности 122
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 126
Метрические методы в геометрии 128
Выпуклые многообразия 130
Численные и графические методы 131
Таблицы . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы 139
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . . . . —
Авторский указатель 151

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийский пос., д. 42-Б

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *А. А. Конюшкоз*,
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, Н. В. Смирнов, С. П. Фиников*

Рефераты 8358—9035 **№ 11** **Ноябрь 1957 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

8358. О работе математического семинара. Гаврилов Н. И., Тр. Одесск. ун-та, 1956, **146**, сер. матем. н., № 6, 117

Список докладов, заслушанных на организованном в 1954 г. ежемесячном семинаре математических кафедр Одесского университета с сентября 1954 г. по июнь 1956 г. В. Ф. Рогаченко

8359. Научная конференция математических кафедр. Тодорова Л. Г., Тр. Одесск. ун-та, 1956, **146**, сер. матем. н., № 6, 117—118

Перечень докладов, заслушанных 27—30 марта 1956 г. на математической секции научной конференции Одесского университета, посвященной итогам научно-исследовательской работы за 1955 год. В. Ф. Рогаченко

8360. Математические олимпиады в Польской Народной Республике. (Mathematische Olympiaden in der Volksrepublik Polen), Math. und Phys. Schule, 1957, **9**, № 3, 151—156 (нем.)

Рассказывается об организационных формах проведения математических олимпиад польским математическим обществом; приводятся задачи, которые предлагались учащимся школ во всех трех турах на шестой олимпиаде в 1954/1955 учебном году. Е. С. Шатунова

8361. Анализ работ учеников на математических олимпиадах БССР в 1955/56 учебном году. Шустэф (Аналіз работ вучняў на матэматычных алімпіядах БССР у 1955/56 навучальным годзе. Шустэф Ф.), У дапамогу настаўніку, 1957, № 1, 56—77 (белорусск.)

Анализ решений задач, предложенных ученикам школ г. Минска, г. Гомеля и Гомельской области, г. Могилева и Могилевской области в первом туре математических олимпиад 1955/1956 учебного года. Имеются опечатки. А. А. Гусак

8362. Кибернетика и диалектический материализм. Ральцевич В. Н. В сб.: 15-я научн. конференция Ленингр. инж.-строит. ин-та, Л., 1957, 5—10

Доклад по проблемам кибернетики в связи с изданием на русском языке книги Цюй Сюэ-сеня „Техническая кибернетика“. Автор выступает как против недооценки рационального содержания кибернетики, так и против другой крайности: против „ее расширительного толкования“, против „подмены ею ряда других наук, лежащих в других высших плоскостях“.

П. Е. Сивоконь

8363. Интуиционистская революция в математике и логике. Френкель (The intuitionistic revolution in mathematics and logic. Fraenkel A. A.), Bull. Res. Council Israel, 1954, **3**, № 4, 283—289 (англ.)

Краткое изложение основ интуиционизма в математике и логике, хотя это не означает, как оговаривается автор, что сам он держится этих позиций.

Б. Н. Пятницын

8364. Смысл и понятие симметрии. Энгельхардт (Sinn und Begriff der Symmetrie. Engelhard Wolf von), Studium gen., 1953, **6**, № 9, 524—535 (нем.)

Попытка расширения понятия симметрии. Автор говорит, что современное понятие симметрии, как только „повторения равного“, слишком узко, что в целом ряде областей, в частности в биологии, морфологии и проч., требуется расширение этого понятия до „повторения следственного“, может быть, даже не только внутри пространственных областей.

Смысл расширения сводится к тому, что, вводя свою новую классификацию отношений на внутренние (например отношение количества), внешние (отношение положения), циклические и нециклические, автор считает возможным обобщить прежнее понятие симметрии, относившееся, по его мнению, к только изоморфным конечным и бесконечным отношениям, на гомеоморфные также конечные и бесконечные отношения. Указывается, что впервые подобное обобщение было сделано Вольфом (Wolf K. L., Studium gen., 1949, **2**, 213.)

Б. Н. Пятницын

8365. Элементарный подход к использованию понятия скорости изменения для решения задач. Кофман (An elementary approach to the use of the rate of change concept for solving problems. Coffman Raphael T.), Math. Mag., 1956, **30**, № 2, 81—90 (англ.)

Излагается метод нахождения выражений для скорости изменения некоторых алгебраических и тригонометрических функций и приложение его к вычислению площадей и объемов без использования пределов.

Автор выводит формулы для вычисления площади (объема), „заметаемой“ движущимся отрезком (площадкой) в виде произведения длины (площади) на нормальную компоненту скорости движения, и решает задачи на вычисление площадей, ограниченных координатными осями и прямой, или параболой, а также объемов пирамиды, конуса, призмы и другие.

Е. С. Шатунова

8366. Некоторые примеры использования матриц в курсе физики для математических классов. Бернар (Quelques exemples d'utilisation des matrices dans le cours de physique de mathématiques spéciales, Bernard M.), Rev. math. spéc., 1957, **67**, № 8, 501—504 (франц.)

В связи с тем, что во Франции новая программа по математике для математических классов содержит элементы матричного исчисления, автор рассматривает примеры из курса физики (оптики, электричества), в которых используются матрицы и которые должны показать учащимся новый математический аппарат в действии. А. Г. Школьник

8367 К. Математика, ее содержание, методы и значение. Т. 2. Ред. **Александров А. Д., Колмогоров А. Н., Лаврентьев М. А.** М., АН СССР, 1956, 395 стр., илл., 20 р. 80 к.

Второй том коллективного труда советских математиков (о 1-ом томе см. РЖМат, 1957, 6087). Содержит главы 5—14, написанные разными авторами.

Гл. 5. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Петровский И. Г.

§ 1. Введение. Дифференциальные уравнения как частный вид функциональных уравнений. Значение теории дифференциальных уравнений для изучения физических процессов. Разделение дифференциальных уравнений на обыкновенные и в частных производных. Примеры физических задач, сводящихся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Основные определения и задачи, возникающие в теории обыкновенных дифференциальных уравнений; отыскание общего и частных решений, зависимость от начальных данных, зависимость от параметров, входящих в уравнение, изучение качественных свойств решений дифференциальных уравнений, численное решение дифференциальных уравнений.

§ 2. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. На примере линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами показывается, как можно найти общее решение. Исследуются свойства общего решения. Находится и исследуется общее решение неоднородного уравнения, когда правая часть имеет вид $A\cos\omega t$.

§ 3. Несколько общих замечаний о решении и составлении дифференциальных уравнений. Подчеркивается важность приближенных методов решения дифференциальных уравнений в связи с тем, что сами дифференциальные уравнения лишь приближенно описывают физические явления. Дается понятие о „грубых" дифференциальных уравнениях.

§ 4. Геометрическая интерпретация задачи интегрирования дифференциальных уравнений. Обобщение задачи. Вводится понятие поля направлений. Дается известная геометрическая интерпретация решения дифференциального уравнения. Вводится понятие интегральной кривой.

§ 5. Существование и единственность решения дифференциального уравнения. Приближенное решение уравнений. Важность теорем существования и единственности, демонстрирующих согласованность и известную полноту математического описания физических явлений. Идея метода ломаных и метода последовательных приближений доказательства теорем существования решений дифференциальных уравнений. Сведение уравнений высших порядков к системе уравнений первого порядка. Понятие фазового пространства.

§ 6. Особые точки. Понятие о способах исследования особых точек уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,\ y)}{N(x,\ y)}.$$

Классификация особых точек уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy}.$$

§ 7. Качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Предмет качественной теории; ее возникновение в связи с потребностями механики и физики. Определение устойчивого и неустойчивого по Ляпунову решения. Простейшие достаточные условия устойчивости и неустойчивости по Ляпунову. Понятие о качественном исследовании семейства интегральных кривых „в целом". Понятие предельного цикла и его устойчивости. Метод Пуанкаре отыскания предельных циклов, основанный на построении циклов без прикосновения.

Гл. 6. Уравнения в частных производных. Соболев С. Л.

§ 1. Введение. Предмет математической физики — некоторые идеализированные физические явления, описываемые при помощи нескольких функций многих независимых переменных.

§ 2. Простейшие уравнения математической физики. Математическая трактовка законов сохранения массы и тепловой энергии, третьего закона Ньютона. Вывод уравнений: колебания струны, стационарного движения идеальной жидкости, распространения тепла, малых колебаний газа.

§ 3. Начальные и краевые условия. Единственность решения. Понятие о начальных и краевых условиях задач математической физики. Типичные краевые условия для уравнения Пуассона. Доказательство единственности решения задачи Дирихле. Типичные краевые условия для уравнения теплопроводности и начальные условия для этого уравнения. Доказательство единственности первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Начальные и краевые условия для волнового уравнения. Доказательство единственности решения.

§ 4. Распространение волн. Геометрическая картина распространения возмущения и интерпретация волнового уравнения в одномерном и трехмерном случае.

§ 5. Методы построения решения. На примере уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа иллюстрируется метод разделения переменных. Понятие о собственных функциях и некоторые их свойства. На примере уравнений Лапласа и Пуассона иллюстрируется метод потенциалов. Пример на применение метода Галеркина. Понятие о методе сеток. Применение метода сеток к уравнению Лапласа. Иллюстрация устойчивости и неустойчивости метода сеток на примере уравнения теплопроводности. Значение для теории уравнений математической физики критерия практики и обратное влияние этой теории на практику.

§ 6. Обобщенные решения. Ладыженская О. А. Примеры отсутствия классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений. Допустимые решения, являющиеся пределами классических решений. Допустимые решения как функции, удовлетворяющие некоторому интегральному тождеству, содержащему произвольную функцию. Физическая трактовка получения решений из интегральных тождеств. Понятие о методе Ритца.

Гл. 7. Кривые и поверхности. Александров А. Д.

§ 1. Понятие о предмете и методе теории кривых и поверхностей. Значение изучения кривых и поверхностей для практики. Методы элементарной геометрии, аналитической геометрии и дифференциальной геометрии при изучении кривых и поверхностей. Краткая история развития дифференциальной геометрии и влияние практики на ее развитие.

§ 2. Теория кривых. Способы задания кривых. Определение длины кривой и способы ее вычисления. Касательная к кривой. Кривизна кривой и ее вычисление. Применение понятия кривизны к решению механических задач. Соприкасающаяся плоскость. Главная нормаль. Кручение.

§ 3. Основные понятия теории поверхностей. Способы задания поверхности. Касательная плоскость. Нормаль к поверхности. Применение этих понятий в оптике и

при определении площади поверхности. Нормальные сечения. Кривизна линий на поверхности. Главные направления и главные кривизны. Теоремы Эйлера и Менье о кривизне линий на поверхности. Типы точек на поверхности. Средняя кривизна. Применение средней кривизны в задачах механики. Гауссова или полная кривизна.

§ 4. Внутренняя геометрия и изгибание поверхности. Внутренняя геометрия поверхности как совокупность ее свойств, не меняющихся при изгибании. Связь задач внутренней геометрии с задачами геодезии и картографии. Геодезическая кривизна. Связь внутренних свойств поверхности с гауссовой кривизной. Геодезические линии. Механические применения геодезических. Изгибание аналитических поверхностей. Непрерывные изгибания. Связь внутренней геометрии поверхности с ее пространственной формой. Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Формула вычисления угла между кривыми на поверхности. Площадь поверхности. Вторая квадратичная форма. Кривизна линий на поверхности.

§ 5. Новые направления в теории кривых и поверхностей. Семейства кривых и поверхностей. Огибающая семейства. Применение теории огибающих в теории механизмов. Теория конгруэнций и ее практическое применение. Нерегулярные поверхности. Геометрия в малом и геометрия в целом. Теория выпуклых тел. Результаты А. Д. Александрова и А. В. Погорелова в теории общих кривых и поверхностей. Дифференциальная геометрия групп преобразований.

Гл. 8. Вариационное исчисление. Крылов В. И.

§ 1. Введение. Примеры вариационных задач: линия наискорейшего ската, поверхности вращения наименьшей площади, равновесие деформированной мембраны. Понятие функционала. Экстремумы функционалов. Определение вариационного исчисления как теории экстремумов функционалов, заданных на множествах функций. Связь вариационного исчисления с механикой и физикой.

§ 2. Дифференциальные уравнения вариационного исчисления. Вывод дифференциального уравнения Эйлера для простейшего интеграла вариационного исчисления. Пример на применение уравнения Эйлера. Функционалы, зависящие от нескольких функций. Вариационный принцип Остроградского-Гамильтона. Задача о минимуме кратного интеграла. Пример на отклонение мембраны.

§ 3. Методы приближенного решения задач вариационного исчисления. Метод ломаных Эйлера. Метод Ритца.

Гл. 9. Функции комплексного переменного. Келдыш М. В.

§ 1. Комплексные числа и функции комплексного переменного. Комплексные числа. Основная теорема алгебры. Степенные ряды и функции комплексного переменного. Теорема Абеля. Круг сходимости. Радиус сходимости. Показательная и тригонометрические функции. Формула Эйлера. Аналитические функции. Производная функции комплексного переменного. Уравнения Коши—Римана. Функция $\operatorname{Ln} z$. Точки ветвления. Однозначная ветвь функции комплексного переменного.

§ 2. Связь функций комплексного переменного с задачами математической физики. Установившиеся движения жидкой среды. Плоскопараллельные движения жидкой среды. Дифференциальное уравнение для траекторий. Линии тока. Функция тока. Выражения компонент скорости через производные от функции тока. Безвихревые движения жидкости. Потенциал скорости. Характеристическая функция течения. Примеры плоскопараллельных течений жидкости. Циркуляционное движение. Циркуляция течения. Постулат Чаплыгина. Теорема Жуковского о подъемной силе крыла. Приложения к другим задачам математической физики, связанных с решением уравнения Лапласа и другими уравнениями математической физики.

§ 3. Связь функций комплексного переменного с геометрией. Геометрическая теория функций. Коэффициент растяжения. Вращение отображения. Геометрический смысл производной. Конформные отображения. Отображение функций $w = z^n$. Теорема Римана. Приложения к задачам теории крыла. Трудности фактического построения конформного отображения. Квазиконформные отображения.

§ 4. Криволинейный интеграл. Формула Коши и ее следствия. Интеграл от функции комплексного переменного. Теорема Коши. Неопределенный интеграл от функции комплексного переменного. Интеграл Коши. Теорема о наличии у аналитической функции производной любого порядка. Теорема о разложимости аналитической функции в степенной ряд. Целые функции. Трансцендентные функции. Связь между расположением нулей и порядком роста целой функции. Мероморфные функции. Полюса. Разложение Лорана. Разложение в ряд многочленов.

§ 5. Свойство единственности и аналитическое продолжение. Теорема о единственности аналитической функции, заданной на отрезке кривой. Аналитическое продолжение. Полные аналитические функции. Многозначные функции. Поверхности Римана. Поверхности Римана для функций $\operatorname{Ln} z$ и $\sqrt{z}$. Ряд поверхности.

§ 6. Заключение. Связи теории аналитических функций с физикой и другими разделами математики.

Гл. 10. Простые числа. Марджанишвили К. К.

§ 1. Что и как изучает теория чисел. Теория чисел как наука о системе целых чисел, а в расширенном смысле о системах чисел, определенным образом построенных при помощи целых чисел. Делимость одного числа на другое. Простые числа. Аддитивные и мультипликативные свойства чисел. Влияние теории чисел на другие разделы математики. Алгорифм Евклида. Разделение теории чисел по методам на части: элементарную, аналитическую, алгебраическую и геометрическую.

§ 2. Как исследовали вопросы, относящиеся к простым числам. Доказательство бесконечности числа простых чисел. Решето Эратосфена. Функции $\zeta(s)$. Тождество Эйлера. Исследования П. Л. Чебышева о распределении простых чисел в натуральном ряде: доказательство, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\Pi(x)}{x/\ln x} = 1,$$

если только такой предел существует. Доказательство, что

$$A_1 < \frac{\Pi(x)}{x/\ln x} < A_2,$$

где

$$0{,}92 < A_1 < 1 \text{ и } 1 < A_2 < 1{,}1.$$

Уточнение Адамаром первого из результатов Чебышева. Исследования Римана о функции $\zeta(s)$. Работы по теории простых чисел, основанные на применении метода тригонометрических сумм И. М. Виноградова. Решение И. М. Виноградовым проблемы Гольдбаха: всякое достаточно большое нечетное число представимо суммой трех простых чисел.

§ 3. О методе Чебышева. Упрощенное изложение метода Чебышева для подсчета числа простых чисел, лежащих в данных пределах. Показано, как можно выбрать постоянную M для того, чтобы в интервале

$[n, Mn]$ при достаточно большом n лежало сколь угодно много простых чисел.

§ 4. О методе Виноградова. Иллюстрация метода Виноградова на примере решения им проблемы Гольдбаха.

§ 5. Разложение целых чисел на сумму двух квадратов. Целые комплексные числа. Постников А. Г. Доказано необходимое и достаточное условие представимости целого числа в виде суммы квадратов двух целых чисел.

Гл. 11. Теория вероятностей. Колмогоров А. Н.

§ 1. Вероятностные закономерности. Достоверные, невозможные и случайные (по отношению к некоторому комплексу условий) события. Статистические закономерности. Вероятностные закономерности. Вероятностно-случайные явления.

§ 2. Аксиомы и основные формулы элементарной теории вероятностей. Границы вероятностей. Несовместимые события. Соединение событий. Теорема сложения вероятностей. Полная система событий. Совмещение событий. Условная вероятность. Независимость событий. Биномиальное распределение. Пример из теории стрельбы.

§ 3. Закон больших чисел и предельные теоремы. Неизбежность вероятностного подхода при оценке отклонения частоты от вероятности Оценка отклонения частоты появления события при n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность иметь положительный исход равна p, от этой вероятности. Распределение вероятностей случайной величины. Математическое ожидание. Дисперсия. Среднеквадратическое отклонение. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел Чебышева. Центральная предельная теорема теории вероятностей.

§ 4. Дополнительные замечания об основных понятиях теории вероятностей. Уточнение понятия вероятностно-случайного явления. Свойство события A быть вероятностно-случайным и иметь определенную вероятность при некоторых заданных условиях S как выражение объективной связи между условиями S и событием A. Выяснение реального смысла понятия независимости. Независимость в теории вероятностей — более широкое понятие, чем реальная независимость в смысле принадлежности к причинно несвязанным явлениям. Связь теории вероятностей с теорией меры. Анализ реального и формального понятия вероятности.

§ 5. Детерминированные и случайные процессы. Изучение реальных процессов при помощи дифференциальных уравнений как наиболее простое математическое выражение принципа причинной обусловленности. Пример падения тяжелого тела в атмосфере. Теория динамических систем как общая форма детерминистических концепций. Для всех детерминированных схем характерно: 1) состояние изучаемой системы считается исчерпывающим образом определенным посредством задания некоторого математического объекта; 2) последующие значения однозначно определяются по значению, соответствующему начальному моменту. Критика механистического материализма. Выделение существенных сторон реального явления. Остаток после выделения. Необходимость статистических методов изучения влияния остатка.

§ 6. Случайные процессы марковского типа. Основные уравнения марковского процесса. Метод стохастических дифференциальных уравнений в применении к задаче о движении взвешенной в атмосфере частицы.

Гл. 12. Приближение функций. Никольский С. М.

§ 1. Введение. Приближение функций как аппарат для исследования свойств приближаемой функции; его практическое значение. Приближения при помощи алгебраических и тригонометрических многочленов. Очерк истории теории приближений.

§ 2. Интерполяционные многочлены. Построение интерполяционного многочлена Лагранжа. Остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа. Сходимость интерполяционного процесса.

§ 3. Приближение определенных интегралов. Формула Симпсона приближенного интегрирования. Ее обобщение. Остаточный член формулы Симпсона. Формула прямоугольников. Формула трапеций. Общие принципы построения квадратурных формул. Формулы Чебышева, Эрмита, Гаусса.

§ 4. Идея Чебышева о наилучшем равномерном приближении. Постановка вопроса. Наилучшее равномерное приближение функции на некотором отрезке при помощи функций данного семейства. Свойства функции наилучшего приближения. Случай приближения алгебраическими многочленами.

§ 5. Многочлены Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля. Выражение для многочлена, наименее уклоняющегося от нуля. Связь с теорией интерполирования. Неравенство Маркова.

§ 6. Теорема Вейерштрасса. Наилучшее приближение функции и ее дифференциальная природа. Приведено несколько формулировок теоремы Вейерштрасса. Роль теоремы Вейерштрасса в расширении класса функций, задаваемых аналитическими выражениями. Многочлены Бернштейна. Оценка наилучшего приближения для функций, обладающих на рассматриваемом отрезке ограниченными производными порядка r. Оценка наилучшего приближения для аналитических функций. Оценка отклонения интерполяционного многочлена от интерполируемой функции, если в качестве узлов интерполирования взяты корни многочлена Чебышева, наименее уклоняющегося от нуля.

§ 7. Ряды Фурье. Изучение колебания струны как пример физической задачи, приводящей к рядам Фурье. Исследования Д. Бернулли, Фурье и Дирихле по тригонометрическим рядам. Выражения для коэффициентов Фурье. Пример разложения функции в ряд Фурье. Оценка отклонения частичной суммы ряда Фурье от разлагаемой функции в случае, когда эта функция периодическая и обладает производной порядка r, и в случае, когда эта функция периодическая и аналитическая. Результат А. Н. Колмогорова о существовании функции, периодической и интегрируемой по Лебегу, сумма Фурье которой не сходится к ней ни в одной точке. Суммы Фейера.

§ 8. Приближение в смысле среднего квадратичного. Колебание струны как пример задачи, приводящей к среднеквадратичным приближениям. Постановка задачи о среднеквадратичных приближениях. Среднеквадратичные приближения при помощи системы ортонормированных функций. Сходимость в среднем.

Гл. 13. Приближенные методы и вычислительная техника. Крылов В. И.

§ 1. Приближенные и численные методы. Основные задачи, возникающие при математическом исследовании физического закона, записанного в виде уравнения: разрешимость задачи, попытка отыскания явного решения в виде формулы, отыскание приемов, позволяющих найти решение численным путем, отыскание процесса, позволяющего найти приближенную формулу. Значение приближенных методов. Особенность численных методов, связанная с возможностью производить вычисления лишь над конечным множеством чисел и с помощью конечного числа операций. Метод Галеркина как пример приближенного метода. Метод ломаных Эйлера. Метод сеток. Замена интегрального уравнения системой линейных алгебраических уравнений при помощи формул приближенных квадратур. Сходящиеся методы. Быстрота сходимости. Оценка погрешности. Метод по-

следовательных приближений. Сходимость метода последовательных приближений для уравнения $x = \varphi(x)$. Примеры на применение метода последовательных приближений. Понятие об устойчивости. Пример неустойчивой разностной схемы для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Значение выбора метода для сокращения вычислительной работы.

§ 2. Простейшие вспомогательные средства вычислений. Применение таблиц. Таблицы с одним и двумя входами. Счеты. Арифмометр с колесами Однера. Настольные клавишные машины. Счетно-аналитические машины. Релейные машины. Перфорационная карта. Перфоратор. Сортировка. Воспроизводящий перфоратор или репродуктор. Табулятор. Умножающий перфоратор. Моделирующие машины: фрикционный интегратор, электрическая сетка для решения уравнения Лапласа.

Гл. 14. Электронные вычислительные машины. Лебедев С. А.

§ 1. Назначение и основные принципы работы электронных вычислительных машин. Значение универсальных электронных счетных машин. Быстродействующая электронная счетная машина АН СССР (БЭСМ). Некоторые задачи, решенные на БЭСМ. Применение электронных вычислительных машин для решения логических задач. Основные блоки электронной вычислительной машины: арифметическое устройство, запоминающее устройство, устройство управления, вводные и выводные устройства. Команды. Программа.

§ 2. Программирование и кодирование на быстродействующих электронных машинах. Пример схемы программы. Трехадресная система команд. Примеры программ. Простейшие приемы образования циклов. Одноадресная система команд. Стандартные подпрограммы. Контроль вычислений. Система счисления. Действия над числами в двоичной системе счисления. Машины последовательного и параллельного действия. Машины с фиксированной и плавающей запятой.

§ 3. Технические принципы устройства быстродействующих счетных машин. Порядок выполнения операций на электронной счетной машине. Триггерная схема. Приемные регистры. Суммирующие схемы. Схема умножения. Схема электронного счетчика. Схемы совпадения, инверторы, разделительные диодные цепи. Запоминающее устройство на электроакустических ртутных трубках. Магнитные ленты и барабаны как запоминающие устройства. Использование электронно-лучевых трубок в качестве запоминающего устройства. Магнитные элементы с прямолинейной петлей гистерезиса.

§ 4. Перспективы развития и использования электронных счетных машин. Канторович Л. В. Широкому использованию электронных счетных машин способствует улучшение их технических характеристик и увеличение разнообразия типов. Эффективность использования машин повышается благодаря применению библиотек подпрограмм, программирующих программ и программ, способных анализировать закодированные крупные задания. Использование машин для производства аналитических выкладок. Влияние быстродействующих машин на численные и приближенные методы. Возможность создания таблиц для большого числа функций. Изменения в таблицах. Использование различных рациональных представлений функций вместо таблиц. Уменьшение значения сложных аналитических выражений. Необходимость разработки эффективных приближенных методов для решения многомерных задач. Значение универсальности метода. Учет особенностей машины. Значение асимптотических оценок. Значение апостериорных оценок. Возможность теоретического анализа задачи. Новая проблематика в численных методах: влияние округлений при решении систем линейных алгебраических уравнений, вопросы устойчивости при численном интегрировании уравнений. Новые методы: метод Монте-Карло. Больший интерес к многомерным задачам анализа. Возможности математического эксперимента для анализа задачи. Использование машин для проверки истинности формул математической логики. Значительное расширение круга задач механики и физики, которые могут решаться на машинах. Использование машин для проектирования, в вопросах организации производства, в автоматизации управления производством.

Все статьи тома снабжены рекомендательными списками литературы, включающими монографии, учебники и популярные издания. Том снабжен также именным указателем и перечнем глав, составляющих содержание 1-го и 3-го томов. Н. П. Жидков

Опечатки: На стр. 281, пятая строка снизу, вместо $(t_0, \omega_i; t, \omega;)$ следует читать $P(t_0\omega_i; t, \omega;)$.

8368 К. Математика, ее содержание, методы и значение. Т. 3. Ред. **Александров А. Д., Колмогоров А. Н., Лаврентьев М. А.** М., АН СССР, 1956, 336 стр., илл., 17 р. 60 к.

Часть единого трехтомного издания, содержащего обзор основных направлений математики, их возникновения и развития, связи между собой и с другими науками. О первых двух томах этого издания см. РЖМат, 1957, 6087 К и реф. 8368 К. В настоящий том включены гл. 15—20, написанные разными авторами.

Гл. 15. Теория функций действительного переменного. Стечкин С. Б.

§ 1. Введение. Разъясняется, что теория функций действительного переменного возникла как следствие деятельности ученых по обоснованию математического анализа. Указывается отличие предмета этой теории от предмета классического математического анализа. Основанием теории функций действительного переменного служит теория множеств.

§ 2. Множество. Определение и примеры множеств, операций над множествами, конечные и бесконечные множества; мощности множеств; счетные множества и множества мощности континуума.

§ 3. Действительные числа. Отмечено выполнение для рациональных чисел аксиом упорядоченного поля, свойств плотности и счетности, но не указано, что все перечисленные свойства еще не образуют полной системы аксиом для рациональных чисел. Вводятся действительные числа методом дедекиндова сечения и с помощью стягивающейся системы отрезков. Свойство непрерывности совокупности действительных чисел формулируется в четырех формах: 1) принцип Дедекинда: любое сечение действительных чисел определяется единственным числом; 2) принцип Кантора: любая стягивающаяся последовательность отрезков содержит единственное общее число; 3) принцип Вейерштрасса: любая неубывающая ограниченная сверху последовательность действительных чисел сходится; 4) принцип Коши: любая фундаментальная последовательность действительных чисел сходится. Доказана эквивалентность свойств 1) и 2) и указано, что свойства 3) и 4) эквивалентны между собой, а вместе с принципом Архимеда (для любых действительных чисел $a > 0$ и b существует натуральное число n такое, что $na > b$) эквивалентны свойствам 1) и 2). Несчетность множества всех точек отрезка прямой доказывается от противного.

§ 4. Точечные множества. Рассматриваются лишь множества на прямой. Вводятся известные понятия: отрезок, интервал, верхняя грань множества, предельная точка, замкнутое и открытое множества и т. д. Выясняется строение замкнутых и открытых множеств, а также канторова совершенного множества. Дается определение дескриптивной теории множеств как науки, изучающей строение точечных множеств. Указана ее связь с математической логикой и заслуги в ней советских математиков.

§ 5. Мера множеств. Вводится понятие меры для открытых и замкнутых множеств. Затем следует общее определение меры. Даны известные определения измеримых множеств и функций. Доказаны основные свойства меры и сформулированы теорема, что функция тогда и только тогда интегрируема по Риману, когда она ограничена и множество ее точек разрыва имеет меру нуль, теоремы Лебега об измеримости суммы, разности, произведения и частного (когда делитель отличен от нуля), а также предела почти всюду сходящейся последовательности, измеримых функций, теорема Лузина, что измеримую функцию, заданную на отрезке, можно превратить в непрерывную, изменив ее значения на множестве сколь угодно малой меры.

§ 6. Интеграл Лебега. Дано известное определение интеграла Лебега. Отмечено, что любая ограниченная измеримая функция интегрируема по Лебегу, что сходящуюся почти всюду на отрезке последовательность измеримых функций, ограниченных в совокупности, можно интегрировать почленно. Указано, что известное равенство Парсеваля тогда и только тогда выполняется для данной функции $f(x)$ с периодом 2π, когда эта функция измерима на отрезке $[0, 2\pi]$ и функция $f^2(x)$ интегрируема по Лебегу на этом отрезке.

Гл. 16. Линейная алгебра. Фаддеев Д. К.

§ 1. Предмет линейной алгебры и ее аппарат. Определяется линейная функция от нескольких переменных и характерные для нее свойства приращения. Предметом линейной алгебры является в первую очередь учение о линейных функциях. То обстоятельство, что всякая функция с непрерывными частными производными при малых изменениях аргументов близка к линейной, позволяет применять линейную алгебру к различным областям математики, механики и других наук. С линейными функциями и их системами связываются понятия вектора и матрицы. Определяется умножение матриц и выясняются его свойства. Определяется n-мерное арифметическое векторное пространство как совокупность всех строк из n чисел. Для расширения области применения удобно рассматривать общие линейные пространства, элементы которых могут иметь любую природу, но операции сложения и умножения на число обладают теми же свойствами, что и в арифметическом пространстве.

§ 2. Линейное пространство. Дано аксиоматическое определение линейного пространства, обычное определение линейной зависимости, базиса, размерности и т. д. Показано, что все n-мерные линейные пространства изоморфны. Указана связь размерности суммы и пересечения двух подпространств с размерностью этих подпространств. Евклидовы пространства определены сначала при помощи выражения длины вектора в координатах, а затем аксиоматически. Введены понятия комплексных, линейных и унитарных пространств.

§ 3. Системы линейных уравнений. Дано понятие определителя (без правила знаков для его членов) и его свойства. Единичная и обратная матрицы. Исследование решения однородных и неоднородных систем линейных уравнений с помощью обобщенных геометрических понятий.

§ 4. Линейные преобразования. Указано значение линейных преобразований для приложений ввиду их связи с любыми „гладкими" преобразованиями. Изложены известные свойства любых линейных и ортогональных преобразований и их матриц, собственных значений и собственных векторов и т. д., включая понятие жордановой матрицы.

§ 5. Квадратичные формы. После определения отмечено их применение в ряде областей математики, в механике, физике и кристаллографии. Изложено приведение к каноническому виду, закон инерции, положительно определенные формы и ортогональное преобразование к каноническому виду с доказательством основанным на экстремальных свойствах собственных значений.

§ 6. Функции от матриц и некоторые их приложения. Определена сходимость последовательности матриц и значение аналитической функции от матрицы как сумма степенного ряда, сходящегося для всех матриц, собственные значения которых лежат внутри круга сходимости ряда данной функции. Приложение функций от матриц к решению систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Гл. 17. Абстрактные пространства. Александров А. Д.

Задачей главы является выяснение вопросов происхождения, применения в математике и других науках и отношения к действительности понятий абстрактных математических пространств без детального изложения формального аппарата.

§ 1. История постулата Евклида. Даны формулировки пятого постулата Евклида и эквивалентных ему положений, данные Проклом, Валлисом, Саккери, Лежандром и Гауссом. Перечислены попытки его доказать или вывести следствия из его отрицания, сделанные Саккери, Ламбертом, Гауссом, Швейкартом и Тауринусом. Устанавливается приоритет Лобачевского в открытии неевклидовой геометрии.

§ 2. Решение Лобачевского. Из возможности построения неевклидовой геометрии Лобачевский сделал вывод о недоказуемости пятого постулата. Истинность той или иной геометрии он считал нужным доказывать не логическим, а опытным путем. В природе может оказаться верной геометрия, отличная от евклидовой. Это положение Лобачевского нашло блестящее подтверждение в теории относительности. Лобачевский опроверг положение Канта об априорности понятий, показав их происхождение из опыта. Почти одновременно с Лобачевским мысль о недоказуемости пятого постулата была высказана Бойаи.

§ 3. Геометрия Лобачевского. Приведены некоторые положения геометрии Лобачевского на плоскости с примерами доказательств: наличие двух параллельных к данной прямой, проходящих через данную точку, угол параллельности и его выражение через расстояние точки от прямой, формула длины окружности, случаи взаимного расположения двух прямых и т. д. Указано, что геометрия Лобачевского в достаточно малых областях близка к евклидовой и стремится к ней при увеличении константы Лобачевского k.

§ 4. Реальный смысл геометрии Лобачевского. Изложены результаты Бельтрами о реализации геометрии Лобачевского на псевдосфере, Клейна и Пуанкаре — на круге, Кейпера (1955 г.) — на особой поверхности, реализующей плоскость Лобачевского в целом. Указаны приложения геометрии Лобачевского, данные Пуанкаре, к теории функций комплексного переменного,— и Варичаком, к теории относительности.

§ 5. Аксиомы геометрии, их проверка для указанной модели. Сравниваются системы аксиом геометрии Евклида и Лобачевского по группам: сочетания, порядка, движения, непрерывности и параллельности. Движение принято за первоначальное понятие, но точного списка первоначальных понятий не дано. Доказано, что для модели Клейна выполнены все аксиомы геометрии Лобачевского, чем установлена непротиворечивость последней, равно как и недоказуемость пятого постулата Евклида.

§ 6. Выделение самостоятельных геометрических теорий из евклидовой геометрии. Выясняется смысл аффинных, проективных и топологических свойств и соответствующих абстрактных пространств. Изложен принцип классификации геометрических наук по группам

взаимно однозначных преобразований пространства, предложенный в „Эрлангенской программе" Клейна.

§ 7. Многомерные пространства. Появление многомерной геометрии объясняется общностью алгебраических закономерностей для любого числа неизвестных и стремлением применять геометрические представления и методы при решении вопросов алгебры и анализа. Координатное построение n-мерного пространства дано Грассманом и Кэли, а аксиоматическое — Шлефли. Изложено задание плоскостей любого числа измерений системами линейных уравнений, свойства их взаимного расположения, определение простейших многомерных многогранников и их объема. Упомянуто о соприкасающихся плоскостях и кривизнах различного числа измерений для кривой в n-мерном пространстве и о перенесении геометрии Лобачевского, проективной и других на многомерные пространства.

§ 8. Обобщение предмета геометрии. Примеры: пространства цветов, фазового пространства системы точек и др. Общее определение пространства как совокупности однородных объектов с отношениями, сходными с пространственными. Определения топологического, метрического и гильбертова пространств и области их применения.

§ 9. Риманова геометрия. Риманово пространство определяется как такое, вблизи каждой точки которого можно ввести свою систему координат так, что элемент длины дуги кривой определяется той же формулой, что и в евклидовом пространстве:

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}.$$

Иными словами, риманово пространство в малых частях мало отличается от евклидова. Упомянуто, что n-мерное риманово пространство можно представить в виде поверхности в евклидовом пространстве числа измерений $\frac{n(n+1)}{2}$, что риманово пространство можно задать положительной квадратичной формой с коэффициентами, зависящими от координат точки, задающей квадрат элемента длины, и что тензор кривизны риманова пространства является обобщением гауссовой кривизны поверхности. Указано обобщение и развитие идей Римана в работах Финслера, Картана и советских математиков Рашевского и Вагнера.

§ 10. Абстрактная геометрия и реальное пространство. Выясняется неразрывная связь пространства и времени с материей. В отношении к свойствам реального пространства истинна та геометрия, которая достаточно точно выражает пространственные отношения. Дана общая характеристика специальной теории относительности, устанавливающей связь пространства и времени и их однородность относительно преобразований Лоренца, и общей теории относительности, объединяющей пространство, время и материю в общем законе тяготения. Абстрактная геометрия служит математическим аппаратом теории относительности и дает средства наиболее глубокой формулировки ее основ.

Гл. 18. Топология. Александроз П. С.

§ 1. Предмет топологии. Изучение отношения прикосновения и двойственного отношения — рассечения — является предметом топологии. Топологические преобразования определяются как преобразования, не разрушающие и не создающие прикосновения.

§ 2. Поверхности. Указывается нормальный вид двусторонних и односторонних поверхностей, характеризующий их с точностью до гомеоморфизма. Дано наглядное построение односторонней поверхности Клейна и проективной плоскости.

§ 3. Многообразия. На примерах шарнирных механизмов и фазовых пространств показаны истоки теории многомерных многообразий.

§ 4. Комбинаторный метод. Определяется эйлерова характеристика двусторонних поверхностей. Комбинаторный метод состоит в изучении свойств многообразий с помощью свойств их триангуляций. Это позволяет применять алгебраические методы. Дано определение цепи, ее границы, цикла, гомологии нулю и чисел Бетти. Формулируется теорема Эйлера — Пуанкаре о том, что альтернированная сумма чисел Бетти равна эйлеровой характеристике.

§ 5. Векторные поля. Выясняется связь векторных полей с качественной теорией дифференциальных уравнений, с динамическими системами, теорией малых колебаний и другими областями физики и механики. Дается определение индекса особой точки векторного поля на многообразии и с его помощью доказывается теорема о существовании неподвижной точки при отображении круга в себя. Формулируется теорема Хопфа о том, что сумма индексов всех особых точек любого векторного поля на гладком многообразии равна эйлеровой характеристике этого многообразия.

§ 6. Развитие топологии. Топология поверхностей развилась в конце XIX в. в связи с теорией функций комплексного переменного (римановы поверхности). Затем отмечено значение топологических работ Пуанкаре и Брауера, развитие теоретико-множественной топологии советскими и польскими математиками, создание гомотопической теории многообразий Хопфом, гомологической теории размерности Александровым П. С., появление набла-топологии и законов двойственности Александера, Колмогорова и Понтрягина.

§ 7. Метрические и топологические пространства. Дано определение метрического пространства и его связь с функциональным анализом, понятие о топологическом пространстве и роль советских математиков в развитии теории топологических пространств.

Гл. 19. Функциональный анализ. Гельфанд И. М.

§ 1. n-мерное пространство. Напоминаются основные понятия n-мерного евклидова пространства. Доказаны неравенство Коши-Бунякозского и обобщенная теорема Пифагора.

§ 2. Гильбертово пространство (бесконечномерное пространство). На примере колебаний n материальных точек на упругой нити с переходом $n \to \infty$ к колебанию струны показано, что от задач n-мерного пространства при $n \to \infty$ приходят к задачам бесконечномерного пространства, элементами которого являются функции. Гильбертово пространство состоит из всех функций $f(x)$, для которых существует интеграл Лебега от $f^3(x)$ на данном отрезке. Скалярное произведение определяется как интеграл произведения. Доказаны обычные свойства, аналогичные свойствам n-мерного евклидова пространства, включая неравенство Коши-Буняковского и теорему Пифагора.

§ 3. Разложение по ортогональным системам функций. Каждая задача о малых колебаниях упругой среды приводит к некоторой системе ортогональных функций; например, колебания струны — к тригонометрическим, сферы — к сферическим, круглой мембраны или цилиндра — к цилиндрическим функциям. Дано определение ортогональных полиномов Лежандра и отмечена роль Чебышева П. Л. в развитии общей теории ортогональных полиномов. Ортогональная система функций называется полной, если к ней нельзя добавить отличной от нуля функции, ортогональной ко всем функциям системы. Для того чтобы всякая функция гильбертова пространства разлагалась в ряд по данной ортогональной и нормированной системе функций (в смысле сходимости в среднем), необходимо и достаточно, чтобы эта система функций была полной.

При этом коэффициенты разложения являются проекциями данной функции на функции ортогональной и

нормированной системы. Формулируются условие полноты (интеграл квадрата любой функции равен сумме квадратов коэффициентов ее разложения) и теорема о том, что последовательность чисел тогда и только тогда будет системой коэффициентов разложения некоторой функции, когда ряд их квадратов сходится. Последняя теорема теряет силу при переходе от гильбертова пространства к пространству непрерывных функций.

§ 4. Интегральные уравнения. На примерах свободных колебаний струны и стержня показано значение интегральных уравнений для приложений. Выясняется составление любого колебания из гармонических колебаний и понятие о собственных частотах и собственных колебаниях системы. Указана связь свойств однородного и неоднородного интегральных уравнений. Уравнение с симметрическим ядром имеет бесконечную последовательность действительных собственных значений. Дано условие, при котором собственные функции интегрального уравнения образуют полную ортогональную систему. Это условие можно использовать для доказательства полноты различных ортогональных систем.

§ 5. Линейные операторы и дальнейшее развитие функционального анализа. Теория линейных операторов обобщает задачи на собственные значения и собственные функции механики, алгебры, дифференциальных и интегральных уравнений и их приближенного решения. Теория самосопряженных линейных операторов является основным математическим аппаратом квантовой механики. Даны определение и примеры функционала и непрерывного линейного оператора. Указано, что основные теоремы интегральных уравнений сохраняются для линейного оператора в гильбертовом пространстве при условии, что он переводит единичную сферу в компактное множество. Приведено определение и свойства собственных значений и собственных функций самосопряженного оператора. Из закона сохранения энергии для колебаний системы без диссипации (т. е. без потери энергии) интегральный оператор получается самосопряженным. Отмечено значение операторов с непрерывным спектром. Указано, что Келдыш М. В. доказал полноту системы собственных функций для колебаний с диссипацией. Указаны глубокие связи линейных операторов с квантовой механикой. Так, возможный энергетический уровень электрона в атоме вычисляется как собственное значение, соответствующие состояния электрона являются собственными функциями оператора энергии, а разности собственных значений дают частоты излучаемого атомом света. Упоминается теория возмущений и увеличение роли алгебраических (в частности, теоретико-групповых) методов исследования.

Гл. 20. Группы и другие алгебраические системы. Мальцев А. И.

§ 1. Введение. Алгебра определяется как наука, изучающая действия или правила вычисления. Отмечена тенденция к изучению действий над объектами все более общей природы, что диктуется задачами практики. Изучение свойств симметрии связано с понятием группы. Глава посвящена в основном теории групп и гиперкомплексных систем. Отмечено значение отечественных ученых Федорова Е. С., Шмидта О. Ю. и Понтрягина Л. С. в развитии теории групп.

§ 2. Симметрия и преобразования. Автоморфизмами или допустимыми преобразованиями множества относительно некоторых отношений его элементов называются взаимно однозначные отображения этого множества на себя, сохраняющие данные отношения. После примеров симметрии на плоскости, в пространстве и для многочленов дано общее определение симметрии подмножества относительно некоторого автоморфизма и характеристика свойств симметрии подмножества совокупностью всех автоморфизмов, которые переводят его в себя.

§ 3. Группы преобразований. Дано определение умножения преобразований и обратного преобразования. Доказана ассоциативность и даны примеры некоммутативных преобразований. Выяснен смысл сопряженного преобразования. Отсюда выводится, что преобразование, сопряженное переносу, есть перенос, а повороту — поворот. Дано определение группы преобразований и примеры групп симметрии (включающих зеркальное отражение) и групп вращений правильных многогранников. Изложены основные понятия групп подстановок: симметрическая и знакопеременная группы, разложение в циклы и т. д. Определены подгруппы коммутант и разрешимые группы как группы с конечной цепочкой коммутантов. Даны примеры групп преобразований и подстановок.

§ 4. Фёдоровские группы. Перечисляются все группы симметрии плоскости, сохраняющие на месте точку или прямую, и орнаменты, соответствующие группам симметрии плоскости без неподвижных точек и прямых. Правильной пространственной системой точек называется система, обладающая следующими свойствами: 1) любую точку системы можно перевести в любую другую ее точку посредством движения, совмещающего систему с ней самой; 2) никакой шар конечного радиуса не содержит бесконечного числа точек системы; 3) существует такое положительное число r, что всякий шар радиуса r содержит хотя бы одну точку системы. Задача классификации таких систем была решена Фёдоровым, впервые применившим методы теории групп к вопросам естествознания. Каждая из этих систем связана с некоторой дискретной группой преобразований и классификация их связана с изучением строения кристаллических тел. Дискретные группы, соответствующие правильным точечным системам, называются фёдоровскими или кристаллографическими группами.

§ 5. Группы Галуа. Дано определение группы Галуа уравнения как группы автоморфизмов поля разложения относительно основного поля коэффициентов. Установлено, что группа Галуа уравнения n-й степени с буквенными коэффициентами есть симметрическая группа той же степени. Сформулирована теорема о том, что уравнение тогда и только тогда разрешимо в радикалах, когда группа Галуа его разрешима. Отмечено, что можно построить уравнения с любой заданной группой Галуа, если допускать любые числовые коэффициенты, но эта задача не решена для уравнений с рациональными коэффициентами. Шафаревич И. Р. дал способ построить уравнение с рациональными коэффициентами для любой разрешимой группы.

§ 6. Основные понятия общей теории групп. Даны определения группы, изоморфизма, подгруппы, нормального делителя, фактор-группы, гомоморфизма. Доказано, что группа гомоморфно отображается на свою фактор-группу и что если группа G гомоморфно отображена на группу G', то G' изоморфна фактор-группе G по нормальному делителю элементов, переходящих в единицу (теорема о гомоморфизмах).

§ 7. Непрерывные группы. Группами Ли называются группы, элементы которых непрерывно зависят от конечной системы параметров, а закон умножения выражается дважды дифференцируемыми функциями. Группы преобразований, характеризующие различные направления в геометрии, являются группами Ли. Теория групп Ли имеет ряд приложений в математике, механике и физике. Отмечена роль Киллинга, Картана и советских математиков Морозова В. В., Мальцева А. И., Дынкина Е. Б., Гельфанда И. М., Наймарка Н. А. в развитии групп Ли и основное значение работ Понтрягина Л. С. в теории топологических групп.

§ 8. Фундаментальные группы. Дано определение и примеры фундаментальных групп, понятие о задании группы определяющими соотношениями, о свободной

группе, понятие и основные проблемы теории узлов и результат Новикова П. С. об отсутствии нормального алгорифма для установления изоморфизма двух групп с одной и той же системой образующих и различными определяющими соотношениями.

§ 9. Представления и характеры групп. Определены представления группы как гомоморфные отображения ее в группу неособенных матриц, степени представления, эквивалентные представления, сумма представлений, приводимые и вполне приводимые представления, регулярные представления, характер абелевой группы. Формулируются основные теоремы теории представлений и указывается ее связь с физикой.

§ 10. Общая теория групп. Характеризуется переходом от теории групп преобразований к изучению абстрактных групп. Указано значение монографии Куроша А. Г. (РЖМат, 1955, 3091), являющейся первым и наиболее полным руководством по теории групп.

§ 11. Гиперкомплексные числа. Изложена теория комплексных чисел как пар действительных чисел. Дано определение гиперкомплексных чисел как систем n действительных чисел с операциями сложения и умножения. Гиперкомплексные числа образуют поле лишь в двух случаях: поле действительных и поле комплексных чисел. Изложено определение и основные свойства кватернионов и их связь с векторной алгеброй.

§ 12. Ассоциативные алгебры. Приведено определение алгебры над любым полем, ее ранга, базиса, эквивалентности алгебр, алгебры Ли как алгебры с дополнительными свойствами:

$$\alpha\beta = -\beta\alpha, \quad \alpha(\beta\gamma) + \beta(\gamma\alpha) + \gamma(\alpha\beta) = 0.$$

Определяются представления ассоциативных алгебр как гомоморфные отображения в алгебру матриц. Взаимно однозначные представления называются точными. Определяется регулярное представление и выясняются его свойства. Дано определение идеала, простой алгебры, радикала, полупростой алгебры и формулированы теоремы Молина Ф. Э. и Веддербарна о представлениях простых и полупростых алгебр и о сведении случая алгебры с радикалом к полупростым и нильпотентным алгебрам.

§ 13. Алгебры Ли. Указано, что матрицы с операцией коммутирования: $[A, B] = AB - BA$ образуют алгебру Ли и любая алгебра Ли изоморфна матричной алгебре. Соотношение $U = e^A$ устанавливает соответствие между алгебрами Ли матриц A и группами Ли матриц U. При этом алгебре Ли всех матриц данного порядка соответствует группа Ли неособенных матриц, а алгебре Ли кососимметрических матриц — группа Ли ортогональных матриц. Алгебра Ли кососимметрических матриц третьего порядка изоморфна алгебре Ли векторов пространства относительно сложения и векторного умножения. Группой Ли для этой алгебры будет группа вращений пространства около одной точки. Указано дальнейшее развитие теории алгебр Ли, радикала и понятия полупростоты и представлений алгебр Ли.

§ 14. Кольца. Дан обзор основных направлений теории колец. Приведены определения идеала, факторкольца, теорема о том, что всякое коммутативное кольцо изоморфно фактор-кольцу кольца целочисленных полиномов от нескольких неизвестных, свойства делимости, однозначность разложения на простые множители в кольце главных идеалов, появление теории алгебраических чисел после работ Куммера, алгебраические многообразия в геометрии и их связь с идеалами кольца многочленов. Дано представление о развитии теории некоммутативных колец, на которую переносятся основные понятия алгебр — радикал, полупростота и т. п.

§ 15. Структуры. Определение структуры дано в связи с понятием частично упорядоченного множества. Определены дедекиндовы структуры и даны примеры структур подмножеств, подгрупп и подколец.

§ 16. Общие алгебраические системы. Алгебраической системой называется множество, для элементов которого определены одна или несколько алгебраических операций. Каждая операция нескольким элементам ставит в соответствие один элемент данного множества. На алгебраические системы переносятся некоторые разделы алгебры, например учение о гомоморфизмах, о свободных системах и о радикале. Каждая статья имеет рекомендательный список литературы. В списки включены монографии, учебники для высшей школы и популярные сочинения. В конце тома — именной указатель и перечень глав, входящих в 1-й и 2-й том.

И. В. Проскуряков

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

8369. Бесконечность в древнегреческой математике. Кольман Э., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1956, **10**, 299—337

Переработанная стенограмма доклада автора в Институте истории естествознания и техники АН СССР 19 мая 1955 г. Автор прослеживает возникновение и развитие идеи бесконечности в античной математике и философии, а также различные, связанные с этим споры в историко-математической литературе. К статье приложены выступления по докладу А. П. Юшкевича, И. Н. Веселовского, И. Г. Башмаковой и В. П. Зубова.

Г. Ф. Рыбкин

8370. Эволюция геометрии. Месерв (The evolution of geometry. Meserve Bruce E.), Math. Teacher, 1956, **49**, № 5, 372—382 (англ.)

Популярный исторический очерк. История геометрии делится на следующие десять этапов, являющихся, по мнению автора, основными:

1) измерительная практика древних вавилонян и египтян;

2) изучение греками геометрии как науки, в частности классические построения линейкой и циркулем;

3) систематизация геометрии Евклидом;

4) новые исследования греческих ученых в александрийский период;

5) вклад индусских, арабских и персидских математиков;

6) развитие университетов и книгопечатания в эпоху Возрождения в Европе;

7) введение системы координат и развитие анализа бесконечно малых в XVII веке;

8) приложение алгебры и анализа к геометрии в XVIII веке;

9) установление абстрактных точек зрения, дающих начало различным геометриям в XIX веке;

10) обобщения, арифметизация и аксиоматическое обоснование геометрии за последние 50 лет.

В. Ф. Рогаченко

8371. Кому же все-таки принадлежит определение $\pi = \frac{3927}{1250}$? Каким образом оно получено? Цянь Бао-цун (圓周率 $\frac{3927}{1250}$ 的作者究竟是誰？它是怎樣得來的？ 錢寶琮), Шусюэ тунбао, 1955, № 5, 4—5 (кит.)

К задаче 32 книги I древнейшего трактата «Математика в девяти книгах» в III в. н. э. Лю Хуэем написаны комментарии, в которых содержатся значения $\pi = \frac{157}{60}$ и $\pi = \frac{3927}{1250}$, определенных на основании вычисления площади 192-угольника и 3072-угольника соответственно. Значение $\pi = 3{,}14$ принадлежит также Лю Хуэю. Относительно авторства $\pi = 3{,}1416$ из-за

некоторой неясности текста существуют различные мнения. Иногда вычисление этого значения приписывают Цзу Чун-чжи (V в.). В статье подробно доказывается, что и это значение π также получено Лю Хуэем. Дается гипотеза нахождения этого значения из приближенного равенства: $s \approx s_{192} + \frac{s - s_{12}}{s_{12} - s_6}(s_{192} - s_{96})$, где s_i — площадь правильного i-угольника, вписанного в круг с площадью s. Э. И. Березкина

8372. К истории полной индукции. Фрёйденталь (Zur Geschichte der vollständigen Induktion. Freudenthal Hans), Arch. Internat. histoire sci., 1953, **6**, № 22, 17—37 (нем.)

После статей Вакка (1909—1911) в историко-математической литературе установилось мнение, что принцип полной математической индукции был впервые сформулирован и использован в доказательствах не Паскалем (1623—1662), а Мавролико (1494—1575, Мессина).

Проверяя аргументацию Вакка с помощью обращения к сочинениям Мавролико (представляющим собой библиографическую редкость), Фрейденталь пытается доказать ее необоснованность. Он упрекает Вакка и других историков математики в смешении псевдо-общих (т. е. общих, но проводимых на частном примере) доказательств с доказательствами, основанными на заключении от n к $n+1$ (т. е. на принципе полной индукции). Б. Н. Пятницын

8373. Математические работы Иоганна Гудде (1623—1704), бургомистра Амстердама. Хас (Die mathematischen Arbeiten von Johann Hudde (1628—1704) Bürgermeister von Amsterdam. Haas Karlheinz), Centaurus, 1956, **4**, № 3, 235—284 (нем).

Вслед за краткой биографией дан обзор и изложение содержания всех известных в настоящее время математических работ Гудде.

Как математик Гудде принадлежал к школе Декарта, сложившейся в Голландии благодаря деятельности Ф. Схоутена (Frans van Schooten (1615—1660)). Все математические работы Гудде возникли в течение короткого периода 1654—1663 гг.

Из его математических работ две основные включены в приложения Схоутена к изданию „Геометрия“ Декарта 1659—1661 г. Другие работы опубликованы в „Математических упражнениях“ Схоутена или встречаются в переписке. Но это, по-видимому, лишь часть не сохранившегося в целом его математического наследия.

Важнейшие работы Гудде — алгебраические. Им разрабатывались методы исследования полинома с численными или буквенными коэффициентами (обычно полиномиальными) на приводимость. В частности, он разработал алгоритм для отыскания кратных корней, в котором появляется в скрытом виде производная полинома. Далее он рассмотрел проблему отыскания экстремумов рациональной функции и, применив свой метод двойных корней, дал соответствующее алгоритмическое правило. Предложенный им метод проведения касательных к алгебраическим кривым основан на аналогичных соображениях, и в нем также используется алгоритм дифференцирования.

В геометрических работах Гудде рассматривал: задачу о делении круга, образование поверхности движением переменного конического сечения, проведение касательных и вычисление площади и центра тяжести некоторых кривых, построение корней уравнений 3 и 4 степени с помощью круга и гиперболы. Им решены также некоторые задачи по теории вероятностей (из области азартных игр).

В конце статьи помещены ссылки на недошедшие до нас результаты Гудде, приведены дополнительные примеры на правила и приемы Гудде, приложен список литературы (17 назв.) и даны многочисленные примечания. Б. Л. Лаптев

8374. Некоторые замечания по поводу неопределенных уравнений у Ферма. Реморов П. Н., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-т, 1957, **17**, 143—152

Сопоставляя тексты Ферма, в которых высказывается так называемая Большая теорема в общем виде, а также для случая $n = 4$, с текстами задач Диофанта, автор приходит к следующей остроумной гипотезе. Он считает, что знаменитое утверждение Ферма об открытии им доказательства Большой теоремы до сих пор понимали неправильно. На самом деле Ферма доказал не то, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

при $n > 2$ неразрешимо в целых числах, а то, что оно не может быть униформизировано в рациональных функциях

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Автор приводит свою реконструкцию этого последнего доказательства, в котором использует метод бесконечного спуска.

По мнению автора, Большая теорема так, как она понимается теперь, была высказана и доказана Ферма только для случая $n = 4$.

Референт считает, что при всей своей оригинальности, гипотеза Реморова не подтверждается историко-математическими данными. И. Г. Башмакова

8375. Из истории дифференциального и интегрального исчисления. Фудали (Z historii rachunku różniczkowego i całkowego. Fudali Stanisław), Matematyka, 1956, **9**, № 4, 3—15 (польск.)

Поясняется в современных обозначениях суть метода исчерпывания и излагается решение Архимедом задач о квадратуре сегмента параболы и о вычислении объема эллипсоида вращения, а также его исследование о спиралях.

Имеются краткие указания на роль Демокрита, Евдокса, Гиппократа Хиосского, Антифона, Динострата в исследовании задач инфинитезимального характера. В. Ф. Рогаченко

8376. К отысканию алгебраических кривых с равными длинами дуг в начале XVIII столетия. Гофман (Zur Bestimmung bogengleicher algebraischer Kurven zu Beginn der 18. Jahrhunderts. Hofmann J. E.), Österr. Ingr-Arch., 1956, **10**, № 2—3, 190—195 (нем.)

Задача отыскания алгебраических кривых, имеющих с данной одинаковую длину дуги, была поставлена в письме неизвестного математика к И. Бернулли. Рассмотрены методы образования таких кривых, предложенные И. Бернулли (1702) и Лейбницем (1704), приложившим позднее свой метод к приближенному спрямлению эллипса (1707).

Привлечены переписка и журнальные статьи той эпохи. Б. Л. Лаптев

8377. К истории развития эйлеровской формулы суммирования. Гофман (Zur Entwicklungsgeschichte der Eulerschen Summenformel. Hofmann Jos. E.), Math. Z., 1957, **67**, № 2, 139—146 (нем.)

Рассматриваются ранние работы Л. Эйлера о суммировании бесконечных рядов. Основное внимание уделено эйлеровским методам суммирования числовых рядов, общий член которых t выражен в виде функции его номера $t = t(\nu)$. Наиболее подробно освещены результаты Эйлера о вычислении $s_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} 1/\nu^2$. При этом автор анализирует эйлеровские работы о бесконечных рядах, собранные в 14, 15 и 16 томах первой серии L. Euleri Opera omnia (здесь же содержатся работы Эйлера о непрерывных дробях и бесконечных произведениях). Дополнительно автор использует письмо

Эйлера к Стирлингу от 19. 6. 1736 г., которое до настоящего времени не опубликовано (само письмо, по-видимому, утеряно, но в архивах АН СССР сохранилась копия, которой и пользовался автор реферируемой статьи). Впервые формула суммирования для $s = \sum_{\nu=1}^{n} t(\nu)$, как указывается в статье, появляется в работе Methodus generalis sumandi progressiones (Comm. Petrop., **6** (1732/1733), 1738). Формула дается здесь в виде

$$s = \int t\,dn + at + \beta\frac{dt}{dn} + \gamma\frac{d^2t}{dn^2} + \ldots,$$

где постоянные коэффициенты вычисляются из рекуррентных формул. Вскоре, а именно в работе Methodus universalis serierum convergentium summas quam proxime inveniendi (Comm. Petrop., **8**, (1736), 1741), Эйлер, исходя из рассмотрения рядов с положительными членами, находит для s иное выражение:

$$s = \int_{1}^{n+1} t(\nu)\,d\nu + \frac{t(1)-t(n)}{2} + \frac{t(1)-t(2)}{12} - \frac{t(n+2)-t(n+2)}{12}.$$

Отсюда он получает весьма хорошее приближение частичных сумм гармонического ряда; в частности, полагая $t(\nu) = \frac{1}{n+\nu}$ и беря $n = 999\,999$, Эйлер находит для суммы первых 10 членов правильный результат с точностью до двух единиц в четвертом десятичном знаке. В более поздней работе Inventio summae cuisque serieri ex dato termino generali (Comm Petrop., **8** (1736), 1941) Эйлер обрывает свою формулу суммирования на члене с производной 15-го порядка и получает 20 правильных знаков для s_2. В указанном выше неопубликованном письме к Стирлингу Эйлер приводит формулу суммирования, обрывая ее на члене с производной 17-го порядка, но в последнем члене делает ту же ошибку, как и в работе Methodus universalis series sumandi ulterius promota (Comm. Petrop., **8** (1736), 1741). Свою ошибку Эйлер вскоре замечает и уже во втором письме к Стирлингу от 7. 8. 1738 г. указывает правильное значение. В этом же письме дается выражение s_2 в замкнутой форме. В статье в краткой форме освещаются некоторые результаты современников Эйлера о суммировании бесконечных рядов. Н. И. Симонов

8373. Изучение истории теории вероятностей и статистики. II. Начало исчисления вероятностей. Кендалл (Studies in the history of probability and statistics. II. The beginnings of a probability calculus. Kendall G.), Biometrica, 1956, **43**, № 1, 1—14 (англ.)

Вторая статья по истории теории вероятностей и статистики в журнале Biometrica (РЖМат, 1957, 4993).

Работа содержит малоизвестный фактический материал по истории азартных игр, которые автор неправильно считает единственным определяющим фактором возникновения теории вероятностей. Л. Е. Майстров

8379. Из истории математического музея и обсерватории в Клементине. Эдерер (Z dějin matematického musea a hvězdárny v Klementinu. Ederer Antonín), Svět techn., 1955, **6**, № 4, 243—246 (чешск.)

См. РЖАстр, 1956, 10.

8380. Жизнь и деятельность Б. Больцано. Веселый (Život a dílo B. Bolzana, Veselý František), Mat. škole, 1956, **6**, № 8, 449—464 (чешск.)

Статья написана в связи со 175-летней годовщиной со дня рождения Б. Больцано (1781—1848) и содержит краткие сведения о его жизни и деятельности. В статье, в частности, отмечается, что до сих пор не имеется оригинальной монографии Больцано, достаточно полно использующей источники, значительная часть которых хранится в Пражском национальном музее.

Г. Ф. Рыбкин

8381. Сто лет со дня смерти Н. И. Лобачевского. Павличек (Sto let od smrti N. I. Lobačevského. Pavlíček Jan), Časop. pěstov. mat. 1956, **81**, № 3, 376—385 (чешск.)

На фоне схематически обрисованного развития математики и высшего образования в Западной Европе в начале XIX века дан сжатый, но довольно полный обзор научного творчества Н. И. Лобачевского, его деятельности как ректора и педагога. Проанализирована оценка его идей современниками. Приведен список его работ. Использованы вышедшие тома полного Собрания сочинений Н. И. Лобачевского (I—V, М. — Л., Гостехиздат, 1946—1951), монография В. Ф. Кагана „Лобачевский" (1948) и др. литература. Б. Л. Лаптев

8382. Историко-библиографические заметки. Кавалларо (Note staorico-bibliografiche. Cavallaro Vincenzo G.). Archimede, 1955, **8**, № 4—5, 232—236 (итал.)

В статье дается ряд теорем „Новой геометрии треугольника", которой в прошлом веке много занимались бельгийские математики Лемуан, Нейберг и другие (главным образом в журнале „Mathesis"), а в настоящее время французский любитель математики Тебо (Thébault) в журналах „Archimede" и „Scripta math".

Примечание референта. Первая стадия развития новой геометрии треугольника на русском языке изложена в книге Д. Д. Ефремоза „Новая геометрия треугольника" (1902). В созетское время этой геометрии посвящена книга С. И. Зетеля „Нозая геометрия треугольника", Учпедгиз, 1940. И. Я. Депман

8333. О работах В. Я. Буняковского по теории чисел. Мельников И. Г. Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1957, **17**, 127—140

Наиболее полный из всех имеющихся обзор работ В. Я. Буняковского по теории чисел. В конце приводится библиография. И. Г. Башмакова

8334. Первый чешский учебник геометрии. Куст (První česká učebnice geometrie. Kůst Jiří), Mat. škole, 1956, **6**, № 7, 415—428 (чешск.)

Обзор первого чешского учебника геометрии „Основы землемерия или геометрия" (1822), написанного чешским патриотом, борцом за пробуждение национального самосознания И. В. Седлачеком (1785—1836) — профессором математики и физики Философского института в Пльзене. Кроме указанного учебника, Седлачек написал также „Основы естествознания или физики и математики" (1828). Указывается, что обе книги являются серьезной попыткой создать чешскую физико-математическую терминологию и что „первый чешский учебник геометрии был по тому времени на высоком научном уровне и выдающимся со стороны методической разработки".

Введенную чешскую математическую терминологию автор сопровождает латинской или греческой.

Г. Ф. Рыбкин

8335. К истории создания русского национального учебника по геометрии для средней школы. Чистяков В. Д., Уч. зап. Вятебского гос. пед. ин-та, 1956, вып. 5, 3—22

Рассматривается период с начала IX в. до 1873 года. Отмечаются заслуги Гурьева, Осипозского, Лобачезского, Остроградского и Чебышева в области создания учебника по геометрии для средней школы.

Е. С. Шатунова

8386. Жизнь и научная деятельность Бруно Абданк-Абакановича — изобретателя интегратора. Вой-

цеховский (Życie i działalność naukowa Brunona Abdanka-Abakanowicza wynalazcy integratora. Wojciechowski Kaz F.), Problemy, 1956, **12**, № 12, 889—891 (польск.)

Биографические сведения и краткое изложение деятельности польского математика и инженера Абданк-Абакановича (1852—1900). В 1875—1881 гг. он жил и работал во Львове. Первая модель интегратора (интеграфа), носящего его имя, была создана в 1879 г.

В. Ф. Рогаченко

8387. Ю. В. Сохоцкий. Его жизнь и деятельность (24/I—1842—14/XII—1927). Давидов И. И. В сб.: 15-я научн. конференция Ленингр. инж.-строит. ин-та, Л., 1957, 437—439

Тезисы доклада. Материалы взяты из Государственного исторического архива Ленинградской области.

С. Е. Белозеров

8388. Федериго Энрикес в науке и школе. Кампеделли (Federigo Enriques nella scienza e nella scuola. Campedelli Luigi), Archimede, 1956, **8**, № 3, 9—103 (итал.)

В связи с десятилетием со дня смерти Энрикеса (скончался 14 июня 1946 г.) дан обзор его научного творчества и педагогических трудов.

Основная область его изысканий — это созданная им теория инвариантов алгебраических поверхностей относительно бирациональных преобразований. Энрикесу принадлежит также цикл работ, посвященных принципиальным вопросам истории развития и логической структуры наук. В связи с этими идеями он пришел к построению проективной геометрии, основанному на аксиомах принадлежности, порядка и непрерывности.

Вопросам преподавания посвящен ряд журнальных статей; им также написан учебник элементарной геометрии, издан перевод Евклида (с комментариями), создана в соавторстве с рядом ученых энциклопедия „Примечательные вопросы элементарной математики". В заключение дан сжатый биографический очерк.

Б. Л. Лаптев

8389. Победитель числа π—Фердинанд Линдеман. Депман И. Я., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-т, 1957, **17**, 119—123

Очерк жизни и научной деятельности немецкого математика Фердинанда Линдемана (1852—1939).

И. Г. Башмакова

8390. Альберт Эйнштейн (1879—1955). Шаха (Albert Einstein (1879—1955). Saha Meghnad). Indian J. Meteorol. and Geophys., 1955, **6**, № 4, 281—294 (англ.)

Биография А. Эйнштейна, сопровождаемая сжатым очерком его основных идей и их экспериментальных подтверждений.

Б. Л. Лаптев

8391. Генри Фредерик Бейкер. Ходж (Henry Frederick Baker. Hodge W. V. D.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 1, 112—128 (англ.)

Некролог английского математика Бейкера (1866—1956), длительное время бывшего профессором астрономии и геометрии Кембриджского университета. Приводится обширный список работ Бейкера.

Л. А. Скорняков

См. также: 8399, 8400, 8438 К, 8464, 8623, 8646, 8707 К, 8774, 8775, 8791, 8835, 8856, 8860, 8877, 9024.

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

8392. Построение порядковых чисел. I. Нёймер (Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. I. Neumer Walter), Math. Z., 1953, **58**, № 4, 391—413 (нем.)

Конструктивным образом автор описывает отрезок порядковых чисел, не превосходящих числа $1VII'I'' \ldots$ Цель автора — ввести обозначения для как можно больших порядковых чисел; метод итерации оказывается фундаментальным. Порядковые числа на „двумерной фигуре" строятся из символов 1, +, ( ), V, I, I', I'', II'' и т. д. Числа определяются последовательно. Числа упорядочены по мере определения и сложности; основной результат состоит в том, что таким образом определенные числа вполне упорядочены. Их ряд начинается с $1, 1+1, 1+1+1, \ldots, 1V = \lim\limits_{n} n$, $1V(1+1) = \lim\limits_{n}(1V+n)$, $1V^2 = \lim\limits_{n} 1V_n$, $1V^{1V} = \lim\limits_{n} 1V^n$, $1VI = \lim(1V, 1V^{1V}, 1V^{1V^{1V}}, \ldots)$, $1VII' = \lim(1VI, 1VI^{1VI}, 1VI^{1VI^{1VI}}, \ldots)$, $1VII'I' = \lim(\alpha, \alpha^{\alpha}, \alpha^{\alpha^{\alpha}}, \ldots)$ с $\alpha = 1VII'$ и т. д. Это значит, что $1VI$ равно первому ε-числу ε_0, $\varepsilon_1 = 1(1V)^{\omega}$. Использованы два принципа конструкции: 1. Конструкцию можно начинать только с помощью „вполне регулярных фигур". 2. Начиная с любого порядкового числа, можно далее конструировать таким же образом, как и при конструкции числа α.

G. Kurepa

8393. Построение порядковых чисел. II. Нёймер (Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. II. Neumer Walter), Math. Z., 1954, **59**, № 5, 434—454 (нем.)

Параллельно „конструктивному" алгоритму в реф. 8392 здесь рассматривается „свободный" алгоритм. Пусть для любого порядкового числа α и оператора V $\alpha VI = \lim(\alpha V, \alpha V^{\alpha V}, \alpha V^{\alpha V^{\alpha V}}, \ldots)$, $\alpha VJI' = \lim(\beta, \beta^{\beta}, \beta^{\beta^{\beta}}, \ldots)$, где $\beta = \alpha VJ$. Таким образом, различным фигурам конструктивного алгоритма соответствуют фигуры свободного алгоритма, происходящего из первого, если писать α вместо 1. При этом V — оператор, например, $+1$, $+\omega$, $+\omega$, т. е. $\alpha V = \alpha + 1$, $\alpha V = \alpha + \omega$, $\alpha V = \alpha^{\alpha}$ и т. д. Всегда $\alpha V^{\nu+1} = (\alpha V^{\nu})V$, $\alpha V^{\lambda} = \lim\limits_{\xi<\lambda} \alpha V^{\xi}$, $\alpha V^0 = \alpha$, $\alpha V' = \alpha V$. Монотонность оператора V первой степени определяется так, что если $\alpha < \alpha'$, то $\alpha V \leqslant \alpha' V$; монотонность оператора второй степени J определяется так, что если V, V' — монотонные операторы первой степени и если $\alpha \leqslant \beta$, $V \leqslant V'$, то $\alpha VJ \leqslant \alpha V'J$.

G. Kurepa

8394. Построение порядковых чисел. III. Нёймер (Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. III. Neumer Walter), Math. Z., 1954, **60**, № 1, 1—16 (нем.)

Части I, II см. реф. 8392, 8393.

Автор исследует, в частности, U-алгоритм и W-алгоритм соответственно. V принимает значение $+1$, соответственно $\cdot 2$, т. е. $\alpha U = \alpha + 1$, $\alpha W = \alpha \cdot 2$. Доказывается, что с помощью U и W можно определить тот же самый отрезок порядковых чисел $< \omega_1$. Умножение операторов определяется естественным способом: $\alpha VV' = (\alpha V)V'$.

G. Kurepa

8395. Построение порядковых чисел. IV. Нёймер (Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. IV. Neumer Walter), Math. Z., 1954, **60**, 47—69 (нем.)

Части I—III см. реф. 8392—8394.

Изучается конструктивный алгоритм (реф. 8392) и теория Аккермана (Ackermann W., Math. Z., 1951, **53**, 403—413) порядковых чисел. Пусть A_s — множество „порядковых" чисел; по определению, 1 есть порядковое число; если $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — порядковые числа, тогда $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ — также порядковое число; если $\pi_1, \ldots, \pi_s$ — порядковые числа и если $\pi_1 \geqslant \pi_2 \geqslant \ldots \geqslant \pi_s$, тогда сим-

вол $\pi_1+\pi_2+\ldots+\pi_s$ — порядковое число. Множество A_s упорядочено следующим образом: 1) $1\leqslant a$, 2) $\pi_1+\ldots+\pi_s<\pi_1'+\ldots+\pi_s'$ равносильно лексикографическому упорядочению комплексов $(\pi_1, \ldots, \pi_s)$, $(\pi_1', \ldots, \pi_s')$, 3) $a_i<(a_1, \ldots, a_s)$, 4) если $a_i<(a_1', \ldots, a_s')$, $a_i'<(a_1, \ldots, a_s)$ $(i=1, \ldots, s)$, тогда $(a_1 \ldots a_s)<(a_1', \ldots, a_s')$ равносильно лексикографическому упорядочению этих комплексов. Пусть $\Gamma_s=\sup A_s$, тогда $\Gamma_s=\lim z_1$, где $z_1=(1, 1, \ldots, 1)_s$, $z_{n+1}=(z_n, 1, 1, \ldots, 1)_s$. Предельным числам из A_s автор сопоставляет фундаментальные последовательности. Доказывается, что A_s — упорядоченное множество, подобное отрезку $(1, 1\mathit{VII}^{s-1})$ конструктивного алгоритма. G. Kurepa

8396. Построение порядковых чисел. V. Нёймер (Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. V. Neumer Walter), Math. Z., 1956, **64**, № 4, 435—456 (нем.)

Части I—IV см. реф. 8392—8395.

Конструктивный алгоритм из реф. 8392 продолжается для порядковых чисел $<\Xi$, где $\Xi=\lim\left(1\mathit{VI}_{\alpha_1}, 1\mathit{VI}_{\alpha_{\alpha_1}}, \ldots\right)$, $\alpha=1\mathit{VI}$, $1\mathit{VI}_{1V}=\lim\left(\xi_1, \xi_{\beta_1}, \xi_{\beta_{\beta_1}}\right)$, $\beta=1\mathit{VI}$. Формулируется также принцип III конструкции в связи с минимальностью символов α_i в $\lim(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Развивается алгоритм экспонентов и „супонентов“ и их классификация. G. Kurepa

8397. О формализации математических теорий. Лукасевич (Sur la formalisation des théories mathématiques. Łukasiewicz Jan), Colloques internat. Centre nat. Rech. sci., 1953, **36**, 11—21 (франц.)

A. Символика: $p, q, r, \ldots$ — пропозициональные переменные, $a, b, \ldots$ — числовые переменные; F — „ложь“, так что $F\to F$ — „истина“; δ — одноместная функциональная переменная над областью выражений; P — одноместная предикатная переменная, $=$ — символ тождества, $+, <, \leqslant$ — символы для арифметического сложения, строгого и нестрогого неравенств, 1 — символ для единицы.

B. Логические предпосылки: исчисление предикатов второй ступени. Точнее:

B_1. Исчисление высказываний, построенное с помощью правил подстановки и отделения (modus ponens) при единственной аксиоме:

$$\delta F.\to.\delta(F\to F)\to\delta F.$$

B_2. Правила навешивания кванторов общности и существования (для числовых и предикатных переменных) в первом и втором членах импликации вместе с (неявно заданным) правилом подстановки в P, благодаря чему становится излишней аксиома свертывания.

C. Арифметические предпосылки:

C_1. Арифметические определяющие равенства:

$$\mathrm{DZ1.}\ a=b=_{\mathrm{Df}}\forall P(Pa\to Pb);$$

$$\mathrm{DZ2.}\ a<b=_{\mathrm{Df}}\exists d(d+a=b).$$

C_2. Арифметические аксиомы:

$$\mathrm{AZ1.}\ (a+b)+c=b+(a+c);\qquad \mathrm{AZ2.}\ 1\leqslant a.$$

$$\mathrm{AZ3.}\ \forall a(\forall b(b<a\to Pb)\to Pa))\to Pa.$$

Два замечания по поводу AZ3: 1) Автор называет AZ3 „principe de montée“. В Мюнстере мы называем AZ3 принципом индукции теории упорядоченных множеств, поскольку она присуща не только множеству натуральных чисел, но и любому вполне упорядоченному множеству. 2). В математике принято заменять предпосылку из AZ3 более сильной предпосылкой: $Pn\wedge\ldots$, где n — наименьший элемент, для которого P имеет смысл. В этом отношении автор справедливо рассматривает AZ3 как „новую теорему“. Однако уже давно известно, что можно обойтись более слабой предпосылкой, чем AZ3.

На этой основе доказуемы нерефлексивность, асимметрия и связность (Konnexität) отношения $<$ и, далее, наряду с недостающими еще основными законами сложения, так называемый (в Мюнстере), в отличие от AZ3, принцип индукции теории последовательностей (для последовательностей, имеющих тот же тип, что и натуральный ряд чисел):

$$\mathrm{PZ1}:\forall a(Pa\to Pa+1)\to(P1\to Pa).$$

Автор справедливо замечает, что посылка в PZ1 может быть ослаблена до $\forall a(Pa+1)$ со ссылкой на дедуктивную силу (эффективность) PZ1 с этой ослабленной посылкой. Это тоже известно нам уже давно. Затем еще следует принцип наименьшего числа (PZ2) и выражение, названное автором принципом Ферма, которое получается из AZ3 путем контрапозиции посылок с дополнительной постановкой $\sim Pa$ вместо называющей формы Pz. Поэтому PZ3 в дальнейшем может быть взят в скобки, поскольку обратно AZ3 может быть получен из PZ3 путем этих же процессов. Доказывается эквивалентность AZ3, PZ1 и PZ2 относительно {AZ1, AZ2}. Дополнительные замечания: 1) Автор пользуется своей символикой без скобок, что вызвало некоторые интересные замечания Керри (H. B. Curry). 2) Совершенно новое построение исчисления высказываний над L1 содержится у Лукасевича (J. Łukasiewicz, Proc. Roy. Irish Acad., 1951, **A54**, № 2, 25—35). 3) Все доказательства даны в известной хорошо продуманной манере автора. 4) В L1 пропущена буква b. H. Scholz

Перевод из Zbl. Math., 1954, **50**, № 6—10, 247—248

8398. О расширении арифметических операций. Арчидьяконо (Sulla estensione delle operazioni aritmetiche. Arcidiacono Giuseppe), Collect. math., 1953, **6**, № 1, 91—105 (итал.)

Функцию a^{b_n} двух натуральных переменных a, b (где n — параметр, пробегающий множество целых положительных чисел), рекурсивно определенную формулами

$$a^{b_n}=a-b_1,$$

$$a^{1_n}=a_1,$$

$$a^{(b+1)_{n+1}}=\left(a^{b_{n+1}}\right)^{a_n},$$

автор называет арифметической операцией порядка n (в частности, для $n=1, 2, 3$ это — сложение, умножение и возведение в степень). Для этой операции существует обратная относительно a — извлечение корня n-го порядка и относительно b — нахождение логарифма порядка n. Автор выводит некоторые формулы, связанные с этими операциями. Он подробно рассматривает случай $n=4$, рассматривая предыдущие операции как (многозначные) функции комплексных переменных; в качестве применения он дает сведение решений большого числа трансцендентных уравнений к решению уравнения $x^x=c$. S. Łojasiewicz

8399. Шопенгауэр и математические доказательства. Ростан (Schopenhauer et les démonstrations mathématiques. Rostand François), Rev. histoire sci., 1953, **6**, № 3, 203—230 (франц.)

Математический интуитивизм Шопенгауэра — этап развития интуитивистских теорий математики, которые автор объясняет психологической неудовлетворенностью, выведением геометрических законов из анализа отдельных фигур и медленностью дедуктивного мышления, по сравнению с интуитивным. В. А. Айзенштейн

8400. Основные линии математической мысли. Булиган (Le repérage de la pensée mathématique. Bouligand Georges), Ann. Univ. Paris, 1956, 26, № 3, 309—322 (франц.)

Краткая характеристика гносеологических, онтологических и практических задач математики в связи с историческим развитием ее конкретных проблем.

В. А. Айзенштейн

См. также: 8363, 8372, 8544

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

8401. Некоторые численные расчеты, связанные с проблемой Гольдбаха. Архангельская В. М., Укр. матем. ж., 1957, 9, № 1, 20—29 (рез. англ.)

Доказано И. М. Виноградовым, что всякое нечетное число $n > n_0$, где $n_0 = 10^{10^{10^{17,86}}}$, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел. То же проверено и для чисел $n \leqslant 10^7$ по таблицам простых чисел. Рассматривается вопрос о распределении „виноградовских" чисел, т. е. чисел, обладающих указанным свойством, в промежутке $10^7 \leqslant n \leqslant n_0$. Доказывается теорема: Всякий сегмент $[x,\ x+(\ln x)^{14}]$ содержит по крайней мере одно „виноградовское" число, если $x \geqslant 10^{10^{8,324}}$. Дана без доказательства теорема к бинарной проблеме Гольдбаха: Если справедлива гипотеза Римана для дзета-функции, то, начиная с $x \geqslant 10^{30}$, всякий сегмент $[x,\ x+(\ln x)^{6,065}]$ содержит по крайней мере одно четное число, представимое в виде суммы двух нечетных простых чисел. В. А. Голубев

8402. О представлении 1, 2, . . ., n разностями. Лич (On the representation of 1, 2, ..., n by differences. Leech John), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 122, 160—169 (англ.)

В первой части работы доказывается, что

$$2 \max_{\theta} \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right) =$$

$$= 2{,}434\ldots \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{k^2(n)}{n} \leqslant \frac{17424}{6559} = 2{,}6646\ldots,$$

что улучшает неравенства работы Редеи и Реньи (Матем. сб., 1949, **66**, 385—389). Здесь $k(n)$ означает минимальное значение k, для которого существует последовательность целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (называемая общим разностным базисом отрезка $1, 2, \ldots, n$) такая, что всякое положительное целое число ν $(1 \leqslant \nu \leqslant n)$ можно представить в виде $\nu = a_i - a_j$. Во второй части рассматривается вариант этой проблемы с дополнительным условием $0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_k = n$ (при таком условии базис называется специальным). Минимальное значение числа элементов специального базиса обозначается через $l(n)$. Функция $l(n)$ была рассмотрена Эрдёшем и Галом (Erdös P., Gal I. S., Indagationes math., 1948, **10**, 379—382). (В работе Эрдёша и Гала имеется ошибка в доказательстве, но результаты работы верны. *Прим. реф.*). Автор, сообщая результаты указанной работы, доказывает, что имеют место неравенства

$$2{,}434\ldots \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{l^2(n)}{n} \leqslant 3{,}348\ldots.$$

Дается таблица общих и специальных базисов, содержащая для каждого $k \leqslant 7$ и $l \leqslant 8$ все базисы, для которых n является минимальным. A. Rényi

8403. Некоторое обобщение теории шнирельмановской плотности. Инь Вэнь-Линь (Шнирельман 密率論的一個推廣。 尹文霖), 北京大學學報 (自然科學), Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. pekinensis, 1956, № 4, 401—410 (кит.; рез. англ.)

Пусть в множестве $\sum$ с элементами $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ определены коммутативная и ассоциативная операция „$+$" и обратная к ней операция „$-$" для каждой пары элементов из $\sum$; результаты операции могут и не принадлежать $\sum$; σ_0 — нулевой элемент.

Обозначим

$$\sum(\lambda,\ \mu) = \{\sigma_i - \sigma_\lambda,\ \lambda < i \leqslant \mu\},$$

$$\sum{}'(\lambda,\ \mu) = \{\sigma_\mu - \sigma_i,\ \lambda \leqslant i < \mu\}$$

и $\sum^* = \bigcup\limits_{\lambda<\mu} \sum(\lambda,\ \mu) \cup \{\sigma_0\}$. Если $A \subset \sum^*$, определяем плотности

$$D_\Sigma(A) = \inf_{\lambda<\mu} \frac{N\left\{A \cap \sum(\lambda,\ \mu)\right\}}{\mu - \lambda},$$

$$d_\Sigma(A) = \inf_{\lambda<\mu} \left\{ \frac{N\left\{A \cap \sum(\lambda,\ \mu)\right\}}{\mu-\lambda},\ \frac{N\left\{A \cap \sum{}'(\lambda,\ \mu)\right\}}{\mu-\lambda} \right\},$$

где $N(X)$ — число элементов X.

В случае, когда $\sum$ является последовательностью целых неотрицательных чисел, $\sum^* = \sum$ и $D_\Sigma(A)$ превращается в обычную шнирельмановскую плотность.

Доказываются:

1. $$A \cup \{\sigma_0\} = \sum^*$$

тогда и только тогда, когда $D_\Sigma(A) = 1$.

2. Если A и $B \subset \sum^*$, $\sigma_0 \in A$ и B, $C = A + B$, то $D(C) \geqslant D(A) + D(B) - D(A)\,D(B)$.

3. Если $\sigma_0 \in A$ и $d_\Sigma(A) > 0$, то A будет базисом $\sum^*$.

Строятся примеры, показывающие, что теорему 2 нельзя улучшить, если в качестве $\sum$ брать возрастающие последовательности действительных чисел, в то время как операция „$+$" есть обычная операция сложения или умножения. Б. М. Бредихин

8404. О распределении целых чисел, имеющих некоторые свойства. Деланж (Sur la distribution des entiers ayant certaines propriétés. Delange Hubert), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1956, **73**, № 1, 15—74 (франц.)

Рассматриваются задачи следующего типа: найти выражение, которое при $x \to \infty$ эквивалентно числу целых чисел, обладающих одним или несколькими данными свойствами. Из 43 теорем, доказанных в статье, приведем две.

1. Обозначим через $\Omega(n)$ количество (число) простых множителей n и через $\omega(n)$ количество различных простых множителей. Пусть $q \geqslant 2$ и $r \geqslant 1$ — целые. Тогда число целых чисел $n \leqslant x$, для которых $\omega(n) = q$ и $\Omega(n) = q + r$, при $x \to \infty$ эквивалентно выражению $A_r x\,(\log\log x)^{q-2}/(q-2)!\log x$, где $A_r = \sum 1/p^{1+r}$, p пробегает все простые.

2. Говорят, что множество E простых чисел регулярно и плотности α, если существуют $\alpha \geqslant 0$ и функ-

ция $r(s)$, голоморфная для $\Re s \geqslant 1$, такие, что для $\Re s \geqslant 1$ $\sum'_{p \in E} 1/p^s = \alpha \log(s-1)^{-1} + r(s)$. Если E есть множество простых чисел, регулярное и плотности α, то для целых $q (\geqslant 1)$ и r, число целых чисел $n \leqslant x$, содержащих только простые множители, принадлежащие к E, и для которых $\Omega(n) \equiv r \pmod q$, эквивалентно

$$K_E q^{-1} x/(\log)^{1-\alpha},$$

где K_E — константа.

Доказательства основываются на двух теоремах, касающихся рядов Дирихле $\sum_{n \in A} n^{-s}$, где A — множество положительных целых чисел, и числа $\nu(x)$ целых чисел в A, не превышающих x. Последние две теоремы немедленно следуют из теорем III и IV статьи автора (РЖМат, 1956, 7401). Min Szu-Hoa

8405. Обобщение теоремы Б. С. К. Р. Сомаяюлу о функции Эйлера $\varphi(n)$. Шинцель (Generalisation of a theorem of B. S. K. R. Somayajulu on the Euler's function $\varphi(n)$. Schinzel A.), Ganita, 1954, **5**, № 2, 123—128 (англ.)

Сомаяюлу (1950 г.) доказал, что

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = +\infty, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = 0,$$

где $\varphi(n)$ — число чисел, взаимно простых с n и не превышающих n.

Доказывается теорема: Множество всех чисел $\varphi(n+1)/\varphi(n)$, где $n = 1, 2, \ldots$, плотно в множестве всех действительных положительных чисел. Доказательство основано на теореме В. Серпинского: Множество всех чисел $\varphi(n+1)/\varphi(n)$ плотно в интервале (0,1).

В. А. Голубев

8406. Об арифметических сильно аддитивных функциях. Деланж (Sur les fonctions arithmétiques fortement additives. Delange Hubert), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 10, 1307—1309 (франц.)

Пусть $f(n)$ — вещественная сильно аддитивная арифметическая функция, $A(x) = \sum_{p \leqslant x} f(p)/p$, $B(x) = \{\sum_{p \leqslant x} f^2(p)/p\}^{1/2}$, $\omega(n)$ — число различных, а $\Omega(n)$ — число всех простых делителей натурального n; $G(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{t} \exp(-u^2/2)\, du$, μ_q — q-й момент функции $G(t)$. Обозначим через E_j $(j = 1, \ldots, 5)$ множество всех натуральных n, удовлетворяющих $j = y$ из следующих условий: 1) $n \equiv l \pmod k$; 2) $n \equiv l \pmod k$, $\omega(n) \equiv r \pmod q$; 3) $n \equiv l \pmod k$, $\Omega(n) \equiv r \pmod q$; 4) $n \equiv l \pmod k$, $\omega(n) \equiv r \pmod q$, n и (k, l) свободны от квадратов; 5) $n \equiv l \pmod k$, n и (k, l) не делятся на числа множества A, где A — множество натуральных, попарно взаимно простых чисел таких, что для некоторого $\sigma < 1$ ряд $\sum_{a \in A} a^{-\sigma}$ сходится. Пусть E — любое из E_j, $D(E)$ — плотность E.

В предположении, что функция $f(n)$ обладает свойствами $B(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ и $f(p) = o(B(p))$ для простых $p \to \infty$, доказываются предельные соотношения

$$\left.\begin{aligned} \sum \{(f(n) - A(x))/B(x)\}^q &\to D(E)\,\mu_q, \\ \sum \{(f(n) - A(n))/B(n)\}^q &\to D(E)\,\mu_q \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

при $x \to \infty$ для всякого целого неотрицательного q; здесь первая сумма берется по всем $n \in E$, $n \leqslant x$, а вторая по всем $n \in E$, $n_0 \leqslant n \leqslant x$, где n_0 — наименьшее натуральное n с условием $B(n) > 0$.

Пусть $N(x, t)$ — число натуральных $n \in E$, $n \leqslant x$, для которых $f(n) < A(x) + tB(x)$, и аналогично $N_1(x, t)$ — число n, подчиненных условиям $n \in E$, $n \leqslant x$, $f(n) < A(n) + tB(n)$. Из (1) следует, что при $x \to \infty$

$$N(x, t)/x \to D(E)\,G(t), \quad N_1(x, t)/x \to D(E)\,G(t).$$

Доказательства отсутствуют. Полученные результаты обобщают предыдущие результаты автора и Хальберстама (РЖМат, 1954, 2593; 1956, 144; 1957, 1114). И. П. Кубилюс

8407. О теореме Давенпорта-Гейльбронна. Блейни (On the Davenport-Heilbronn theorem. Blaney Hugh), Monatsh. Math., 1957, **61**, № 1, 1—36 (англ.)

Пусть $\xi = (\sqrt{126} - 11)/2 = 0{,}1124\ldots$, $a, b, c, d, \lambda_0, \mu_0$ — вещественные числа с $|ad - bc| = 1$ и $Q = (ax + by + \lambda_0)(cx + dy + \mu_0)$. Доказывается существование целых чисел x, y, для которых $\xi \leqslant Q \leqslant 1$, причем знак равенства имеет место лишь для форм Q, эквивалентных xy, $y(2x + y + 1)/2$, $y\{2x + (1 + 2\xi)y + 1\}/2$. Даются формы Q, для которых неравенство $0 < Q < 1 - \varepsilon$, соответственно $\xi + \varepsilon < Q < 1$, не имеет решения при $\varepsilon > 0$. Существование решения неравенства $0 \leqslant Q < 1$ впервые доказали Давенпорт и Гейльбронн (Davenport H., Heilbronn H., J. London Math. Soc., 1947, **22**, 53—61). Э. К. Фогелс

8408. Об одной новой диофантовой проблеме. Перрон (Ein neuartiges diophantisches Problem. Perron Oskar), Math. Z., 1957, **67**, № 2, 176—180 (нем.)

Рассматривается вопрос о минимуме функции

$$f(x) = |a - x|\,|b - x|,$$

где a, b — различные вещественные числа, а x пробегает все целые рациональные числа. Полагая $0 < a < 1$, $a < b$, $b - a = c$, автор доказывает, что минимум $f(x)$ меньше единицы при условиях $0 < c \leqslant \sqrt{5}$ либо $\sqrt{5} < c \leqslant \sqrt{8}$, за исключением случаев $a = (3 - \sqrt{5})/2$, $c = \sqrt{5}$; $a = 2 - \sqrt{2}$, $c = \sqrt{8}$, когда минимум равен 1. Автор обращает внимание на то, что числа $\sqrt{5}$ и $\sqrt{8}$ являются также граничными значениями в известных теоремах Гурвица об аппроксимации иррациональных чисел рациональными дробями (Hurwitz A., Math. Ann., 1891, **39**). Сообщается, что задача может быть распространена на случай мнимых квадратичных полей. Приводится (без доказательства) результат для случая поля $K(i)$. Высказывается предположение, что для любых мнимых квадратичных полей соответствие между задачами рассматриваемого типа и аналогами теоремы Гурвица может быть достигнуто надлежащей модификацией функции $f(x)$. В. С. Равин

8409. Покрытие пространства шарами. Барнс (The covering of space by spheres. Barnes E. S.), Canad. J. Math., 1956, **8**, № 2, 293—304 (англ.)

Вводится понятие предельной формы (предельного покрытия) для задачи решеткообразного покрытия n-мерного евклидова пространства шарами. Пусть имеется множество одинаковых (замкнутых) шаров, покрывающих R^n, причем центры шаров образуют решетку; плотностью покрытия будет отношение объема шара к объему основного параллелепипеда решетки. Обозначая наименьшее (при данном n) значение плотности через ϑ_n, имеем

$$\vartheta_n = I_n \min_f \mathfrak{m}(f)/D^{1/2},$$

где I_n — объем единичного шара $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1$, $f = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — положительная квадратичная форма, $D = \det f$,

$$\mathfrak{m}(f) = \max_{\alpha} \min_{x} f(x + \alpha),$$

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — любая точка R^n берется по всем целым точкам $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Форма f называется

предельной, если отношение $m(f)/D^{1/n}$ имеет минимум в точке f. Доказывается, что для $n=3$ существует лишь один класс предельных форм, т. е. что всякая предельная форма эквивалентна форме вида

$$\rho(3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3) \quad (\rho>0).$$

Отсюда получается

$$\vartheta_8=\frac{5\sqrt{5}}{24}\pi.$$

Это значение было ранее найдено Бамба (РЖМат, 1955, 5604). При доказательстве используется приведение тройничной формы по Зеллингу-Вороному и теория трехмерных параллелоэдров Вороного.

Б. А. Венков

8410. О подобных многогранниках. Эрхарт (Sur les polyèdres homothétiques. Ehrhart Eugène), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 2, 157—160 (франц.).

Доказана теорема: Пусть P, P' — два подобных 3-мерных целых многогранника (т. е. с вершинами в целых точках) с коэффициентом подобия $k\gtrless 0$, E — сумма числа целых точек внутри P и половины числа целых точек на границе P, E' — то же для P', V, V' — объемы P, P', тогда $(E'-V')/(E-V)=|k|$.

Б. Б. Венков

8411. Об одном семействе многогранников. Эрхарт (Sur une famille de polyèdres. Ehrhart Eugène), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 4, 434—437 (франц.)

Продолжение работ автора (РЖМат, 1957, 2025, реф. 8410). Решается вопрос о числе целых внутренних точек для целых выпуклых многогранников, каждая грань которых обладает центром симметрии. После векторного переноса, в результате которого поверхность такого многогранника не содержит целых точек, число внутренних целых точек равно объему.

В. С. Равин

8412. О решеткообразном расположении овалов и овалоидов. Эрхарт (Sur l'empilement réticulaire d'ovales ou d'ovoïdes. Ehrhart Eugène), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 5, 550—553 (франц.)

Доказываются простые замечания о наиплотнейшем решеткообразном расположении овалов и 3-мерных выпуклых тел несколько иначе, чем у Минковского (Minkowski, Dichteste Lagerung kongruenter Körper, Götting. Nachr., 1904, p. 311).

Б. Б. Венков

8413. О минимальных точках положительно определенных квадратичных форм. Ранкин (On the minimal points of positive definite quadratic forms. Rankin R. A.), Mathematika, 1956, **3**, № 5, 15—24 (англ.)

Пусть $f(x)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}x_jx_k$ $(a_{jk}=a_{kj})$ — положительно определенная квадратичная форма от n переменных; $\mathbf{x}=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $D=\det A>0$, $A=\|a_{jk}\|$.

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — n последовательных минимумов $f(\mathbf{x})$, достигаемых в n независимых точках $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ с целыми координатами, не равными одновременно нулю, тогда $M_1\leqslant M_2\leqslant\ldots\leqslant M_n$ и $M_1M_2\ldots M_n\leqslant\gamma_n^nD$, γ_n — постоянная Эрмита.

Пусть существует $m\geqslant n$ точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ с целыми координатами таких, что $f(\mathbf{x}_k)=M_{i_k}$, причем $\mathbf{x}_i\neq\pm\mathbf{x}_j$ для $1\leqslant i<j\leqslant m$, i_k — любое из чисел $1, 2, \ldots, n$.

Любая такая система точек $\mathbf{x}_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ называется системой минимальных точек для $f(\mathbf{x})$.

Пусть S_m — данная система минимальных точек для $f(\mathbf{x})$ и $\mathbf{x}_{j_1}, \mathbf{x}_{j_2}, \ldots, \mathbf{x}_{j_n}$ — любые n точек этой системы. Обозначим через $(\mathbf{x}_{j_1}, \mathbf{x}_{j_2}, \ldots, \mathbf{x}_{j_n})$ матрицу, сбразованную этими точками, и через $\Delta(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ — определитель матрицы. Положим $\Delta^*(j_1, j_2, \ldots, j_n)=\Delta(j_1, j_2, \ldots, j_n)\{\prod_{k=1}^{n}M_k^*\}^{-1/2}$, M_k^* — минимум, достигаемый в $\mathbf{x}_{i_k}$ и $F(S_m)=\sum\{\Delta^*(j_1, j_2, \ldots, j_n)\}^2$, где суммирование берется по всем $p=\binom{m}{n}$ возможным комбинациям из n точек системы S_m.

Предполагая, что эти комбинации расположены в определенном порядке, можно записать $F(S_m)=\sum_{\nu=1}^{p}\Delta_\nu^{*2}$. Ставится задача получения верхних границ для $|\Delta_\nu|$ и $F(S_m)$.

Доказываются

Теорема 1. $F(S_m)\leqslant D^{-1}(m/n)^n$ и как следствие

Теорема 2. Если $f(\mathbf{x})$ — совершенная форма минимума M и S_m — система минимальных точек, то

$$\sum_{\nu=1}^{p}\Delta_\nu^2\leqslant\frac{1}{D}\left(\frac{Mm}{n}\right)^n\leqslant\left(\frac{m\gamma_n}{n}\right)^n.$$

Даны некоторые приложения полученных теорем. В частности, доказывается теорема: если $n\geqslant 4$, то существует n точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, в которых совершенная форма $f(\mathbf{x})$ достигает своего минимума, и таких, что

$$0<\Delta^2=\{\det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)\}^2\leqslant\frac{1}{n}\left\{\gamma_n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^n<\frac{e\gamma_n^n}{n}.$$

Э. Е. Симакова

8414. Геометрия циклической p-ичной числовой системы. Суэканэ (巡回 p 進數の幾何學的序說 о 末包良太), 電氣試驗所彙報, Дэнки сикэнсё ихо, Bull. Electrotechn. Lab., 1956, **20**, № 12, 886—892, 945 (японск.; рез. англ.)

Рассматриваются решетки по модулю p, т. е. n-мерные векторные пространства над кольцом вычетов по модулю p, где $p>1$ — целое число. В этих решетках вводится метрика, отношение упорядочения и отношение инцидентности. Указываются некоторые приложения.

З. И. Боревич

8415. Сравнения в алгебраических числовых полях, содержащие суммы подобных степеней. Коэн (Congruences in algebraic number field involving sums of similar powers. Cohen Eckford), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **83**, № 2, 547—556 (англ.)

Пусть F — конечное расширение рационального поля и P — простой идеал из F с нормой $N(P)=p^f$, где p — простое рациональное число. Рассматривается число решений $Q_s(\rho)$ сравнения

$$a_1X_1^m+\ldots+a_sX_s^m+\rho\equiv 0\pmod{P^\lambda}, \qquad (1)$$

где ρ — произвольное целое из F, $\lambda>0$ — целое рациональное, $a_1, \ldots, a_s$ — целые из F, взаимно простые с P; кроме того,

$$(m, p)=1, \quad k=(m, p^f-1)>1. \qquad (2)$$

Доказываются десять теорем, дающие различные выражения для $Q_s(\rho)$ при различных предположениях о сравнении (1). Приведем теорему 10: Если $(a_1a_2a_3, P)=1$ и выполняется (2), то сравнение

$$a_1X_1^m+a_2X_2^m+a_3X_3^m+\rho\equiv 0\pmod{P^\lambda}$$

разрешимо для всех простых идеалов P, для которых

$$N(P)=p^f>(k-1)^2(k-2)^2.$$

П. Н. Реморов

8416. Плотность в семействе абелевых расширений. Кубота (Density in a family of abelian extensions. Kubota Tomio), Proc. Internat. Sympos.

Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 77—91 (англ.)

Пусть Ω — поле алгебраических чисел (конечной степени); A — конечная абелева группа порядка n; $\mathfrak{R}$ — множество всех абелевых расширений поля Ω, группы Галуа которых изоморфны группе A; f_K — ведущий идеал поля $K \in \mathfrak{R}$. Если $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$, то плотностью множества полей $\mathfrak{M}_0$ относительно $\mathfrak{M}$ называется следующий предел (если он существует):

$$\omega(\mathfrak{M}_0; \mathfrak{M}) = \lim_{s \to 1+0} \left(\sum_{K \in \mathfrak{M}_0} \frac{1}{N f_K^s} \right) \Big/ \left(\sum_{K \in \mathfrak{M}} \frac{1}{N f_K^s} \right)$$

(где N обозначает абсолютную норму идеала).

Пусть $\mathfrak{m}$ — целый идеал поля Ω; через $\mathfrak{F}$ обозначим множество тех полей $K \in \mathfrak{R}$, для которых $(f_K, \mathfrak{m}) = 1$. Пусть $\mathfrak{b}$ — идеальный элемент Шевалле поля Ω такой, что $\mathfrak{b}(\mathfrak{r})$ равно единице при $\mathfrak{r} \nmid \mathfrak{m}$, и пусть $\mathfrak{P}$ есть множество тех $K \in \mathfrak{F}$, для которых $(\mathfrak{b}, K/\Omega) = 1$ (символ Шевалле). Тогда плотность $\omega(\mathfrak{P}; \mathfrak{F})$ существует и $\omega(\mathfrak{P}; \mathfrak{F}) \geqslant 1/n$. Пусть $\mathfrak{r}$ — простой идеал поля Ω, $\mathfrak{r} | \mathfrak{m}$, $\mathfrak{r} \nmid 2$; если $\mathfrak{P}_0$ есть множество тех полей $K \in \mathfrak{F}$, для которых $\left(\frac{K/\Omega}{\mathfrak{r}}\right) = 1$ (символ Артина), то $\omega(\mathfrak{P}_0; \mathfrak{F}) = 1/n$.

Пусть Q — конечное множество простых идеалов поля Ω и пусть для каждого $\mathfrak{q} \in Q$ задано целое число $u(\mathfrak{q}) \geqslant 0$. Обозначим через $\mathfrak{L}$ множество полей $K \in \mathfrak{R}$, ведущий идеал которых содержит $\mathfrak{q}$ с показателем $u(\mathfrak{q})$ при всех $\mathfrak{q} \in Q$; тогда плотность $\omega(\mathfrak{L}; \mathfrak{R})$ существует.

Пусть Ω_0 — подполе поля Ω, а $\mathfrak{R}_0$ — множество полей $K \in \mathfrak{R}$, имеющих вид $K = \Omega k$, где k — нормальное расширение поля Ω_0; тогда $\omega(\mathfrak{R}_0; \mathfrak{R}) = 0$. З. И. Боревич

8417. Об одном классе кубических диофантовых уравнений с тремя неизвестными. Кристофферсон (Über eine Klasse von kubischen diophantischen Gleichungen mit drei Unbekannten. Christofferson Stig), Arkiv mat., 1957, **3**, № 4, 355—364 (нем.)

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = C$ — норменное уравнение, т. е. $f(x_1, \ldots, x_n)$ представляет норму целого алгебраического числа n-й степени. Наиболее ясный способ решения в целых числах этого уравнения дает теория алгебраических чисел.

Для простейшего случая $n = 2$ норменное уравнение $x^2 - Dy^2 = C$ можно решать и исследовать, не применяя теорию алгебраических чисел. Современные скандинавские математики продолжают исследование норменного уравнения 2-й степени таким способом. Автор аналогичными методами исследует норменное уравнение для чисто кубического поля, т. е. уравнение

$$u^3 + ab^2v^3 + a^2bw^3 - 3abuvw = C.$$

Кроме результатов, представляющих частные случаи известных теорем теории алгебраических чисел, получены оценки для основного решения в случае $C = 1$ (т. е. основной единицы поля $R(\sqrt[3]{ab^2})$, а также оценки основных решений для $C > 1$. Эти оценки лучше известных оценок, полученных при помощи теории алгебраических чисел. В. Д. Подсыпанин

8418. Проблемы неопределенного анализа с n переменными. Джинатемпо (Problemi di analisi indeterminata in n variabili. Ginatempo Nicola), Atti Soc. pelorit. sci. fis., mat. e natur., 1955, **1**, № 1. 15—25 (итал.)

Иногда удается решение геометрическим способом проблем неопределенного анализа. Это показано при решении в целых числах уравнений:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_0^2; \quad \frac{x_0}{x_1} + \frac{x_0}{x_2} + \ldots + \frac{x_0}{x_n} = \frac{1}{h}$$

и системы уравнений:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_0^2$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \pm x_0.$$

В. А. Голубев

8419. О диофантовом уравнении $\binom{n}{k} = Mx^m$. **Стольт** (Über die diophantische Gleichung $\binom{n}{k} = Mx^m$. Stolt Bengt), Arch. Math., 1956, (1957), **7**, № 6, 446—449 (нем.)

Доказывается, что уравнение

$$\binom{n}{k} = Mx^m,$$

где n, k, M, x, m — натуральные числа такие, что $n \geqslant 2k$, $m > 1$, $M = \prod_{\nu=1}^{r} p_\nu^{a_\nu}$, $p_\nu \leqslant k$, $a_\nu < m$, имеет решение лишь тогда, когда k меньше некоторого $k_{m,M}$, определяемого при помощи m и M. В. А. Голубев

8420. О диофантовом уравнении второй степени. Стольт (On a Diophantine equation of the second degree. Stolt Bengt), Arkiv mat., 1957, **3**, № 4, 381—390 (англ.)

Решение в целых числах уравнения

$$Au^2 + Buv + Cv^2 = \pm N \tag{1}$$

сводится к разыскиванию решений уравнения

$$x^2 - Dy^2 = \pm N, \tag{2}$$

удовлетворяющих некоторым сравнениям.

Автор исследует уравнение (1), не преобразуя его к виду (2). Рассматриваются решения уравнения (1), при которых Au и v — целые числа, и целые решения (u и v — целые числа). Вводится понятие эквивалентных решений, класса решений и основного решения класса аналогично определению этих понятий, употреблявшемуся в других работах автора (РЖМат, 1956, 160). Получены оценки основных решений класса. Доказано, что если класс K содержит целое решение, то и все другие решения этого класса также целые. Метод исследования элементарный. В. Д. Подсыпанин

8421. О некоторых проблемах, приводящихся к идеальной проблеме Эскотта-Тарри или Пруэт-Тарри. Палама (Su taluni problemi che si riducono a quello ideale di Escott-Tarry o di Prouhet-Tarry. Palamà Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 4, 569—577 (итал.)

Идеальной или нормальной проблемой Эскотта-Тарри или Пруэт-Тарри называют отыскание целых решений системы

$$x_{1,1}^k + \ldots + x_{1,n+1}^k = x_{2,1}^k + \ldots + x_{2,n+1}^k = \ldots$$
$$\ldots = x_{m,1}^k + \ldots + x_{m,n+1}^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

при $m = 2$ и при m — любом целом соответственно. Примеры таких решений известны при $m = 2$ и $n \leqslant 9$.

Даются решения проблем: 1) Найти полином, целый относительно x, степени $2n+2$, который при $x = a_{i,j}$ и при $x = -a_{i,j}$ дает одно и то же значение $\pm N_i^2$ ($j = 1, 2, \ldots, n+1$) при $i = 1, 2, \ldots, m$, где $a_{i,j}$, N_i — подходящие целые при произвольном m.

2) Найти полином, целый относительно x, степени $2n+2$, который при $x = a_{i,j}$ и $x = s - a_{i,j}$ ($j = 1, 2, \ldots, n+1$) дает одно и то же значение M_i при $i = 1, 2, \ldots, m$ с целыми $a_{i,j}$, M_i, s и произвольным m. 3) Получить все решения указанных проблем таких, чтобы $\pm N_i^2$ и соответственно M_i были минимальными или максимальными. Даны примеры решений. В. А. Голубев

8422. Проблемы Эскотт-Тарри и Пруэт-Тарри. Палама (I problemi di Escott-Tarry e di Prouhet-Tarry. Palamà Ciuseppe), Illustr. scient., 1957, 9, № 89, 22—24 (итал.)

Научно-популярная статья по теории многостепенных уравнений и их решения в целых числах. Дано много примеров. В. А. Голубев

8423. Несколько теорем о многочленах. Карлиц (Some theorems on polynomials. Carlitz L.), Arkiv mat., 1957, 3, № 4, 351—353 (англ.)

Доказано пять замечаний о многочленах. Например: Пусть полином $F(x) = x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \ldots + a_{2m}$ с рациональными коэффициентами сравним по модулю p с квадратом некоторого многочлена $H(x)$ для бесконечно многих простых модулей p. Тогда $F(x) = H^2(x)$, где $H(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами. В. А. Голубев

8424. Заметка о гауссовых «сингулярных рядах». Карлиц (A note on Gauss' „serierum singularium". Carlitz L.), Portugaliae math., 1956, 15, № 1-2, 9—12 (англ.)

Пусть $(x)_m = (1-a)(1-ax)\ldots(1-ax^{m-1})$, $(x)_0 = 1$ и пусть

$$\begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix} = \frac{(x)_m}{(x)_r (x)_{m-r}}, \quad \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} = 1.$$

Гаусс доказал тождество

$$\sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \begin{bmatrix} 2m \\ r \end{bmatrix} = (1-x)(1-x^3)\ldots(1-x^{2m-1}).$$

Дается иное доказательство этого тождества, основанное на тождестве Эйлера

$$\prod_0^\infty (1-x^m t)^{-1} = \sum_0^\infty t^m/(x)_m.$$

В. А. Голубев

Примечание редактора. В п. 1 следует (x_m) вместо (a_m).

8425. Заметка о методах Ферма разложения на множители. Уэстерн (Note on Fermat's methods of factorisation. Western A. E.), Math. Gaz., 1957, 41, № 335, 56—57 (англ.)

Есть предположение, что Ферма обладал неизвестными нам методами факторизации. Автор опровергает это предположение на примерах и считает, что Ферма пользовался известным нам методом разложения числа на разность двух квадратов и обычным делением данного числа на делители определенного вида, например числа $2^p - 1$ на $2kp + 1$. В. А. Голубев

8426. Тождественные сравнения для полиномов по составным модулям. Хёнке (Identische Kongruenzen für Polynome nach zusammengesetzten Moduln. Hoehnke Hans-Jürgen), Math. Nachr., 1956, 15, № 3, 141—154 (нем.)

Обобщение тождественного сравнения Лагранжа

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1) \equiv x^{p-1} - 1 \pmod p,$$

где p — простое число.

Пусть $\mathfrak{U} = \{u\}$ — подгруппа мультипликативной группы $\mathfrak{G}(m)$ классов вычетов по составному модулю $m = p_1^{M_1} p_2^{M_2} \ldots p_k^{M_k}$; n — натуральное число; $f(x)$ — полином с целыми коэффициентами, y — целочисленная переменная.

Дается тождественное сравнение по mod m для полинома $\prod_{u \bmod p \in \mathfrak{U}} [y + f(u^n)]$ при помощи редукции задачи к модулям $p_i^{M_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Н. В. Гордеев

8427. Заметка о сравнениях Куммера. Карлиц (A note on Kummer's congruences. Carlitz L.), Arch. Math., 1956 (1957), 7, № 6, 441—445 (англ.)

Пусть p — фиксированное простое число и $\{a_m\}$, $\{b_m\}$ — последовательности рациональных чисел, целых по модулю p.

Сравнениями Куммера для $\{a_m\}$ и $\{b_m\}$ будут

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} a_p^{r-s} a_{m+s(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r},$$

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} b_p^{r-s} b_{m+s(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

Положим, что $a_p \equiv b_p \pmod p$. Доказывается при этих условиях справедливость сравнения

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} k^{r-s} c_{m+s(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r}$$

при $m \geqslant r$, некотором k и $c_m = \sum_{s=0}^{m} \binom{r}{s} a_s b_{m-s}$.

В. А. Голубев

8428. Необходимые и достаточные условия для модулей сравнения $\sum_{r=1}^{n-1} r^{n-1} \equiv -1 \pmod n$. Чарнота (Warunki konieczne i dostateczne na moduły w kongruencji $\sum_{r=1}^{n-1} r^{n-1} \equiv -1 \pmod n$. Czarnota A.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, ser. 1, 2, № 1, 172—178 (польск.; рез. русск., англ.)

Доказывается, что

$$\sum_{r=1}^{n-1} r^{n-1} \equiv -1 \pmod n \quad (n > 2), \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда

1) $n = p_1 p_2 \ldots p_s$, где p_i — различные простые числа > 2;

2) $(p_i - 1) \mid (n-1)$ для $i = 1, 2, \ldots, s$;

3) $\sum_{i=1}^{s} n/p_i \equiv 1 \pmod n$.

Нечетные простые числа удовлетворяют этим условиям. Но неизвестно, существуют ли составные числа n, удовлетворяющие (1). Автор доказывает, что не существует ни одного такого числа среди чисел $n < 3234846615$.

Примечание референта: 1. Оценка автора может быть улучшена тем же методом до $n \leqslant 100280245064$. 2. В резюме условие 2 ошибочно заменено на $n = (p_1 - 1)\ldots(p_s - 1)k$. J. Mycielski

8429. Простое доказательство теоремы Вилсона—Лейбница. Джинатемпо (Una semplice dimostrazione del teorema di „Wilson—Leibnitz". Ginatempo Nicola), Atti Soc. pelorit. sci. fis., mat. e natur., 1955, 1, № 1, 13—14 (итал.)

Дано упрощенное, немного отличающееся от известных, доказательство теоремы Вилсона: $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$. В. А. Голубев

8430. О совершенных и кратно-совершенных числах. Эрдёш (On perfect and multiply perfect numbers. Erdös P.), Ann. mat. pura ed appl., 1956, 42, 253—258 (англ.)

Пусть $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n. Если $\sigma(n) = 2n$, то число n называется совершенным, если $\sigma(n) \equiv 0 \pmod n$, то n называется кратно-совершенным. Пусть $P(x)$ — число кратно-совершенных чисел $n \leqslant x$, $P_2(x)$ — число совершенных чисел $n \leqslant x$.

Доказывается, что $P(x) < x^{3/4+\varepsilon}$, где произвольное $\varepsilon > 0$, и $P_2(x) < x^{(1-c)/2}$, где некоторое $c > 0$.

В. А. Голубев

8431. Из прикладной теории чисел. Кон (Some applied number theory. Cohn Harvey), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1956, 4, № 3, 152—167 (англ.)

В популярной форме излагается связь некоторых задач теории чисел с теорией теплопроводности и небесной механикой. Излагаются элементы теории квадратичных вычетов и дается понятие о гауссовых суммах и законе взаимности. Напоминается вывод Коши квадратичного закона взаимности из соотношения

$$\alpha^{1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-n^2\alpha)=\beta^{1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-n^2\beta),$$
$$\operatorname{Re}\alpha>0,\quad \alpha\beta=\pi^2.$$

Приводится вывод Пуассона (Poisson, J. École Polytech., 1823, 12), для этого соотношения из теории теплопроводности тонкого стержня ($\partial^2u/\partial\xi^2=4\partial u/\partial t$, $t\geqslant 0$). Далее теория диофантовых приближений и равнораспределения связывается с теорией «среднего движения» планет с плоскими возмущенными орбитами, описываемыми плоским вектором: $z(t)=R(t)\exp(i\Phi(t))=\sum_{k=1}^{N}a_k\exp(i(\alpha_k t+\beta_k))$. В простейших случаях выводится существование и значение «среднего движения»: $\lim_{T\to\infty}\Phi(T)/T$. Ю. В. Линник

См. также: 8374, 8383, 8434, 8872.

АЛГЕБРА

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

8432. Частичное решение одной задачи К. Заранкевича. Чулик (Teilweise Lösung eines verallgemeinerten Problems von K. Zarankiewicz. Čulík K.), Ann. polon. math., 1956, **3**, № 1, 165—168 (нем.)

Статья посвящена задаче Заранкевича (РЖМат, 1957, 4602). Доказано, что если $m\geqslant(j-1)\binom{n}{l}$, то $Z_0=(i-1)m+(j-1)\binom{n}{l}+1$. С. Д. Берман

8433. Перестановочные унимодулярные матрицы порядка 2. Гольдберг (Unimodular matrices of order 2 that commute. Goldberg Karl), J. Wash. Acad. Sci., 1956, **46**, № 11, 337—338 (англ.)

Доказано, что целочисленные унимодулярные матрицы A и B порядка 2 перестановочны тогда и только тогда, когда они с точностью до знака являются степенями некоторой целочисленной унимодулярной матрицы. Доказательство основано на простых соображениях из теории матриц и из теории единиц квадратичных полей. Из этого утверждения следует, что каждая абелева подгруппа модулярной группы циклическая.
И. И. Пятецкий-Шапиро

8434. Перестановочные билинейные преобразования и матрицы. Таусски, Тодд (Commuting bilinear transformations and matrices. Taussky Olga, Todd John), J. Wash. Acad. Sci., 1956, **46**, № 12, 373—375 (англ.)

Доказывается теорема, опубликованная ранее Гольдбергом (реф. 8433) и даны некоторые ее обобщения. Например, доказана следующая теорема.

Пусть F — комплексное квадратичное поле, A и B — квадратные матрицы 2-го порядка, элементы которых суть целые числа поля F. Пусть: 1) ни одна из матриц A и B не подобна матрице вида $\zeta\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, где ζ — корень из единицы, лежащий в F, 2) собственные значения A и B не лежат в поле корней из единицы 8 или 12 степеней.

При этих условиях A и B перестановочны тогда и только тогда, когда они являются степенями какой-нибудь матрицы в F. И. И. Пятецкий-Шапиро

8435. Об одном матричном неравенстве. Керубино (Su una disuguaglianza in matrici. Cherubino Salvatore), Boll. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 2, 126—132 (итал.)

Изучаются условия, при которых неравенство $xA>0$ (или $xA\geqslant 0$) имеет место для действительной матрицы A при $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)>0$ и указывается способ определения соответствующего вектора x.

Коэффициенты матрицы A могут быть как постоянными, так и ограниченными функциями переменного t; в частности, рассматривается случай экспоненциальной матрицы e^{At} при $t>0$. Э. Апарисио

8436. Новая нормальная форма квазиабелевых матриц. Бенедикти (Una nuova forma normale per le matrici quasi abeliane. Benedicti Mario), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fis., mat. e natur., 1955, **18**, № 6, 602—608 (итал.)

Предлагается новая нормальная форма квазиабелевых матриц, отличная от обычной (нормальная форма Севери, РЖМат, 1956, 7117) тем, что матрица $\Omega^{(p,p)}$ заменяется матрицей

$$X^{(p,p)}=\begin{Vmatrix}0^{(r,r)}; & g^{(r,p-r)}\\ g'; & F^{(p-r,p-r)}\end{Vmatrix}$$

(где F — симметричная матрица), подчиненной условию: существует такая матрица Ω_{11}, что

$$\begin{Vmatrix}\Omega_{11}, & g+\Omega_{11}\psi\\ (g+\Omega_{11}\psi)'; & F+\psi'\Omega_{11}\psi\end{Vmatrix}$$

симметрична и имеет положительную мнимую часть. Устанавливаются некоторые свойства таких матриц.

При выводе этой формы в тексте досадная ошибка: кроме $\gamma_{14}=-\Omega_{11}$ нужно положить также $\gamma_{24}=-\psi'\Omega_{11}$.
В. В. Морозов

8437. Об одном уравнении теории колебаний. Керубино (Su un'equazione della teoria delle vibrazioni. Cherubino Salvatore), Boll. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 2, 133—136 (итал.)

Рассматривается уравнение $\det[Az+B]=0$, где A, B — эрмитовы матрицы степени n, причем A положительно определенная. Это уравнение приводится к виду $\det[Dz_1+D_1]=0$, где D, D_1 — действительные диагональные матрицы. Корни (обязательно действительные) уравнения $\det[Az+B]=0$ равны величинам $\lambda_s=-\gamma_s/\alpha_s$ ($s=1, \ldots, h$), где α_s — корни характеристического уравнения матрицы A, а γ_s — главные элементы матрицы D_1. Получены также верхние и нижние границы для λ_s. В. К. Туркин

8438 К. Основы линейной алгебры. Мальцев А. И. 2-е изд., М., Гостехиздат, 1956, 340 стр.

2-е издание значительно переработано по сравнению с 1-м и более приспособлено в качестве учебного пособия для механико-математических и физических факультетов университетов и педагогических институтов.

Сокращению подвергся материал по теории преобразований унитарных пространств. Относящиеся к этому материалу результаты включены в разделы задач и упражнений. Далее, геометрическая теория элементарных делителей заменена аналитической (на основе тео-

рии эквивалентности полиномиальных матриц). В одну главу собрано все, относящееся к квадратичным и билинейным формам. Наконец, книга дополнена интересной главой, содержащей тензорную алгебру, алгебру внешних квадратичных форм и сведения по теории инвариантов.

Как и в первом издании, мало уделяется внимания прикладным методам линейной алгебры и, вообще, приложениям.

Книга содержит следующие главы: I. Матрицы. II. Линейные пространства. III. Линейные преобразования. IV. Многочленные матрицы. V. Унитарные и евклидовы пространства. VI. Квадратичные и билинейные формы. VII. Линейные преобразования билинейно-метрических пространств. VIII. Полилинейные функции. Тензоры.

В конце книги даны небольшие литературные указания. Как и в 1-м издании, изложение материала систематическое, ясное и безукоризненно корректное.

Ф. Р. Гантмахер

ГРУППЫ

8439. Подстановки с упорядоченными циклами и разбиения. Сад (Sur les substitutions dont les cycles sont ordonnés et sur les partitions. Sade Albert), Ann. Fac. sci. Marseille, 1955, **24**, 67—81 (франц.)

Любую подстановку α чисел $1, \ldots, n$ можно записать в виде произведения взаимно простых циклов $\alpha = C_1, \ldots, C_k$, где каждый цикл C_i начинается наименьшим элементом и первые элементы циклов расположены в порядке возрастания.

В работе получены различные соотношения и тождества для функций $R(n, p)$, $g(n, k, c)$, $F(n, k)$, где $R(n, p)$ — число подстановок α с p циклами, $g(n, k, c)$ — число подстановок, k-й цикл которых имеет длину c, $F(n, k)$ — число подстановок α, k-й цикл которых содержит элемент n. Рассмотрены приложения к теории разбиений натуральных чисел. С. Д. Берман

8440. Заметка о работе Фрейма и Робинсона. Осима (Note on a paper by J. S. Frame and G. de B. Robinson. Osima Masaru), Math. J. Okayama Univ., 1956, **6**, № 1, 77—79 (англ.)

Даны новые доказательства двух теорем о числе p-регулярных диаграмм, полученных ранее Фреймом и Робинсоном (РЖМат, 1955, 99; 1956, 1989).

В. К. Туркин

8441. Кампанологические группы. Флетчер (Campanological groups. Fletcher T. J.), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 9, 619—626 (англ.)

Отмечается, что задача подбора колоколов сводится к следующей математической задаче: Найти такие всевозможные последовательности подстановок $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ чисел $1, \ldots, n$, что $\alpha_i \ldots \alpha_1 \neq 1$, если $1 \leqslant i < k$; $\alpha_k \ldots \alpha_1 = 1$; в каждой паре (α_i, α_{i+1}) существует не более одной подстановки, оставляющей на месте любой элемент t $(1 \leqslant t \leqslant n)$; если $\alpha_{i+1} \ldots \alpha_1(t) \neq \alpha_i \ldots \alpha_1(t)$, то $\alpha_{i+1} \ldots \alpha_1(t) = \alpha_i \ldots \alpha_1(t+1)$ или $\alpha_{i+1} \ldots \alpha_1(t) = \alpha_i \ldots \alpha_1(t-1)$. Показано, что эту задачу удобно изучать методами теории групп. Рассмотрены примеры. С. Д. Берман

8442. Одна теорема из теории конечных групп. Кнаповский (Twierdzenie z teorii grup skónczonych. Knapowski S.), Roczn. Polsk. towarz mat., 1956, ser. 1. **2**, № 1, 165—166 (польск.; рез. русск., англ.)

Пусть S_n — симметрическая группа степени n. Основываясь на теории Галуа, автор доказывает следующую теорему: Если натуральные числа m и $n \geqslant 2$ удовлетворяют одному из следующих условий: 1) число n не делит числа m и каждый простой делитель числа m больше $n/2$; 2) $m = p^k$ (p — простое) и p не делит числа n, и если существует группа $G \subset S_n$ порядка m, то существует и группа $\Gamma \subset S_{n-1}$, изоморфная группе G.

J. Mycielski

8443. Плетизм и прямое произведение S-функций. Литлвуд (Plethysm and the inner product of S-functions. Littlewood D. E.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 1, 18—22 (англ.)

На основании результатов своих предыдущих заметок (РЖМат, 1956, 8599; 1957, 4626) автор изучает расложение произведения $(\{\lambda\} \otimes \{\mu\}) \bigcirc \{\nu\}$, где (λ), (μ) — разбиения числа n; (ν) — разбиение числа mn; $\{\lambda\}$ — S-функция; $\{\lambda\} \otimes \{\mu\}$ — плетизм S-функций (Littlewood D. E., The theory of group characters. Oxford 1950), $\{\ \} \bigcirc \{\ \}$ — прямое произведение S-функций.

С. Д. Берман

8444. Обобщение β-инварианты. Финкелстейн (Generalized beta invariants. Finkelstein R. J.), Nuovo cimento, 1955, **1**, № 6, 1104—1112 (англ.)

См. РЖФиз, 1956, 19066.

8445. О представлениях обобщенной симметрической группы. II. Осима (On the representations of the generalized symmetric group. II. Osima Masaru), Math. J. Okayama Univ., 1956, **6**, № 1, 81—97 (англ.)

Исследуются неприводимые представления обобщенных симметрических групп $S(n, m)$, введенных автором в предыдущей статье того же наименования (РЖМат, 1956, 1985). Выведены необходимые и достаточные условия принадлежности двух неприводимых представлений группы $S(n, m)$ к одному и тому же блоку (относительно простого числа p) и определены дефектные группы блоков. Получены формулы для числа неприводимых представлений (обычных и модулярных) группы $S(n, m)$. В. К. Туркин

8446. Конечные подгруппы тел. Амицур (Finite subgroups of division rings. Amitsur S. A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **80**, № 2, 361—385 (англ.)

Определяются конечные группы, которые могут быть вложены в мультипликативную группу элементов (отличных от 0) тела. Доказывается, что подобного рода вложение может быть осуществлено для тех и только тех групп, которые принадлежат к одному из следующих пяти типов: 1) циклические группы; 2) нециклические группы $G_{m,r}$, заданные соотношениями $A^m = 1$, $B^n = A^t$, $BAB^{-1} = A^r$; здесь m, r — взаимно простые натуральные числа, $s = (r-1, m)$, $t = m/s$, n — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию $r^n \equiv 1 \pmod m$; 3) группа $\mathfrak{T}^* \times G_{m,r}$, где $\mathfrak{T}^*$ — бинарная тетраэдральная группа порядка 24, заданная соотношениями

$$P^4 = 1, \quad P^2 = Q^2, \quad PQP^{-1} = Q^{-1},$$

$$RPR^{-1} = Q, \quad RQR^{-1} = PQ, \quad R^3 = 1;$$

группа $G_{m,r}$ должна быть или циклической порядка m или нециклической предыдущего типа, причем и в том и в другом случае для любого простого p, делящего m, наименьшее натуральное число γ_p, удовлетворяющее условию $2^{\gamma_p} \equiv 1 \pmod p$, должно быть нечетным; 4) бинарная октаэдрическая группа $\mathfrak{O}^*$; центр этой группы имеет порядок 2, причем фактор-группа по центру изоморфна группе октаэдра; 5) бинарная икосаэдрическая группа $\mathfrak{J}^*$; центр ее имеет порядок 2, а фактор-группа по центру изоморфна группе икосаэдра. В. К. Туркин

8447. Одна характеристика сервантных подгрупп абелевых групп. Лептин (Eine Kennzeichnung der reinen Untergruppen abelscher Gruppen. Leptin Horst), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, **7**, № 2, 169—171 (нем.; рез. русск.)

Доказывается теорема: Замкнутая подгруппа $\mathfrak{H}$ компактной абелевой топологической группы $\mathfrak{G}$ сервантна

$\mathfrak{H}$ $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H}$ является алгебраическим прямым слагаемым группы $\mathfrak{S}$, рассматриваемой как абстрактная (дискретная) группа.

Из этой теории следует, что подгруппа H абелевой группы G сервантна в G тогда и только тогда, когда в группе характеров группы G аннулятор подгруппы H является прямым слагаемым. Л. Я. Куликов

8448. Критерий изоморфизма вполне разложимых абелевых групп. Грот (An isomorphism criterion for completely decomposable abelian groups. Groot J. de), Math. Ann., 1956, **132**, № 4, 328—332 (англ.)

Абелева группа, всякое конечное подмножество которой порождает циклическую подгруппу, называется группой первого ранга. Прямая сумма групп первого ранга называется вполне разложимой группой. Доказывается, что вполне разложимые группы G и H изоморфны, если G изоморфна сервантной подгруппе группы H и H изоморфна сервантной подгруппе группы G. Л. Я. Куликов

8449. О конечных фактор-группах абелевых групп конечного рационального ранга. Абхьянкар (On the finite factor groups of abelian groups of finite rational rank. Abhyankar Shreeram), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 1, 190—192 (англ.)

Доказывается теорема: Если A есть абелева группа без кручения конечного рационального ранга n и B — ее собственная подгруппа конечного индекса, то фактор-группа A/B является прямой суммой m циклических групп с $m \leqq n$. Л. Я. Куликов

8450. О группах, у которых все циклические подгруппы характеристические. Розати (Sui gruppi ogni sottogruppo ciclico del quali è caratteristico. Rosati Luigi Antonio), Boll. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 4, 544—552 (итал.)

Группа называется обладающей свойством P, если всякая ее циклическая подгруппа является характеристической. Доказывается, что такая группа обязательно абелева. Указан ряд частных случаев, когда группа, обладающая свойством P, оказывается абелевой группой того или иного типа (например, циклической). Дан ряд примеров групп как обладающих, так и не обладающих свойством P. В. К. Туркин

8451. О некоторых свойствах групповых колец над полем рациональных чисел. Берман С. Д., Науч. зап. Ужгородск. ун-та, 1955, **12**, 88—110

Исследуется вопрос о том, определяется ли группа однозначно с точностью до изоморфизма заданием ее группового кольца над полем рациональных чисел; для случая конечной абелевой группы соответствующая теорема единственности была доказана Перлисом и Уокером (Perlis S., Walker G. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **68**). Доказывается справедливость теоремы единственности также для бесконечных абелевых групп с конечным числом образующих и для конечных групп вида $M \times \Gamma_i$, $i = 1, 2$, где M — произвольная заданная группа, а Γ_i — абелевы (ко второму из этих типов относятся, в частности, гамильтоновы группы). Доказывается, что для неабелевых групп порядка p^3 $(p \neq 2)$ теорема единственности, вообще говоря, не верна. В. К. Туркин

8452. Замечания о верхних центральных рядах в группе. Мак-Лейн (Remarks on the upper central series of a group. McLain D. H.), Proc. Glasgow Math. Assoc. 1956, **3**, № 1, 38—44 (англ.)

Элемент группы, имеющий конечное число сопряженных, называется FC-элементом. Верхним FC-рядом в группе $\mathfrak{G}$ называется такой возрастающий ряд характеристических подгрупп

$$1 = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_\alpha \subseteq \ldots,$$

где $F_{\alpha+1}/F_\alpha$ есть множество всех FC-элементов из $\mathfrak{G}/F_\alpha$. Если $F_\alpha = F_{\alpha+1} = \ldots$, то $F_\alpha = F$ называется гипер-FC-подгруппой в $\mathfrak{G}$ (это аналог гиперцентра, который обозначается через H).

Доказаны следующие утверждения:

1. Если центр Z_1 в $\mathfrak{G}$ является группой без кручения, то $F_\alpha \cap H = Z_\alpha$ для всех α (Z_α — α-й гиперцентр). Если в локально нильпотентной группе $\mathfrak{G}$ центр является группой без кручения, то для всех α в $\mathfrak{G}$ имеет место равенство $F_\alpha = Z_\alpha$.

2. Следующие свойства гипер-FC-подгруппы F из $\mathfrak{G}$ эквивалентны: а) F удовлетворяет условию максимальности для нормальных делителей из $\mathfrak{G}$; б) F удовлетворяет условию максимальности для подгрупп; в) F имеет конечное число образующих; г) F — конечное расширение нильпотентной группы с конечным числом образующих.

3. Если $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию минимальности для нормальных делителей, то H и F удовлетворяют условию минимальности для своих подгрупп. Б. И. Плоткин

8453. Теоремы Рейдемейстера — Шрейера и Куроша о подгруппах. Уэйр (The Reidemeister — Schreier and Kuroš subgroup theorems. Weir A. J.), Mathematika, 1956, **3**, № 5, 47—55 (англ.)

Доказывается теорема, дающая некоторый способ задания подгрупп свободной группы образующими и определяющими соотношениями. Из этой теоремы выводятся как теорема Нильсена — Шрейера о том, что подгруппа свободной группы сама свободна, так и теорема Рейдемейстера — Шрейдера о задании определяющими соотношениями подгрупп любой группы, заданной определяющими соотношениями. Основным в работе является обобщение указанной теоремы, дающее один способ задания образующими и определяющими соотношениями для подгрупп любого свободного произведения свободных групп. Из этого результата выводится теорема о подгруппах свободного произведения произвольных групп, доказанная референтом. А. Г. Курош

8454. О некоторых условиях факторизуемости периодических групп. Казачков Б. В., Уч. зап. Томск. гос. пед. ин-та, 1956, **15**, 452—457

В работе периодическая группа $\mathfrak{G}$ называется сильно π-факторизуемой (π — некоторое подмножество множества τ простых делителей порядков всех элементов группы $\mathfrak{G}$), если любые ее силовская π-подгруппа и силовская $(\tau - \pi)$-подгруппа взаимно дополняемы, т. е. в произведении дают всю группу $\mathfrak{G}$. Если группа $\mathfrak{G}$ сильно π-факторизуема при каждом $\pi \subset \tau$, то она называется сильно факторизуемой. Примером сильно факторизуемой группы может служить любая конечная разрешимая группа.

Даются некоторые условия, при которых бесконечная периодическая разрешимая группа будет сильно факторизуемой. В основу этих условий положено следующее доказанное в ней предложение.

Если силовские π- и $(\tau - \pi)$-подгруппы в любой подгруппе периодической разрешимой группы сопряжены, то она сильно π-факторизуема.

Отсюда вытекает, в частности, что если для каждого $\pi \subset \tau$ силовские π- и $(\tau - \pi)$-подгруппы в любой подгруппе разрешимой периодической группы $\mathfrak{G}$ сопряжены, то последняя сильно факторизуема. В качестве примера таких групп рассматриваются разрешимые группы с условием минимальности для подгрупп. С. Н. Черников

8455. Суммы нормальных эндоморфизмов. Херема (Sums of normal endomorphisms. Heerema Nickolas), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **84**, № 1 137—143 (англ.)

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа, η_1 и η_2 — ее эндоморфизмы. Кроме операции произведения эндоморфизмов, можно рассматривать сумму эндоморфизмов $\eta_1 + \eta_2$, как оператор

в $\mathfrak{G}$, определяемый следующим образом: $(\eta_1+\eta_2)(x)=\eta_1(x)\cdot\eta_2(x)$.

Если группа $\mathfrak{G}$ абелева, то сумма эндоморфизмов снова является эндоморфизмом и относительно сложения эндоморфизмы перестановочны. В общем случае ни то, ни другое не выполняется. Если же η_1 и η_2 — нормальные эндоморфизмы, то хотя их сумма не обязана быть эндоморфизмом, однако сложение оказывается коммутативным.

Через E обозначается множество всех нормальных эндоморфизмов группы $\mathfrak{G}$. В работе рассматриваются некоторые операции, не выводящие из E. Так, например, если η_1 — нормальный автоморфизм и $\eta_2\in E$, то $\eta_1-\eta_2\in E$. Здесь $-\eta(x)=\eta(x)^{-1}$. Если оба η_1 и η_2 — нормальные автоморфизмы, то $\eta_1-\eta_2$ отображает всю группу в ее центр. Если η_1 и η_2 — нормальные нильпотентные эндоморфизмы, то $\eta_1-\eta_2\in E$, и этот эндоморфизм отображает всю группу в ее центр. В доказательствах используются следующие свойства: 1) Если $z\in\mathfrak{G}'$, где $\mathfrak{G}'$ — коммутант группы $\mathfrak{G}$, то $\eta^2(z)=\eta(z)$ для любого нормального эндоморфизма. 2) Если $\eta(\mathfrak{G}')=\mathfrak{G}'$ и η — нормальный эндоморфизм, то или $\mathfrak{G}$ обладает нетривиальным абелевым прямым множителем, или η — автоморфизм. 3) Если $\eta(\mathfrak{G}')=e$, то или $\mathfrak{G}$ обладает нетривиальным абелевым прямым множителем, или η — нильпотентный эндоморфизм.

Имеются некоторые другие соотношения для случая, когда группа $\mathfrak{G}$ не обладает абелевым прямым множителем.

Доказывается также, что множество E порождает кольцо операторов K_G, и указываются некоторые условия, при которых оператор группы является суммой нормальных эндоморфизмов. Б. И. Плоткин

8456. Коммутативное продолжение частичных автоморфизмов групп. Чехата (Commutative extension of partial automorphisms of groups. Chehata C. G.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1955, 1, № 4, 170—181 (англ.)

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа, A и B — ее изоморфные подгруппы и μ — изоморфизм, отображающий A на B. Отображение μ — называется частичным автоморфизмом группы $\mathfrak{G}$. Частичный автоморфизм μ^* называется продолжением частичного автоморфизма μ, если отображение μ^*, в частности, определено для всех тех элементов, для которых определено отображение μ, и совпадает с последним в области его определения.

В работе исследуются достаточные условия, при которых два частичных автоморфизма группы могут быть продолжены до перестановочных автоморфизмов некоторой подгруппы.

Теорема. Пусть $\mathfrak{G}$ — группа и μ и ν — ее частичные автоморфизмы, причем μ отображает подгруппу A на подгруппу B и ν — подгруппу C на подгруппу D. Пусть еще выполняются следующие условия:

$$(A\cap C)\mu=B\cap C;\quad (A\cap D)\mu=B\cap D;$$
$$(A\cap C)\nu=A\cap D;\quad (B\cap C)\nu=B\cap D$$

и $g\mu\nu=g\nu\mu$, если $g\mu$, $g\nu$, $(g\mu)\nu$ и $(g\nu)\mu$ определены. Тогда существуют группа $\mathfrak{G}^*\supset\mathfrak{G}$ и два ее перестановочных внутренних автоморфизма s и t, являющихся продолжением μ и ν соответственно.

Отмеченные условия, кроме последнего, не являются необходимыми для существования соответствующих продолжений. Построение группы $\mathfrak{G}^*$ проводится с помощью теории свободных произведений с объединенной подгруппой. Б. И. Плоткин

8457. Конечные расширения упорядоченных групп. Нёйман, Шепперд (Finite extensions of fully ordered groups. Neumann B. H., Shepperd J. A. H.), Proc. Roy. Soc., 1957, A239, № 1218, 320—327 (англ.)

Пусть упорядоченная группа H является нормальным делителем группы G без кручения и внутренние автоморфизмы группы G индуцируют в H автоморфизмы, сохраняющие упорядочение. Доказано, что если факторгруппа G/H является локально конечной, то группа G может быть единственным способом упорядочена таким образом, что отношение упорядочения между элементами из H при этом сохраняется.

Назовем частично упорядоченную группу почти упорядоченной, если множество ее элементов, не сравнимых с единицей, конечно. Доказано, что если при тех же условиях предположить конечность фактор-группы G/H, не требуя, чтобы группа G была группой без кручения, то отношение упорядочения в H может быть расширено до отношения почти упорядочения в G.

А. А. Виноградов

8458. Дискретные подгруппы разрешимых групп Ли. I. Ван Сянь-чжун (Discrete subgroups of solvable Lie groups. I. Wang Hsien-Chung), Ann. Math., 1956, 64, № 1, 1—19 (англ.)

Топологическая группа L называется σ-группой, если она изоморфна расширению нильпотентной группы Ли без кручения, фактор-группа которой по компоненте единицы имеет конечное число образующих, с помощью дискретной абелевой группы H с конечным числом образующих. Если H—группа без кручения, то L называется σ-группой строго без кручения.

Основные результаты следующие:

а) Любая σ-группа L может быть вложена в связную разрешимую вещественную линейную группу Ли G. Если L строго без кручения, то G может быть выбрана односвязной.

б) Дискретная группа может быть вложена в связную односвязную разрешимую группу Ли тогда и только тогда, когда она строго без кручения σ-группа.

в) для любой σ-группы L существует односвязная разрешимая линейная группа Ли с конечным числом связных компонент, содержащая L в качестве замкнутой равномерной (в смысле А. И. Мальцева) подгруппы. Имеются некоторые другие результаты, в частности относительно автоморфизмов нильпотентных групп.

Б. И. Плоткин

8459. Экспоненциальное отображение в разрешимые группы Ли. Диксмье (L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles. Dixmier J.), Bull. Soc. math. France, 1957, 85, № 1, 113—121 (франц.)

Экспоненциальное отображение e комплексной разрешимой алгебры Ли g в соответствующую ей связную односвязную комплексную группу Ли G тогда и только тогда является изоморфизмом аналитического многообразия g на аналитическое многообразие G, когда алгебра Ли g, а следовательно, и группа Ли G нильпотентны. Если группа G не нильпотентна, то отображение e не взаимно однозначно и $e(g)\neq G$. В случае вещественной разрешимой связной односвязной группы Ли H экспоненциальное отображение ψ ее алгебры Ли h в H тогда и только тогда осуществляет изоморфизм аналитического многообразия h на аналитическое многообразие H, когда все корни алгебры Ли h имеют вид $\alpha'+i\alpha''$, где α' и α'' вещественны и α'' пропорционально α'. Это имеет место, в частности, когда алгебра h имеет возрастающую цепь идеалов размерностей $1, 2, \ldots, n$, (n — размерность алгебры h).

В. М. Глушков

8460. О конечных одно-идемпотентных полугруппах. I. Тамура (On finite one-idempotent semigroups. I. Tamura Takayuki), J. Gakugei, Tokushima, Univ. (Nat. Sci.), 1954, 4, 11—20 (англ.)

Автор изучает конечные полугруппы, имеющие единственный идемпотент. Ядро Сушкевича такой полугруппы S должно быть группой G, и $S^m=G$ для некоторого положительного числа m. Полностью дана

структура S в случае $m=2$. В общем случае мы можем упорядочить элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таким образом, что $G=\{a_1, \ldots, a_k\}$ и $SS_i \subseteq S_{i-1}$, а $S_iS \subseteq S_{i-1}$, где $S_i=\{a_1, \ldots, a_i\}$ для $i=k+1, \ldots, n$. Если $k=1$ и S^2 имеют порядок $n-1$, то S циклическая. A. H. Clifford

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 10, 850

8461. Матричные представления полугрупп. Манн (Matrix representations of semigroups. Munn W. D.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, **53**, № 1, 5—12 (англ.)

Пусть S — конечная полугруппа и $\mathfrak{A}(S)$ — ее алгебра над полем F. Ранее (РЖМат, 1956, 1125) автор доказал, что алгебра $\mathfrak{A}(S)$ полупроста тогда и только тогда, когда просты все факторы главного ряда двусторонних идеалов полугруппы S.

В реферируемой заметке в предположении полупростоты алгебры $\mathfrak{A}(S)$ матричные представления полугруппы S над F описываются при помощи рассмотрения представлений этих факторов. Особо разбирается случай, когда S инверсна, т. е. уравнение $axa=a$ разрешимо в S для каждого $a \in S$ и все идемпотенты перестановочны (в этом случае $\mathfrak{A}(S)$ обязательно полупроста). Е. С. Ляпин

8462. Характеры симметрической инверсной полугруппы. Манн (The characters of the symmetric inverse semigroup. Munn W. D.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, **53**, № 1, 13—18 (англ.)

Для некоторого конечного множества, состоящего из n элементов, через $A_r^{(n)}$ обозначается совокупность всех взаимно однозначных отображений одного подмножества, состоящего не более, чем из r элементов, на другое. $A_n^{(n)}$ называется симметрической инверсной полугруппой. $A_r^{(n)}$ $(r=0, 1, 2, \ldots, n)$ — ее идеалы. Алгебра полугруппы $A_r^{(n)}$ над полем с характеристикой, большей n или равной нулю, полупроста. Рассматриваются матричные представления $A_n^{(n)}$ и ее характеры. Их изучение осуществляется путем сведения к изучению вполне простых полугрупп $A_r^{(n)} - A_{r-1}^{(n)}$. В качестве иллюстрации приводится полная таблица характеров для случая $n=4$. Е. С. Ляпин

8463. Элементарные обобщенные группы. Глускин Л. М., Матем. сб., 1957, **41**, № 1, 23—36

Полугруппа G называется обобщенной группой, если любые два ее идемпотента перестановочны, и каждый элемент $u \in G$ имеет обобщенно обратный элемент $v \in G$, т. е. элемент, удовлетворяющий условиям: $uvu=u$, $vuv=v$.

Пусть H — обобщенная группа, порождаемая некоторым ее элементом u и обобщенно обратным к нему элементом v. Исследуются ее строение и различные свойства, как то: существование единицы, системы соотношений между порождающими элементами u и v, гомоморфизмы на группы, автоморфизмы.

Роль класса $\mathfrak{H}$ всех полугрупп H рассмотренного выше типа для класса $\mathfrak{G}$ всех обобщенных групп определяется свойствами: а) всякая полугруппа из $\mathfrak{G}$ является объединением подполугрупп из $\mathfrak{H}$, б) всякая полугруппа с перестановочными идемпотентами, являющаяся объединением подполугрупп из $\mathfrak{H}$, принадлежит $\mathfrak{G}$, в) никакая правильная часть класса $\mathfrak{H}$ не удовлетворяет условию а). Е. С. Ляпин

8464. Работы советских ученых по теории полугрупп. Риге (Travaux soviétiques récents sur la théorie des demi-groupes. Riguet J.), Sémin. P. Dubreil et Ch. Pisot. Fac. sci. Paris, 1955, 1956, **9**, № 21, 1—13 (франц.)

Изложение работы Е. С. Ляпина (РЖМат, 1956, 7905).

8465. К теории полугрупп. V. Исэки (Contributions to the theory of semi-groups. V. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 8, 560—561 (англ.)

Результаты Шварца (РЖМат, 1956, 3694) обобщены на строго обратимые периодические гомогруппы (РЖМат, 1953, 117; 1957, 2926). Даны следствия для компактных полугрупп. Л. М. Глускин

8466. Внутренние автоморфизмы редуктивных полугрупп. Тьеррен (Sur les automorphismes intérieurs d'un demi-groupe réductif. Thierrin Gabriel), Comment. math. helv., 1956, **31**, № 2, 145—151 (франц.)

Непустое подмножество H полугруппы D называется редуктором, если из соотношения $ax=bx$, выполняющегося при всех $x \in H$, следует $a=b$ $(a, b \in D)$, и из соотношения $xa=xb$, выполняющегося при всех $x \in H$, следует $a=b$. Полугруппа D называется редуктивной, если она содержит хотя бы один редуктор. Множество $\mathfrak{E}$ всех редукторов полугруппы D образует полугруппу относительно умножения комплексов.

Статья распространяет на редуктивные полугруппы результаты Круазо (РЖМат, 1956, 7903) и Дюбрея (Dubreil P., Mèm. Acad. sci. Inst. France, 1941, **63**, 1—52) об автоморфизмах полугрупп с сокращением. Редуктор $H \subset D$ называется r-внутренним, если для любого элемента $a \in D$ существуют такие элементы b, $c \in D$ что

$$ha=bh, \quad ah=hc \tag{1}$$

при всех $h \in H$. Отображения $a \to b$, $a \to c$, индуцируемые соотношениями (1), являются автоморфизмами полугруппы D и называются внутренними автоморфизмами соответственно 1-й и 2-й категории. Множества I_1 и I_2 внутренних автоморфизмов D 1-й и 2-й категории образуют полугруппы с сокращением. Подполугруппа $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}$, состоящая из r-внутренних редукторов, гомоморфна полугруппе I_1. Полным прообразом одного из элементов полугруппы I_1 в этом гомоморфизме является r-центр полугруппы $\mathfrak{F}$ (если он не пуст) — подполугруппа $\mathfrak{F}$, состоящая из редукторов, содержащихся в центре D. Множество I_1 является группой тогда и только тогда, когда $I_1=I_2$. Для этого также необходимо и достаточно, чтобы r-центр полугруппы $\mathfrak{F}$ был не пуст и чист в $\mathfrak{F}$ (РЖМат, 1955, 1115).

Всякая полугруппа T может быть погружена в редуктивную полугруппу D так, что любой автоморфизм полугруппы T индуцируется некоторым внутренним автоморфизмом 1-й категории полугруппы D. Рассматриваются отношения сопряженности, аналогичные отношениям, введенным в цитированной выше работе Круазо. Л. М. Глускин

8467. Полугруппы и субмодулярные функции. Райт (Semigroups and submodular functions. Wright Fred B.), Michigan Math. J., 1955—1956, **3**, № 2, 169—172 (англ.)

Пусть E — вещественное линейное топологическое пространство, R — поле вещественных чисел. Подмножество $A \subset E$ называется радиально выпуклым, если для любых $x \in E$, $\alpha, \beta \in R$ из αx, $\beta x \in A$ следует $\gamma x \in A$ для любого $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Аддитивная полугруппа $S \subset E$ называется радиантной, если S — собственная открытая радиально выпуклая подполугруппа пространства E.

Для каждого непустого подмножества $A \subset E$ определяется функция порядка $d_A(x)=\inf \alpha$, $\alpha \in R(x, A)$, где $R(x, A)$ — множество всех $\alpha \in R$, для которых $\alpha x \in A$; $d_A(x)=+\infty$, если $R(x, A)=\varnothing$. Определенная на E вещественнозначная функция $f(x)$ (которая может принимать также значения $\pm\infty$) называется субмодулярной, если $f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$ во всех случаях, когда либо $f(x)=f(y)=+\infty$, либо $f(x)=f(y)=-\infty$, либо же $-\infty<f(x)<\infty$, $-\infty<f(y)<\infty$. Функция $f(x)$ называется условной, если: 1) она принимает конечные значения на собственно непустом открытом подмножестве множества E, 2) из $-\infty<f(x)<\infty$ следует $f(x) \geqslant 0$. Условная функция

называется нормализованной, если $f(-x) = -\infty$, тогда и только тогда, когда $f(x)$ конечна.

Доказывается, что всякая определенная на E полуограниченная сверху субмодулярная условная нормализованная функция $f(x)$ является функцией порядка $d_S(x)$ для некоторой радиантной полугруппы $S \subset E$, которая состоит из всех $x \in E$, для которых $0 \leqslant d_S(x) < 1$. Обратно, функция порядка $d_S(x)$ всякой радиантной полугруппы $S \subset E$ обладает перечисленными выше свойствами. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых радиантная полугруппа является конической (Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, М., Изд-во ин. лит., 1951). Л. М. Глускин

8468. Дополнимые Q-полугруппы. Боччони (Q-pseudogruppi complementarizzabili. Boccioni Domenico), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 26, 85—123 (итал.)

Пусть G, Q — две полугруппы. Полугруппа G называется левой Q-полугруппой, если она допускает полугруппу Q в качестве области операторов (РЖМат, 1957, 3814). Пусть M — подполугруппа Q и Γ — Q-подполугруппа G удовлетворяют условиям, аналогичным условиям цитированной выше статьи. Доказывается существование единственной (с точностью до изоморфизма) Q-полугруппы $\mathfrak{G}$, содержащей G и удовлетворяющей условиям: 1) $\mathfrak{G}$ содержит единицу, 2) всякий элемент $\tau \in \Gamma$ обладает в $\mathfrak{G}$ обратным τ^{-1}, 3) уравнение относительно ξ

$$a\xi = \xi_1 \ (a \in M, \ \xi_1 \in \mathfrak{G}) \qquad (1)$$

допускает одно и только одно решение в $\mathfrak{G}$, 5) всякий элемент $\xi \in \mathfrak{G}$ является решением типа (1) при $\xi_1 = u\tau^{-1}$ ($u \in G$, $\tau \in \Gamma$).

Из этой основной теоремы выведено в качестве следствий большое число предложений о погружении, в частности для полуколец, колец и групп с операторами. Л. М. Глускин

8469. К. Теория групп Ли. Т. 3. Общие теоремы об алгебрах Ли. Шевалле (Thèorie des groupes de Lie. T. 3. Teorèmes généraux sur les algèbres de Lie. Chevalley Claude (Publs Inst. Math. Univ. Nancago, 4), Actual. scient. et industr., 1955, № 1226, 239 p., ill.) (франц.)

Фрагмент монографии, посвященной группам Ли. В гл. 3 приводятся общие предложения, касающиеся представлений. В гл. 4 рассматриваются полупростые алгебры Ли над полем характеристики нуль. Доказывается теорема Энгеля о нильпотентности алгебры Ли, порожденной нильпотентными матрицами, и приводится ряд ее следствий. Полупростая алгебра Ли определяется как алгебра, для которой билинейная форма Картана невырождена. При рассмотрении представлений полупростых алгебр проводится доказательство теоремы Вейля о полной приводимости, отличное от известных алгебраических доказательств. Специально рассматриваются алгебры, являющиеся прямыми суммами абелевых и полупростых. Доказывается, что для того чтобы алгебра Ли имела такую структуру, необходимо и достаточно, чтобы для нее существовало по крайней мере одно точное вполне приводимое представление. Наряду с алгебрами рассматриваются полупростые алгебраические группы. Если некоторое представление группы индуцирует вполне приводимое представление ее нормального делителя конечного индекса, то оно само вполне приводимо. Если полупростая группа Ли имеет конечное число связных компонент, то ее представления вполне приводимы. Приводятся также некоторые предложения о простых трехчленных алгебрах и их представлениях. Гл. 5 посвящена алгебрам Ли общего типа над полем характеристики нуль. Вводится понятие разрешимой алгебры Ли и доказывается теорема Ли о треугольной форме матриц представлений разрешимой алгебры в форме: если представление разрешимой алгебры вполне приводимо, то оно должно быть абелевым. Вводятся понятия радикала алгебры Ли, максимального нильпотентного идеала, а также нильпотентного идеала, все элементы которого нильпотенты в некотором представлении. Теорема Леви о разложимости алгебры Ли на разрешимый идеал и полупростую подалгебру доказывается с усилением Мальцева: два различные разложения Леви могут быть получены одно из другого с помощью внутреннего автоморфизма алгебры. Приводятся некоторые теоремы, связанные с разложением Леви. Доказывается теорема референта: всякая алгебра Ли над полем характеристики нуль имеет точное представление. Рассматривается универсальная ассоциативная алгебра U, т. е. алгебра, порождаемая единицей и элементами X_i, связанными соотношениями $X_iX_k - X_kX_i = \sum_s c_{iks}X_s$, где c_{iks} — структурные постоянные алгебры Ли. В случае, если алгебра Ли принадлежит неразложимой алгебраической группе, алгебра U изоморфна некоторой алгебре дифференциальных операторов. Гл. 6 посвящена подалгебрам и подгруппам Картана. Автор называет подалгеброй Картана нильпотентную подалгебру, которая совпадает со своим нормализатором. Подгруппа Картана определяется как максимальная нильпотентная подгруппа, у которой всякая подгруппа конечного индекса имеет конечный индекс в ее нормализаторе. В случае алгебраических групп подгруппа Картана будет неразложимой подгруппой, у которой алгеброй Ли служит подалгебра Картана. Подгруппы Картана алгебраической неразложимой группы сопряжены. В связной компактной группе подгруппы Картана будут связными и всякая связная абелева подгруппа содержится в подгруппе Картана. Все подгруппы Картана компактной связной группы сопряжены и всякий элемент входит в одну из подгрупп Картана. В этой главе автор пользуется понятиями топологии Зарисского, в которой замкнутое множество в векторном пространстве определяется как множество точек, определяемых из системы алгебраических уравнений. И. Д. Адо

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

8470. Об упорядоченных полях и определенных функциях. Робинсон (On ordered fields and definite functions. Robinson Abraham), Math. Ann., 1955, 130, № 4, 257—271 (англ.)

Обобщаются результаты Артина и Шрейера о формально вещественных полях и определенных функциях (Artin E., Schreier D., Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1927, 5, 85—99, 100—115). Доказательства опираются на одну вспомогательную теорему о вложении алгебраических систем, доказываемую при помощи узкого исчисления предикатов. Подмножество C поля M автор называет ядром, если C содержит единицу, не содержит нуля и замкнуто относительно умножения. Поле M называется формально вещественным относительно ядра C, если из $x_1, \ldots ex_n \in C$ и $x_1y_1^2 + \ldots + x_ny_n^2 = 0$ следует $y_1 = \ldots = y_n = 0$. Элемент a поля M называется вполне положительным относительно ядра C, если a является положительным при любом упорядочении поля M, при котором все элементы из C положительны. Доказывается (теорема 3.8), что если поле M формально вещественно относительно ядра C, то любой вполне положительный относительно C элемент a представим в виде

$$a = a_1b_1^2 + \ldots + a_nb_n^2, \ a_1, \ldots, a_n \in C. \qquad (1)$$

Показывается далее, что если поле M с характеристикой, отличной от 2, не является формально вещественным относительно C, то любой его элемент a представим в виде (1). Из этих теорем получаются соответствующие результаты Артина, если взять за C в одном случае множество, состоящее только из единицы, и в другом случае множество всех положительных элементов некоторого фиксированного подполя.

Подмножество C поля $M[x_1, \ldots, x_n]$ над упорядоченным полем M называется ядром, если C замкнуто относительно умножения, не содержит нуля и содержит все положительные элементы поля M. Рациональная функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in M[x_1, \ldots, x_n]$ называется вполне определенной относительно ядра C, если для любого упорядоченного надполя M' поля M из $x_1', \ldots, x_n' \in M'$ и $g(x_1', \ldots, x_n') > 0$ при всех $g(x_1, \ldots, x_n) \in C$ следует $f(x_1', \ldots, x_n') \not< 0$ (функция либо неотрицательна, либо ее знаменатель обращается в нуль). Доказывается, что если рациональная функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in M[x_1, \ldots, x_n]$ вполне определенна относительно ядра C, то $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} g_j(x_1, \ldots, x_n)\, h_j^2(x_1, \ldots, x_n)$, где $g_j(x_1, \ldots, x_n) \in C$; при $j = 1, \ldots, k$ устанавливаются еще следующие утверждения. Пусть рациональные функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n) \in M[x_1, \ldots, x_n]$ отличны от нуля и поле M вещественно замкнуто. Если из $x_1', \ldots, x_n' \in M$, $g_1(x_1', \ldots, x_n') > 0, \ldots, g_k(x_1', \ldots, x_n') > 0$ следует $f(x_1', \ldots, x_n') \not< 0$, то $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} g_1^{m_{1j}}(x_1, \ldots, x_n) \ldots g_k^{m_{kj}}(x_1, \ldots, x_n)\, h_j^2(x_1, \ldots, x_n)$, где показатели m_{ij} равны 0 или 1. Если функции удовлетворяют тем же условиям, но поле M архимедовски упорядочено, то $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} g_1^{m_{1j}}(x_1, \ldots, x_n) \ldots g_k^{m_{kj}}(x_1, \ldots, x_n)\, h_j^2(x_1, \ldots, x_n)$, где $c_j \in M$, $c_j > 0$ и m_{ij} равны 0 или 1. Последнее утверждение в случае $g_1 = 1$, $k = 1$ дает две известные теоремы Артина.

Я. В. Хион

8471. Семинар по теории нормированных полей. I—V. Краснер (Séminaire sur la théorie des corps valués. I—V. Krasner M. Sémin. M. Krasner, Fac. sci. Paris, 1953—1954 (1956), I—1, № 1, 52 p.; II—1, № 2, 25 p.; III—1, № 3, 46 p.; IV—1, № 4, 39 p.; V—2, № 5, 131 p. (франц.)

Семинар посвящен изучению нормированных полей; в основном рассматриваются поля с неархимедовой нормой.

Доклад 1. „Ультраметрические и ультраметроидные пространства". Под ультраметрическим пространством автор понимает метрическое пространство, в котором для расстояния $d(x, y)$ имеет место усиленное неравенство треугольника

$$d(x, z) \leqslant \max(d(x, y),\ d(y, z));$$

детально изучается топология, равномерная топология и „геометрия" таких пространств. Рассматриваются круги и окружности в таких пространствах (круг радиуса r с центром a — совокупность элементов, удовлетворяющих условиям $d(x, a) \leqslant r$ или $d(x, a) < r$, окружность $d(x, a) = r$). Для удобства изложения вводится понятие полувещественных чисел сопоставлением каждому вещественному числу r трех объектов $(r, -)$ $(r, 0)$, $(r, +)$. В области полувещественных чисел определяются рациональные операции и упорядоченность. Кругам $d(x, a) < r$ приписывается радиус $(r, -)$, кругам $d(x, a) \leqslant r$ — радиус $(r, 0)$. Обобщением ультраметрических пространств являются ультраметроидные пространства. Они определяются так же, как и ультраметрические пространства, с той разницей, что функция расстояния $d(x, y)$ принимает свои значения в упорядоченном группоиде (система с одной всюду определенной бинарной операцией, не обязательно коммутативной или ассоциативной). На ультраметроидные пространства распространяются основные свойства и понятия ультраметрических пространств, в частности теория пополнения и т. д.

Доклад 2. „Нормированные группы и кольца". Изучаются метрические, особенно ультраметрические и ультраметроидные группы; строится элементарная теория общих таких групп. Под метрической группой понимается группа, являющаяся одновременно метрическим пространством и такая, что для всех a, $x, y \in G$ имеет место $d(ax, ay) = d(x, y)$; если пространство ультраметрическое (ультраметроидное), то и группа называется ультраметрической (ультраметроидной). Пусть $|x| = d(x, 1(G))$, тогда в ультраметрической (ультраметроидной) группе выполняются соотношения: 1) $|x| = 0 \longleftrightarrow x = 1(G)$, 2) $|x| = |x^{-1}|$, 3) $|xy| \leqslant \max(|x|, |y|)$, 4) $|x| = |yxy^{-1}|$. Обратно, если введена функция $|x|$, удовлетворяющая условиям 1) — 4), то в группе определяется структура ультраметрической или ультраметроидной группы (функция $|x|$ называется нормой или оценкой; если $|x|$ принимает значения в упорядоченном группоиде, то автор называет ее титулом). В этом случае говорят о нормированной (соответственно о титрированной) группе (от французского слова „titre" — титул, звание)). Особенно важен частный случай титрированной группы, для которой титул принимает свои значения в упорядоченной абелевой псевдогруппе (псевдогруппа M — это объединение группы M^* и элемента 0, причем $\alpha \cdot 0 = 0$ для всех α из псевдогруппы). Для этого частного случая выводятся необходимые и достаточные условия, при которых титрированная группа является компактной или локально компактной. В дальнейшем в основном рассматривается этот частный случай. Строится теория операторных титрированных групп. При этом под оператором λ титрированной группы G понимается отображение G в себя, являющееся эндоморфизмом группы G и такое, что $|\lambda x| = \alpha(\lambda)\,|x|$, где $\alpha(\lambda)$ — элемент псевдогруппы M значений титула, не зависящий от x. Множитель $\alpha(\lambda)$ называется титулом (в частности, нормой, если M — мультипликативная псевдогруппа неотрицательных вещественных чисел) и обозначается через $\|\lambda\|$. Далее развивается теория титрированных колец со значениями титула в упорядоченной абелевой псевдогруппе. В титрированном кольце для титула выполняются следующие аксиомы:

$$1)\ |x| = 0 \longleftrightarrow x = 0; \qquad 2)\ |x| = |-x|;$$
$$3)\ |x + y| \leqslant \max(|x|, |y|); \quad 4)\ |xy| = |x|\,|y|.$$

Можно показать, что титрированное кольцо A — кольцо без делителей нуля. Для дальнейшего делается предположение, что для элементов $x, y \in A$ из условия $|x| \leqslant |y|$ следует существование таких элементов z и z', что $x = yz$, $x = z'y$. В этом случае титрированное кольцо может быть погружено в тело. Совокупность элементов $x \in A$, для которых $|x| \leqslant I$ (где I — единица псевдогруппы M), образует подкольцо в A, называемое областью целых элементов. Исследуется теория делимости, идеалы в области целостности, тело остатков и т. д. Элементарная теория титрированных колец аналогична теории коммутативных нормированных колец с неархимедовой нормой. В частности, на случай титрированных колец (не обязательно коммутативных) обобщается теорема о возможности распространения кольцевых

операций и титула на пополнение соответствующего ультраметроидного пространства.

Доклад 3. „Нормированные поля и нормированные расширения". Рассматривается общая теория нормированных полей с неархимедовой нормой. Поле (или тело) называется неархимедово нормированным, если на нем определена вещественная функция $|\ |$, удовлетворяющая аксиомам: 1) $|x|=0 \longleftrightarrow x=0$; 2) $|x+y| \leqslant \max(|x|, |y|)$; (3) $|xy|=|x||y|$.

Нормированные поля являются частным случаем титрированных колец, рассматриваемых в докл. 2. В настоящем докладе излагаются в основном хорошо известные факты теории нормированных полей: теория пополнения, поле остатков, теория расширения и т. д., а также даются примеры нормированных полей, известные из теории алгебраических чисел (p-адические поля) и теории алгебраических функций одного и нескольких переменных.

Доклад 4. „Мультипликативные сравнения. Скелеты и корпоиды". Пусть k — неархимедово нормированное тело и пусть $|\ |$ — норма, определенная в k. В теле вводится так называемая мультипликативная норма $|\ |_m$, определяемая формулой $|x|_m = \frac{|x-1|}{\max(1, |x|)}$; для расстояния $d_m(x, y)=|xy^{-1}|_m$ мультипликативная группа k^* поля k является ультраметрической группой. Значения мультипликативной нормы, а также значения функции мультипликативного расстояния $d_m(x, y)$ пробегают элементы множества $M=M\cap[0, 1]$, где M — псевдогруппа значений нормы. Для всякого $\rho \in M$ (ρ — вообще говоря, полувещественное число) $d_m(x, y) \leqslant \rho$ есть отношения эквивалентности для элементов из k (это так называемое мультипликативное сравнение по идеалу q_ρ, где q_ρ — совокупность элементов x из k, для которых $|x| \leqslant \rho$). Обозначим эту эквивалентность через π_ρ. Классы эквивалентности по π_ρ допускают умножение и классы, отличные от нулевого, образуют при этом группу, сложение для этих классов не допускает, вообще говоря, естественного определения. Для $\rho=(1, -)$ сумма классов, содержащих x, $y \in k$, однозначно определена, если $|x|=|y|$ или если по меньшей мере один из элементов x и y равен 0. Если рассматривать на совокупности классов по $\pi_{(1, -)}$ (это мультипликативные классы остатков по максимальному идеалу тела k) операцию умножения и сложения, определенного только для классов с вышеуказанными свойствами, то они образуют структуру, аналогичную телу, с той только разницей, что сумма не всегда определена. Автор дает аксиомы такой структуры, для которой он предлагает термин „корпоид". Мультипликативные классы по $\pi_{(1, -)}$ образуют корпоид, называемый скелетом нормированного тела k. В докладе рассматриваются элементарные понятия, связанные с понятием корпоида, строение скелета нормированного тела, понятие расширения корпоида и связь скелета тела k и скелета нормированного алгебраического расширения K тела k.

Доклад 5. „Элементарная теория коммутативных корпоидов без кручения". Вкратце корпоид Q является структурой следующего вида: 1) Q есть псевдогруппа по умножению, т. е. объединение группы Q^* и элемента 0; группа Q^* содержит нормальный делитель R^*. Элементы a и b из Q слагаемы ($a \# b$), если по меньшей мере один из этих элементов равен 0 или если оба элемента принадлежат одному и тому же смежному классу Q^* по R^*. Если $a \# b$, то сумма $a+b$ однозначно определена, сложение ассоциативно, коммутативно, для всех $c \in Q$ $ac \# bc$ и $ca \# cb$ и имеет место дистрибутивный закон; 3) множество $R=R^* \cup 0$ образует тело. Корпоид называется коммутативным, если группа Q^* абелева; Q — корпоид без кручения, если факторгруппа Q^*/R^* — группа без кручения.

С целью дальнейших применений в теории нормированных полей, автор дает детальное изложение теории расширения коммутативных корпоидов без кручения, обобщая на случай корпоидов понятия и результаты теории полей. Вводится понятие многочлена над корпоидом и изучаются свойства многочленов. По аналогии с теорией полей определяются понятия алгебраических и трансцендентных расширений, степени трансцендентности, алгебраического замыкания, сепарабельности и т. д. и обобщаются известные теоремы, относящиеся к этим понятиям. Для случая алгебраических расширений особенно детально исследуется теория, аналогичная теории куммеровских расширений полей.

Л. А. Калужнин

8472. О нульклассах в поле алгебраических функций двух переменных. Энгель (Über die Nullklassen in algebraischen Funktionenkörpern von zwei Veränderlichen. Engel Wolfgang). Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-naturwiss. Reihe, 1955/56, 5, № 5, 905—908 (нем.)

Определяется число решений уравнения $(X^n)=(1)$, где X — нулькласс дивизоров в поле алгебраических функций двух переменных над полем комплексных чисел. Одновременно решается задача определения числа решений уравнения $(X^n)=(Q)$, где Q — произвольный класс дивизоров, в частности числа нульклассов, остающихся инвариантными при инволютивных автоморфизмах $u_i'=-u_i+k_i$ соответствующего пикарова многообразия. Рассмотрен пример поля, порожденного элементом $z=\sqrt{R_1(x)}+\sqrt{R_2(y)}$, где R_i — полиномы 3-й степени без кратных корней. В. В. Морозов

8473. Совместные пары из линейного и квадратного уравнений в поле Галуа. Коэн (Simultaneous pairs of linear and quadratic equations in a Galois field. Cohen Eckford). Canad. J. Math., 1957, 9, № 1, 74—78 (англ.)

Определяется число $N_s(m, n)$ решений системы уравнений

$$m=\alpha_1 x_1^2+\ldots+\alpha_s x_s^2, \quad (1)$$
$$n=\beta_1 x_1+\ldots+\beta_s x_s$$

в конечном поле $GF(p^r)$, $p>2$, в предположении, что все α_i, $\beta_i \neq 0$. В частности, если $s=4k$, то

$$N_s(m, n)=p^{r(4k-2)}+p^{r(2k-1)}\psi(\alpha)\zeta,$$

где $\alpha=\alpha_1 \ldots \alpha_s$, $\psi(\alpha)$ — обобщенный символ Лежандра в конечном поле, а величина ζ зависит от m, n, α_i, β_i ($i=1, \ldots, s$).

Аналогичные выражения для $N_s(m, n)$ получаются и при $s=4k+1$, $4k+2$, $4k+3$. Отмечается, что система (1) при $s \geqslant 4$ и произвольных m, n и α_i, $\beta_i \neq 0$ всегда совместна в поле F. Перечисляются случаи $s \leqslant 3$, когда система (1) несовместна. Б. М. Уразбаев

8474. Простое доказательство теоремы существования радикала Левицкого. Се Бан-цзе (Levitzki 根存在定理的一個簡單證明. 謝邦傑), 自然科學學報, Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta Sci. Natur., 1956, № 1, 157—158 (кит.)

Дается простое доказательство следующих теорем Левицкого (Levitzki J., Bull. Amer. Math. Soc., 1943, 49, 462—486):

1) Сумма локально нильпотентных идеалов (ассоциативного) кольца S является локально нильпотентным идеалом.

2) Фактор-кольцо S/N кольца S по его локально нильпотентному радикалу N не имеет локально нильпотентных идеалов. Ван Сян-хао

8475. Упорядоченные ассоциативные кольца. Хион Я. В., Докл. АН СССР, 1955 **101**, № 6, 1005—1007.

В упорядоченном ассоциативном кольце R элемент $a \geqslant 0$ называется бесконечно малым, если при всех натуральных n $na^2 \leqslant a$, — конечным, если существуют такие натуральные числа m и n, что $ma^2 > a$ и $na > a^2$, и бесконечно большим, если при всех натуральных n $na < a^2$. Отрицательный элемент b называется бесконечно малым, конечным или бесконечно большим, если таковым является — b. Доказано, что в упорядоченном кольце множество K конечных и бесконечно малых элементов является выпуклым подкольцом, множество M бесконечно малых элементов — выпуклым двусторонним идеалом в K, а фактор-кольцо K/M изоморфно подкольцу поля действительных чисел.

Доказано также, что радикал Бэра упорядоченного кольца является выпуклым идеалом, фактор-кольцо по которому не содержит делителей нуля, и что в упорядоченном кольце радикалы Бэра, Левицкого и Кете совпадают.

Далее автор показывает, что если $R \neq M$, то в кольце R существует максимальный выпуклый двусторонний идеал L, а фактор-кольцо R/L не содержит нетривиальных выпуклых двусторонних идеалов. Это позволяет в известном смысле свести изучение произвольных упорядоченных колец к изучению упорядоченных колец, состоящих из бесконечно малых элементов, и упорядоченных колец без собственных выпуклых двухсторонних идеалов. О последних же показано, что это либо кольца без делителей нуля, либо кольца с нулевым умножением.

Сформулировано необходимое и достаточное условие отсутствия нетривиальных выпуклых подколец в неархимедовски упорядоченном кольце.

В конце работы утверждается, что в упорядоченном кольце R, удовлетворяющем условию обрыва убывающих цепей для выпуклых правых идеалов, всякий выпуклый правый идеал, содержащийся в кольце M, нильпотентен.

Е. П. Шимбирева

8476. Индуцированные и продуцированные модули. Хигман (Induced and produced modules. Higman D. G.), Canad. J. Math., 1955, 7, № 4, 490—508 (англ.)

Пусть S — некоторое кольцо. Кольцо A называется S-кольцом, если оно является S-бимодулем, причем выполняются условия: $s(a_1a_2)=(sa_1)a_2$, $a_1(sa_2)=(a_1s)a_2$, $a_1(a_2s)=(a_1a_2)s$ для любых элементов $s \in S$, a_1, $a_2 \in A$. S-бимодуль M называется (правым) A, S-модулем, если он является правым A-модулем, причем $s(ma)=(sm)a$, $m(sa)=(ms)a$, $m(as)=(ma)s$ для любых $s \in S$, $a \in A$, $m \in M$.

Пусть M — какой-то S-бимодуль. Пара $(I(M), k)$, где $I(M)$ — A, S-модуль, k — S-гомоморфное отображение M в $I(M)$, называется парой, индуцированной модулем M, если для всякого A, S-модуля H и S-гомоморфного отображения δM в H существует ровно одно такое A, S-гомоморфное отображение $\bar{\delta}$ $I(M)$ в H, что $\delta = k\bar{\delta}$. Соответственно этому, пара $(P(M), \pi)$, где $P(M)$ — A, S-модуль, π — S-гомоморфное отображение $P(M)$ в M, называется парой, продуцированной модулем M, если для всякого A, S-модуля H и S-гомоморфного отображения δH в M существует ровно одно такое A, S-гомоморфное отображение $\bar{\delta} H$ в $P(M)$, что $\delta = \bar{\delta}\pi$. Доказывается, что для каждого S-бимодуля M существует единственная с точностью до A, S-изоморфизма индуцированная пара и единственная с точностью до A, S-изоморфизма продуцированная пара. Устанавливаются различные свойства $I(M)$ и $P(M)$, в частности некоторые условия, накладываемые на A, при которых $I(M)$ и $P(M)$ A, S-изоморфны.

Для случая, когда M есть A, S-модуль, даются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы M было изоморфно прямому слагаемому $I(M)$ (соответственно $P(M)$).

В конце работы полученные результаты используются в теории представлений конечных алгебр, в теории представлений групп и для характеристики сепарабельных алгебр.

А. П. Мишина

8477. О проективной геометрии AW^*-алгебры конечного ранга. Берберян (On the projection geometry of a finite AW^*-algebra. Berberian S. K.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 83, 493—509 (англ.)

Пусть A — AW^*-алгебра конечного ранга (РЖМат, 1956, 594). Известно, что множество $G(A)$ проекций (т. е. самосопряженных идемпотентов) алгебры A, как структура, является непрерывномерной геометрией. Показывается, что это верно и для $G(A/I)$, где I — идеал алгебры A, порожденный максимальным нейтральным идеалом структуры $G(A)$ (Биркгоф Г., Теория структур, М., 1952, стр. 43 и 180). Пусть, далее, $\{S_\alpha\}$ — множество всех нейтральных идеалов структуры $G(A)$, I_α — идеал алгебры A, порожденный множеством S_α, M_α — замыкание идеала I_α, θ_α — отображение $G(A)$ в $G_\alpha = G(A/I_\alpha)$, индуцированное естественным гомоморфизмом A на A/I_α, и G_α — естественный гомоморфизм A/I_α на A/M_α. Тогда: 1) G_α — неприводимая непрерывномерная геометрия; 2) θ_α отображает $G(A)$ на G_α, причем $\theta_\alpha(1-e) = 1-\theta_\alpha(e)$, $\theta_\alpha(e \cup f) = \theta_\alpha(e) \cup \theta_\alpha(f)$, а S_α состоит из всех элементов структуры $G(A)$, отображающихся в нуль; 3) если $\tilde{D}_\alpha[\bar{D}_\alpha]$ — нормированная функция размерности для $G_\alpha[A/M_\alpha]$, то $\tilde{D}_\alpha = \bar{D}_\alpha G_\alpha$; 4) C/J_α, где C — регулярное кольцо геометрии $G(A)$ (РЖМат, 1956, 1150), а J_α — идеал кольца C, порожденный множеством S_α, является регулярным кольцом геометрии G_α и оказывается полным *-регулярным кольцом; 5) естественное отображение A/I_α в C/J_α является *-изоморфизмом, образ которого является ограниченной подалгеброй алгебры C/J_α.

Л. А. Скорняков

8478. Об алгебрах Ли линейных алгебраических преобразований. Кертис (On Lie algebras of algebraic linear transformations. Curtis Charles W.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 3, 453—466 (англ.)

Рассматриваются алгебры Ли линейных преобразований (л. п.) пространства бесконечной размерности. На этот случай переносятся некоторые результаты, известные для пространств конечной размерности.

Пусть M — (векторное) пространство и A — л. п. пространства M. Тогда преобразование A называется локально алгебраическим в M, если для любого $x \in M$ минимальное среди содержащих x инвариантное относительно A подпространство пространства M имеет конечную размерность. Если же это преобразование является корнем некоторого многочлена с коэффициентами из основного поля, то оно называется алгебраическим. Л. п. A называется локально нильпотентным, если для любого $x \in M$ найдется такой показатель t, что $xA^t = 0$. Наконец, оно называется полупростым, если относительно него пространство M вполне приводимо.

Основные результаты работы следующие:

1. Если основное поле совершенно, то любое локально алгебраическое л. п. A однозначно представимо в виде суммы полупростого локально алгебраического л. п. S и локально нильпотентного л. п. N, каждое из которых перестановочно с A и аппроксимируется полиномами от A.

2. (Обобщение теоремы Джекобсона). Локально конечная алгебра Ли L алгебраических л. п., у которой обертывающая ассоциативная алгебра полупроста (в смысле Джекобсона), является прямой суммой идеала L_1, содержащего коммутант, и центра. В L_1 нет ненулевых разрешимых идеалов и все элементы центра полупросты.

3. Если L — разрешимая лиева алгебра алгебраических л. п., то она локально конечна и кроме того: а) если обертывающая L ассоциативная алгебра полупроста, то L коммутативна; б) если L имеет счетную размерность, основное поле алгебраически замкнуто и все элементы из L полупросты, то L коммутативна. Здесь условие счетности размерности существенно.

4. Приводятся обобщения результатов А. И. Мальцева о линейно расщепляемых разрешимых алгебрах. В п. 2, п.п. 3а и 3б предполагается, что основное поле имеет характеристику нуль. Б. И. Плоткин

8479. Доказательство теоремы регулярности. Морозов В. В., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 191—194.

Новое доказательство теоремы о том, что всякая неполупростая максимальная подалгебра полупростой алгебры Ли над полем комплексных чисел регулярна. Впервые эта теорема была доказана в диссертации автора. Ф. И. Карпелевич

8480. Некоторые свойства стандартных нульалгебр Ли. Гуревич Г. Б., Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу. МГУ, 1956, вып. 10, 89—104

Нульалгеброй Ли автор называет матричную алгебру Ли, состоящую из матриц, все характеристические числа которых равны нулю. Каждая нульалгебра определяет разбиение векторного пространства на ступени, причем всякая ее матрица понижает ступень вектора.

Нульалгебра называется полной, если она содержит все матрицы, обладающие этим свойством. Стандартной алгеброй Ли автор называет алгебру Ли, нормализатором которой служит нормализатор полной нульалгебры.

Структура стандартной нульалгебры определяется некоторым набором целых чисел, составляющим шифр алгебры. Полные нульалгебры выделяются специальной особенностью их шифра и являются простейшими из стандартных. Показано, каким образом данную стандартную нульалгебру можно представить в виде пересечения минимальных объемляющих ее полных нульалгебр, сумма которых равна ортогональному дополнению нормализатора данной стандартной алгебры. Далее приводится число типов стандартных алгебр. Если n — размерность пространства, то число всех типов стандартных нульалгебр равно $\frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$, а число типов разрешимых стандартных алгебр равно $\frac{1}{n+2} C_{2n+2}^{n+1}$.

И. Д. Адо

8481. Об универсальных обертывающих алгебрах некоторых алгебр Ли. Лазар (Sur les algèbres enveloppantes universelles de certaines algèbres de Lie. Lazard M.), Publs scient. Univ. Alger, 1954, **A1**, № 2, 281—294 (франц.)

Теорема Биркгофа — Витта переносится на Σ-операторные кольца Ли для случая, когда Σ является кольцом главных идеалов. А. И. Ширшов

8482. Об одном множестве лиевых алгебр характеристики p. Дженнингс, Ри. (On a family of Lie algebras of characteristic p. Jennings S. A., Ree Rimhak), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **84**, № 1, 192—207 (англ.)

Рассматривается некоторое множество подалгебр лиевой алгебры дифференцирований групповой алгебры элементарной p-группы над алгебраически замкнутым полем характеристики $p>0$. Оказывается, что простые алгебры Ли размерностей $m(p^n-1)$, mp^n, p^n-2, где m и n — произвольные целые числа с условием $1\leqslant m<n$ и $p>2$ только для размерностей p^n и p^n-2, связаны с этим множеством. Некоторые другие известные типы алгебр также реализуются в этом множестве. Выделяются простые алгебры размерности $m(p^n-1)$ для любого $p>0$. Б. И. Плоткин

8483. Группы Ли и гипералгебры Ли над полем характеристики $p>0$. (V). Дьёдонне (Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p>0$. (V). Dieudonné Jean), Bull. Soc. math. France, 1956, **84**, № 3, 207—239 (франц.)

Ч. I—IV см. РЖМат 1955, 4283; 1956, 4364, 4365, 4366.

Гипералгеброй над полем K называется ассоциативная алгебра над этим полем с выделенным в ней некоторым специальным базисом. Как и во всякой ассоциативной алгебре, в гипералгебре может быть определена структура алгебры Ли. Вводится понятие свободной гипералгебры и доказывается ряд свойств свободных гипералгебр, с помощью которых получается новый вывод известной формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа и устанавливаются аналоги этой формулы для случая полей простых характеристик. В. М. Глушков

8484. Доказательство одного тождества для J-алгебр. Харпер (Proof of an identity on Jordan algebras. Harper Laurence R., Jr), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, **42**, № 3, 137—139 (англ.)

Одно тождество в J-кольцах. Холл (An identity in Jordan rings. Hall M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 6, 990—998 (англ.)

Пусть A — J-алгебра и

$$\{a, b, c\} = \frac{1}{2}(ab)c + \frac{1}{2}(bc)a - \frac{1}{2}(ac)b,$$

где $a, b, c \in A$. В реферируемых работах независимо доказывается, что $\{a, b, a\}^2 = \{a, \{b, a^2, b\}, a\}$. Это равенство позволило Джекобсону доказать одно важное утверждение о конечномерных J-алгебрах (РЖМат, 1957, 7704). Следует отметить, что рассматриваемое соотношение является простым следствием одной общей теоремы референта (РЖМат, 1956, 7203). А. И. Ширшов

8485. Неассоциативные свободные суммы алгебр с объединенной подалгеброй. Дидидзе Ц. Е., Сообщ. АН ГрузССР, 1957, **18**, № 1, 11—17

Пусть алгебра U над полем P является подалгеброй каждой из алгебр A_α. Возьмем в U некоторую базу Z и для каждого α дополним ее множеством L_α до базы алгебры A_α. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ всех неассоциативных слов относительно $Z \cup (\bigcup L_\alpha)$, не содержащих скобок вида (xy), где $x, y \in A_\alpha$. Если $x, y \in A_\alpha$, то произведение xy вычисляется по правилам, действующим в алгебре A_α. Во всех остальных случаях произведение xy определяется путем простого приписывания. Алгебра с базой $\mathfrak{M}$ над P называется свободной суммой алгебр A_α с объединенной подалгеброй U и обозначается $\left\{\sum^{*} A_\alpha; U\right\}$. Она не зависит от выбора баз в алгебрах U и A_α. При $U=0$ получаем обычную неассоциативную свободную сумму (РЖМат, 1956, 3706). Алгебру G назовем свободной алгеброй над подалгеброй U и обозначим через $[U; M; \overline{F}]$, если в G можно найти такие свободные подалгебры F и $\overline{F}$, что для некоторого множества M свободных образующих алгебры F и некоторой базы Z алгебры U выполняются следующие требования: 1) если $m \in M$ и $u \in U$, то $mu, um \in U$; 2) неассоциативные слова относительно $Z \cup M$, в которых всякая скобка длины 2 является произведением элементов из M, образуют базу алгебры G_0, порожденной множеством $U \cup F$; 3) алгебра G является неассоциативной свободной суммой алгебр G_0 и $\overline{F}$. Показывается, что алгебра G не зависит от выбора базы Z. Основная теорема: Если $A = \left\{G * \left(\sum^{*} A_\alpha\right); U\right\}$, где $G = [U, M, \overline{F}]$, U является идеалом во всех A_α, B — произвольная подалгебра A и $V = B \cap U$, то $B = \left\{G' * \left(\sum^{*} (B \cap A_\alpha)\right); V\right\}$, где $G' = [V, M', \overline{F}']$, причем в качестве M' берется

произвольная база пересечения алгебры B с подпространством, порожденным множеством $\bigcup A_\alpha$, над подпространством, порожденным множеством $\bigcup (B \bigcup A_\alpha)$. Отметим еще один результат: все разложения алгебры A в неассоциативную свободную сумму алгебр с одной и той же объединенной подалгеброй совпадают, если U является ненулевым идеалом в каждом слагаемом рассматриваемых свободных разложений. Доказательства только намечены. Л. А. Скорняков

8486. О структуре операторов замыкания полной структуры. Двингер (On the lattice of the closure operators of a complete lattice. D w i n g e r Ph.), Nieuw arch. wiskunde, 1956, **4**, № 3, 112—117 (англ.)

Оператором замыкания полной структуры L называется такое отображение φ элементов структуры L в себя, что: 1) из $a \leqslant b$ следует $a\varphi \leqslant b\varphi$ для любых $a, b \in L$; 2) $a \leqslant a\varphi$ для всякого $a \in L$; 3) $\varphi^2 = \varphi$. Если $a\varphi = a$, $a \in L$, то a называется замкнутым элементом в L. Оператор замыкания φ называется аддитивным, если $\varphi(a \bigcup b) = \varphi a \bigcup \varphi b$, и вполне аддитивным, если это свойство справедливо для объединения бесконечного множества элементов структуры. Множество элементов S называется S_1-пространством, если на полной структуре $\{S\}$ всех подмножеств множества S с частичным упорядочением по теоретико-множественному включению определен оператор замыкания, относительно которого все элементы (точки) множества S замкнуты. Если оператор замыкания в S_1-пространстве S аддитивен, то S есть T_1-пространство. Множество C_L всех операторов замыкания на полной структуре L образует полную структуру. Доказаны следующие утверждения.

Теорема I. Условия: 1) L есть T_1-пространство, 2) C_L есть модулярная структура, 3) L есть полная цепь — эквивалентны.

Теорема II. Если L — полная цепь, то оператор замыкания на L превращает L в нормальное хаусдорфово пространство, в котором интервалы, закрытые слева, образуют базис для открытых множеств, и подбазис для замкнутых множеств, т. е. всякое открытое множество может быть получено как сумма интервалов, закрытых слева, и всякое замкнутое множество может быть получено как пересечение конечных сумм интервалов, закрытых слева.

Теорема III. Условия: 1) θ есть вполне аддитивный оператор замыкания, 2) C_L есть вполне дистрибутивная булева алгебра, 3) L есть ординальная структура — эквивалентны. Ю. И. Соркин

8487. Структуры в топологии. I. Лесьёр (Les treillis en topologie. I. L e s i e u r L.), Sémin. A. Châtelet et P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1953—1954 (1956), **7**, № 3, 1—11 (франц.)

Если в структуре определена операция замыкания $a \to \bar{a}$ (Биркгоф Г., Теория структур, М., 1952, стр. 81), то элемент a, удовлетворящий соотношению $\bar{a} = a$, называется замкнутым. Для того чтобы на полной структуре S с 0 и 1 можно было определить операцию замыкания, необходимо и достаточно, чтобы в S содержалась подструктура Φ такая, что $0, 1 \in \Phi$ и $\bigcap f_\alpha = \Phi$, если $f_\alpha \in \Phi$. При этом Φ совпадает с множеством замкнутых элементов. Фильтром дистрибутивной структуры S с 0 и 1 называется ее непустое подмножество F, обладающее следующими свойствами: 1) $x, y \in F$ влечет $x \bigcap y \in F$; 2) $x \in F$, $z \geqslant x$ влечет $z \in F$. Фильтр $(a) = \{x : x \geqslant a\}$ называется главным. Для того чтобы существовало отображение $a \to V(a)$ полной дистрибутивной структуры S с 0 и 1 в множестве ее фильтров, обладающее свойствами: 1) $V(a) \subseteq (a)$; 2) $V(\bigcup a_\alpha) = \bigcup V(a_\alpha)$; 3) если $v \in V(a)$, то существует такой элемент $b \in V(a)$, что $v \in V(b)$; 4) $V(0) = (0)$, — необходимо и достаточно, чтобы в S существовала такая подструктура U, что $0, 1 \in U$ и $\bigcup u_\alpha \in U$, если $u_\alpha \in U$. При этом $v \in V(a)$ тогда и только тогда, когда $a \leqslant u \leqslant v$ для некоторого $u \in U$. В заключение обобщается одна теорема Гливенко (Bull. Acad. Roy. Belg., 1929, **15**, 83—88). Л. А. Скорняков

8488. Структуры в топологии. II. Лесьёр (Les treillis en topologie. II. L e s i e u r L.), Sémin. A. Châtelet et P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1953—1954 (1956), **7**, № 4, 1—10 (франц.)

Ч. I см. реф. 8487.

Говорят, что элемент a дистрибутивной структуры S с 0 и 1 отделен от $b \in S$, если существуют такие элементы $c, d \in S$, что $a \bigcap c = b \bigcap d = 0$, $c \bigcup d = 1$. Назовем Φ_1-структурой полную дистрибутивную структуру, в которой каждый ненулевой элемент есть сумма атомов, Φ_2-структурой Φ_1-структуру, в которой каждые два различных атома отделены, Φ_3-структурой Φ_1-структуру, в которой каждый атом a отделен от всякого элемента $p \not\geqslant a$, Φ_4-структурой Φ_1-структуру, в которой $a \bigcap b = 0$ влечет отделение a от b и B-структурой Φ_2-структуру, в которой из равенства $\bigcap x_\alpha = 0$ вытекает, что пересечение некоторого конечного числа элементов из множества $\{x_\alpha\}$ равно нулю. Структура S изоморфна структуре замкнутых подмножеств T_i-пространства [бикомпактного топологического пространства] тогда и только тогда, когда она является Φ_i-структурой [B-структурой]. Для того чтобы Φ_2-структура S была B-структурой, необходимо и достаточно, чтобы все максимальные (в смысле включения) фильтры структуры S были главными (реф. 8487). Доказывается, что B-структура оказывается Φ_3- и Φ_4-структурой.
Л. А. Скорняков

8489. Замечание о порядке свободных дистрибутивных структур. Ямамото (Note on the order of free distributive lattices. Y a m a m o t o K o i c h i), Sci. Rep. Kanazawa Univ., 1953, **2**, № 1, 5—6 (англ.)

Пусть $f(n)$ означает число элементов свободной дистрибутивной структуры с n образующими. Рассмотрением инволюций автор показывает, что если n четно, то четно и $f(n)$. Высказывается предположение, что для всех n $f(n)$ делится на любой простой делитель числа $n + 2$. P. M. Whitman

Перевод из Mat. Revs., 1956, **17**, № 1, 7.

8490. Алгебраические структуры. Картан (Structures algébriques. C a r t a n H e n r i), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1956, **35**, № 176, 288—298 (франц.)

Лекция для преподавателей математики, организованная французским математическим обществом. Во вступительной части отмечается все возрастающая роль алгебры в современной математике. Далее рассмотрены следующие вопросы: алгебраические операции и их свойства; алгебраическая система, как множество с несколькими алгебраическими операциями; изоморфизм систем; построение новых систем, исходя из данных, в частности, переход от системы к фактор-системе с помощью соотношения эквивалентности между элементами системы. Приведены многочисленные примеры. С. Д. Берман

8491. Некоторые приложения понятия о фактор-множестве. Бенедикти (Alcune applicazioni della nozione di insieme quoziente. B e n e d i c t y M a r i o), Archimede, 1957, **9**, № 1, 1—15 (итал.)

Излагается понятие о фактор-множестве, т. е. множестве классов эквивалентных элементов, получаемом из заданного множества путем введения бинарного соотношения эквивалентности, удовлетворяющего условиям рефлективности, симметрии и транзитивности. Приводятся примеры из теории групп (фактор-группа)

и теории колец (фактор-кольцо), а также геометрические примеры. В. К. Туркин

8492 Д. Структурная теория обобщенных p-колец. Левн (Structure theory for generalized p-rings. Levy Gene — Doct. diss. Univ. Oklahoma, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 11, 2228 (англ.)

В 1936 г. Стоун опубликовал теорию представления булевых колец. В 1937 г. Маккой и Монтгомери построили теорию представления для обобщенных булевых колец. Впоследствии эти кольца были названы p-кольцами. В настоящем исследовании обобщается понятие p-кольца и строится соответствующая теория представлений. Определяется q-кольцо. Используя результаты Джекобсона и Биркгофа, автор показывает, что характеристика q-кольца конечна и не содержит повторяющихся простых множителей. Доказывается также, что всякое q-кольцо изоморфно подпрямой сумме полей Галуа. При некоторых ограничениях всякая подпрямая сумма полей Галуа есть q-кольцо. Установлено, что кольцо является q-кольцом тогда и только тогда, когда число q имеет определенный вид. Строение q кольца все же остается неясным. Далее вводится понятие (q, c)-кольца. Доказываются теоремы, устанавливающие связь между q и c. С помощью двух теорем описывается строение (q, c)-колец. Теорема представления Маккоя и Монтгомери есть частный случай одной из этих теорем. Получены некоторые результаты для случая $q = c$. Автор выдвигает одно предположение. В 1945 г. Вод ввел другое обобщение p-кольца. Показано, что большинство колец, изученных Водом, суть (q, c)-кольца. Наконец, изучаются коммутативные, ассоциативные и дистрибутивные полиномиальные функции на (3,3)-кольцах.

Перевод из Dissart. Abstrs., 1955, **15**, № 11, 2228.

8493 Д. О строении топологических колец. Эллис (On the structure of topological rings. Ellis Kathryn Powell.—Doct. diss. State Univ. Iowa, 1955) Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 11, 2224—2225 (англ.)

Излагаются основные свойства топологических колец и дается анализ строения некоторого числа специальных колец. Исследуется вопрос о том, когда абелева группа может являться аддитивной группой топологического кольца с ненулевым умножением. Дается полный перечень колец, аддитивная группа которых изоморфна двумерному действительному векторному пространству, и колец с единицей, аддитивная группа которых изоморфна трехмерному действительному векторному пространству. Показано, что двумерные кольца с единицей над целыми числами образуют однопараметрическое семейство. Найдено, что на действительном цилиндре существуют кольца трех родов.

В. А. Андрунакиевич

См. также: 8415, 8416, 8583, 8585, 8695, 8696, 8704, 8708, 8742, 8862, 8866, 8868, 8879, 8880, 8886, 8888, 8889, 8910, 8930, 8931, 8933, 8942, 8950, 8956, 8957, 8961, 8963—8966, 8968, 8975, 8979 К.

ТОПОЛОГИЯ

8494. Обобщение теоремы Конига. Гофман (Generalization of a theorem of Konig. Hoffman A. J.), J. Wash. Acad. Sci., 1956, **46**, № 7, 211—212 (англ.)

Пусть R — множество элементов $P_1, P_2, \ldots, P_n$; $S = \{S_1, \ldots, S_m\}$ — семейство подмножеств множества R, а α — действительное положительное число, меньшее единицы. Будем обозначать через $\bar{T}$ число элементов множества $T \subset R$. Доказывается, что для существования такого множества $C \subset R$, что $|\overline{C \cap S_i} - \alpha \bar{S}_i| < 1$; $(i = 1 \ldots m)$ достаточно, чтобы определитель каждой квадратной подматрицы матрицы A был равен нулю, единице или минус единице.

Через $A = (a_{ij})$ обозначим (прямоугольную) матрицу инцидентности, где $a_{ij} = 1$, если $p_i \in S_j$; $a_{ij} = 0$, если $p_j \notin S_i$. На основании результатов еще не опубликованной своей совместной с Краскалем (Kruskal I. B.) работы автор выводит из предыдущей теоремы следующую теорему Конига (Konig D., Math. Ann., 1916, **77**, № 4, 453—465). Пусть R состоит из gk элементов и разложено в два семейства подмножеств $T = \{T_1, \ldots, T_q\}$ и $U = \{U_1, \ldots, U_q\}$, где $R = \bigcup' T_i = \bigcup U_i$ и $T_i \cap T_j = \varnothing$, $U_i \cap U_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Предположим также, что для любого i число элементов в T_i и в U_i равно k. Тогда существует такое множество $C \subseteq R$, что $\bar{C} = q$ и $\overline{C \cap T_i} = \overline{C \cap U_i} = 1$ для всех $i = 1, \ldots q$. С. С. Рышков

8495. Метризуемость пространств разбиения. Стоун (Metrizability of decomposition spaces. Stone A. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 4, 690—700 (англ.)

Пусть f — квазикомпактное непрерывное отображение метрического пространства S на топологическое пространство E, т. е. такое отображение, что подмножество Y пространства E открыто (замкнуто) в E тогда и только тогда, когда множество $f^{-1}(Y)$ открыто (замкнуто) в S. Цель работы — выяснить условия метризуемости пространства E.

Теорема 1. Пусть f — замкнутое непрерывное отображение метрического пространства S на топологическое пространство E. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. E удовлетворяет первой аксиоме счетности.
2. Для каждой точки $p \in E$ множество $f^{-1}(p)$ имеет компактную границу (в S).
3. Пространство E метризуемо.

Эта теорема была доказана также Морита и Ханаи (РЖМат, 1957, 231).

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 1 и пространство S имеет счетную базу или локально сепарабельно, или компактно или локально-компактно, то и пространство E обладает соответственно теми же свойствами.

Следствие 2. Если f — замкнуто непрерывное отображение метрического пространства S на локально-счетно-компактное пространство E, то E метризуемо.

Теорема 2. Пусть $E = f(S)$ — такое квазикомпактное непрерывное отображение локально-периферийно-компактного метрического пространства S на хаусдорфово пространство E, что для каждой точки $p \in E$, множество $f^{-1}(p)$ связно и множество Гр $f^{-1}(p)$ компактно. Тогда отображение f замкнуто, а пространство E является метризуемым локально-периферийно-компактным. (Пространство E называется локально-периферийно-компактным, если каждая точка $p \in E$ имеет сколь угодно малую окрестность с компактной границей).

Теорема 3. Если f — квазикомпактное непрерывное отображение локально-компактного метрического пространства S со счетной базой на хаусдорфово пространство E с первой аксиомой счетности, то E яв-

ляется локально-компактным метрическим пространством со счетной базой.

Из лемм, применяющихся при доказательстве теоремы 3, вытекает

Следствие. Если f — квазикомпактное непрерывное отображение метрического пространства S со счетной базой на регулярное пространство E с первой аксиомой счетности, то E является метрическим пространством со счетной базой.

Теорема 3′. Пусть f — квазикомпактное непрерывное отображение локально-компактного метрического пространства S на хаусдорфово пространство E с первой аксиомой счетности. Предположим, что множества Гр $(f^{-1}(p))$ обладают счетными всюду плотными в них подмножествами и что пространство E паракомпактно. Тогда E является локально-компактным метрическим пространством.

Теорема 4. Если f — открытое непрерывное отображение метрического локально-сепарабельного пространства S на регулярное пространство E и если для всякой точки $p \in E$ множество $f^{-1}(p)$ сепарабельно, то E является метризуемым локально-сепарабельным пространством.

Следствие. Если f — открытое непрерывное отображение локально-компактного метрического пространства S на хаусдорфово пространство E, и для каждой точки $p \in E$ множество $f^{-1}(p)$ содержит счетное плотное подмножество, то E является локально-компактным метрическим пространством.

Теорема 5. Для того чтобы разбиение метрического пространства E на замкнутые непустые множества F_p было вполне непрерывно, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1. Каждое множество F_p открыто или компактно.

2. Если F_p — компакт и $E > 0$, то существует такое $\delta > 0$, что $d(F_p F_q) < \varepsilon$, как только $\rho(F_p, F_q) < \delta$ (d — отклонение по Хаусдорфу).

Следствие. Если f — открытое и замкнутое одновременно непрерывное отображение метрического пространства S на E, то пространство E метризуемо с метрикой $\sigma(p, q) = d(f^{-1}(p), f^{-1}(q))$. Этот результат получил также Балачандран (РЖМат, 1956, 3723).

Приведены примеры, показывающие, что ограничения, наложенные в условиях теорем 3, 3′, 4, не являются излишними. А. С. Пархоменко

8496. О вложении непрерывного разбиения континуума в вполне непрерывное разбиение на континуумы. Хамстром (Concerning the imbedding of upper semicontinuous collections of continua in continuous collection of continua. Hamstrom Mary-Elizabeth), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 4, 793—810 (англ.)

Елии G и W — две совокупности попарно не пересекающихся точечных множеств, $G = \{g\}$, $W = \{w\}$, то говорят, что система G вложена в систему W, если каждый элемент $g \in G$ содержится в некотором $w \in W$ и каждый элемент $w \in W$ содержит один и только один элемент g. В статье изучается непрерывное разбиение G плоского континуума на простые дуги и простые замкнутые кривые, для которого пространство разбиения есть простая дуга. Дается необходимое и достаточное условие вложимости разбиения G в W, где W — вполне непрерывное разбиение плоского континуума на простые замкнутые кривые. Л. В. Келдыш

8497. О вполне непрерывном разбиении плоской непрерывной кривой на непрерывные кривые. Андерсон, Хамстром (A note on continuous collections of continuous curves filling up a continuous curve in the plane. Anderson R. D., Hamstrom Mary-Elizabeth), Proc. Amer. Mah. Soc., 1954, № 5, 748—752 (англ.)

Доказывается теорема: Если G — вполне непрерывное разбиение плоского локально связного континуума на невырождающиеся локально связные континуумы (непрерывные кривые), то пространство разбиения есть либо простая дуга, либо простая замкнутая кривая. Иными словами, если при открытом отображении плоского локально связного континуума прообразы всех точек — невырождающиеся локально связные континуумы, то образ есть простая дуга или простой замкнутый контур. Л. В. Келдыш

8498. Вполне непрерывные разбиения непрерывных кривых. Андерсон (Continuous collections of continuous curves. Anderson R. D.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 2, 363—367 (англ.)

Строится одномерный континуум, который монотонно-открыто отображается на гильбертов параллелепипед, причем все элементы соответствующего вполне непрерывного разбиения — локально связные континуумы. Метод построения аналогичен применявшемуся автором ранее (Duke Math. J., 1952, **19**, 359—366) для построения одномерного континуума, который монотонно-открыто отображается на трехмерный куб. Автор указывает на ее изменения, которые нужно сделать в цитированной работе, чтобы получить сформулированный выше более сильный результат. Л. В. Келдыш

8499. К проблеме инвариантности гомотопической стабильности точек при декартовом умножении. Ногути (On the problem of the invariance of homotopical stability of points under Cartesian multiplication. Noguchi Hiroshi), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 4, 651—655 (англ.)

Дается отрицательный ответ на поставленный Борсуком и Яворским вопрос об инвариантности гомотопической стабильности точек при топологическом умножении (РЖМат, 1954, 5077).

Строится следующий пример: вырежем из пространства Пуанкаре (т. е. трехмерного многообразия, группы гомологий которого те же, что и у сферы S^3, а фундаментальная группа нетривиальна) малый открытый симплекс и обозначим оставшееся пространство через A. В комбинаторном объединении $(a_0 \cup a_1) * A$ пространства A с парой точек A_0 и A_1 точка A_0 гомотопически стабильна. Любая точка $b_0 \in S^n$ также гомотопически стабильна. Автор показывает, что в произведении $[(a_0 \cup a_1) * A] \times S^n$ точка (a_0, b_0) лабильна, $(n \geqslant 1)$. Множество $[(a_0 \cup a_1) * A] \times S^1$ было построено для других целей Беглем (Begle E. G., Bull. Amer. Math. Soc. 1943, **49**, 386—387). С. С. Рышков

8500. Локально конечнозначные когомологические группы. Гордон (Locally-finitely-valued cohomology groups. Gordon William L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 4, 656—662 (англ.)

В определении групп когомологий топологического пространства X (групп Александера—Колмогорова), в качестве n-мерных цепей берутся произвольные функции на топологической степени X^n со значениями в выбранной группе G. Автор доказывает, что в случае, когда X — паракомпактное пространство, те же группы могут быть построены на локально конечнозначных функциях, т. е. на функциях φ, обладающих следующим свойством: для каждой точки $x \in X^n$ существует такая окрестность Ox, что множество значений функции φ на этой окрестности конечно. Доказывается, что локально конечнозначными функциями можно обойтись и при построении групп когомологий локально бикомпактного пространства. Из этого легко вытекает результат Кизи: для построения групп когомологий бикомпакта достаточно конечнозначных функций (Keesee J. W., Proc. Amer. Math. Soc., 1950, **1**, 418—422).

С. С. Рышков

8501. Продолжения отображений. Серр (Extension des applications-homotopie. Serre J.-P.), Sémin. H. Cartan. École Norm. Supér., 1949—1950 (1956), **2**, № 1, 1—6 (франц.)

Основные определения теории гомотопии. Указана связь между продолжениями и гомотопиями. Доказана лемма о продолжении гомотопии. М. М. Постников

8502. Гомотопические группы. Серр (Groupes d'homotopie. Serre J.-P.), Sémin. H. Cartan. École Norm. Supér., 1949—1950 (1956), **2**, № 2, 1—7 (франц.)

Определение и основные свойства гомотопических групп. Доказана теорема Гуревича (по Эйленбергу). М. М. Постников

8503. Задачи продолжения и гомотопии; теория препятствий. Картан (Problèmes d'homotopie et de prolongement: théorie des obstructions. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. École Norm. Supér., 1949—1950 (1956), **2**, № 3, 1—10 (франц.)

Отображения локально компактных пространств в полиэдры: размерность, задачи продолжения и гомотопии. Картан (Applications d'espaces localement compacts dans les polyèdres: dimension, problèmes d'homotopie et de prolongement. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. École Norm. Supér. 1949—1950 (1956), **2**, № 4, 1—10 (франц.)

Для отображения $X \to Y$, где X — произвольное, а Y — односвязное, асферичное в размерностях $< n$ пространство, определяются характеристический класс когомологий, первая различающая и первое препятствие (методом, пригодным для любой теории гомологий) и, в предположении, что хотя бы одно из пространств X или Y является полиэдром, доказываются классические теоремы Хопфа—Уитни о продолжении и классификации отображений; при этом, в случае, когда полиэдром является X, используются сингулярные гомологии, а в случае когда полиэдром является Y, — спектральные (в связи с чем пространство X предполагается локально компактным). Первый случай рассматривается на основе общей классической теории препятствий и различающих для отображений полиэдров в произвольные (гомотопически простые) пространства, а второй сводится к первому на основании того, что для отображения замкнутого подмножества локально компактного пространства в полиэдр задача продолжения сводится к задаче продолжения некоторого отображения полиэдров (нервов соответствующих покрытий). С помощью последнего замечания весьма просто доказываются также известные характеристики размерности локально компактных пространств ($\dim X \leqslant n$ тогда и только тогда, когда для любого компактного множества $X' \subset X$ и любого замкнутого множества $A \subset X'$ каждое отображение $A \to S^n$ можно продолжить до отображения $X' \to S^n$, а также тогда и только тогда, когда для любого открытого покрытия R пространства X существует такое отображение $X \to P$, где P — полиэдр размерности $\leqslant n$, что прообразы всех точек полиэдра P образуют вписанное в R покрытие).

Наконец, указывается, что из первой характеристики и из теоремы продолжения немедленно следует известная когомологическая характеристика размерности ($\dim X$ равно наибольшему n, для которого существует такое замкнутое подмножество $A \subset X$, что $H^n(X, A; Z) \neq 0$). М. М. Постников

8504. Примеры расслоенных пространств. Бланшар (Exemples d'espaces fibrés. Blanchard A.), Sémin. H. Cartan. École Norm. Supér., 1949—1950 (1956), **2**, № 5, 1—5 (франц.)

Рассмотрены классические примеры расслоенных пространств. М. М. Постников

8505. Общая теория расслоенных пространств. I. Картан (Généralités sur les espaces fibrés. I. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. École Norm. Supér. 1949—1950 (1956), **2**, № 6, 1—13 (франц.)

Рассмотрены различные варианты определения расслоенного пространства. М. М. Постников

8506. Общая теория расслоенных пространств. II. Картан (Généralités sur les espaces fibrés. II. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. Ecole Norm. Supér., 1949—1950 (1956), **2**, № 7, 1—5 (франц.)

Рассмотрены некоторые вопросы, связанные с задачей о существовании секущей поверхности (случай, когда одно главное расслоенное пространство является прообразом другого; случай, когда структурную группу расслоенного пространства можно свести к ее подгруппе и т. п.). М. М. Постников

8507. Общая теория расслоенных пространств. III. Картан (Généralités sur les espaces fibrés. III. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. École Norm. Supér., 1949—1950 (1956), **2**, № 8, 1—8 (франц.)

Доказана теорема о накрывающей гомотопии и некоторые ее следствия, например следующее: свойство отображений баз главных расслоенных пространств (с одной и той же группой) индуцироваться является отображением самих расслоенных пространств является гомотопическим свойством, т. е. вместе с некоторым отображением все гомотопные ему отображения также обладают этим свойством. Доказана также теорема о связи между универсальностью главного расслоения и асферичностью его пространства. М. М. Постников

8508. Общая теория расслоенных пространств. Картан (Généralités sur les espaces fibrés. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. École Norm. Supér., 1949—1950 (1956), **2**, № 8 bis, 1—6 (франц.)

Излагаются некоторые дополнения к предыдущим трем сообщениям. В частности, доказывается при некоторых весьма общих предположениях, что расслоенное пространство с базой $B \times I$ имеет вид $E \times I$, где E — расслоенное пространство с базой B (эта теорема имеет много важных следствий; в частности, из нее непосредственно вытекает теорема о накрывающей гомотопии). М. М. Постников.

8509. Относительные гомотопические группы. Приложения к расслоенным пространствам. Серр (Groupes d'homotopie relatifs. Application aux espaces fibrés. Serre J.-P.), Sémin. H. Cartan. École Norm. Supér., 1949 — 1950 (1956), **2**, № 9, 1—8 (франц.)

Определяются относительные гомотопические группы, доказывается аксиома точности и строится гомотопическая последовательность расслоения. В качестве применения доказываются, в частности, теорема Ху о коммутативности фундаментальной группы однородного пространства (со связной стационарной подгруппой) и теорема Ивасавы об односвязности нормальных делителей и факторгрупп односвязной группы Ли. М. М. Постников

8510. Гомотопические группы расслоенных пространств. Применения. Серр (Homotopie des espaces fibrés — applications. Serre J.-P.), Sémin. H. Cartan. École Norm. Supér., 1949—1950 (1956), **2**, № 10, 1—7 (франц.)

Доказаны некоторые простые следствия точности гомотопической последовательности расслоения. В частности, доказана n-универсальность естественного расслоения многообразия Штифеля. Известным способом отсюда выведено существование классифицирующих пространств для любой связной группы Ли. В заключение вычислены фундаментальные группы классических линейных групп и доказаны некоторые простые теоремы, связанные с расслоениями сфер (как, например, известный изоморфизм $\pi_i(S^2) \approx \pi_i(S^3)$, $i > 2$). В дополнение доказана теорема Гуревича о том, что сложение в гомотопических группах топо-

логических групп порождается операцией группы. М. М. Постников

8511. Препятствия к стягиванию. Спаньер, Уайтхед (Obstructions to compression. Spanier E. H., Whitehead J. H. C.), Quart. J. Math., 1955, **6**, № 22, 91—100 (англ.)

Пусть $f_i(X, A) \to (Y, B)$ — отображение пары топологических пространств (X, A) в пару (Y, B) и пусть Y' — подпространство пространства Y, содержащее подпространство B. Ставится вопрос о возможности стягивания (сжатия) отображения f в подпространство Y', т. е. о существовании такой деформации $f_t : (X, A) \to (Y, B)$, что $f_0 = f$ и $f_1(X, A) \to (Y', B)$.

Замечая, что все результаты статьи справедливы в более общих предположениях, авторы ограничиваются рассмотрением клеточных разбиений в смысле Уайтхеда. Итак, пусть X и Y — клеточные разбиения, A и B — их, возможно, пустые подразбиения. Через $\overline{X}^n$ обозначается объединение подразбиения A и n-мерного остова X^n разбиения X. Соответственно $\overline{Y}^n = Y^n \cup B$. Предполагается, что для любого неотрицательного n в $Y \setminus B$ существует лишь конечное число n-мерных клеток. Если к тому же $\dim(X \setminus A) \leqslant 2k-2$, то для каждого отображения $f : (X, A) \to (\overline{Y}^k, B)$ авторы строят первое препятствие к стягиванию отображения f в $\overline{Y}^{k-1}$, т. е. некоторый цикл $Z_k(f)$ с коэффициентами в k-й когомотопической группе $\pi^k(X, A)$ пары (X, A).

Цикл $Z_k(f)$ обладает следующими свойствами:

I. Если f стягиваемо в $\overline{Y}^{k-1}$, то $Z_k(f) = 0$.

II. Если Y^{k-1} асферично во всех размерностях, меньших m, где $m \leqslant k-1$ и $\dim(X \setminus A) \leqslant k+m-1$, то при $Z_k(f) = 0$ отображение f стягиваемо в $\overline{Y}^{k-1}$ (теорема 2.1).

Пусть теперь $T = X \times O \cup A \times I \cup X \times 1 \subset X \times I$ и пусть задана деформация $(*) : F : (X \times I, T, A \times I) \to (\overline{Y}^{k+1}, Y^k, B)$, соединяющая два отображения $f_i : (X, A) \to (\overline{Y}^k, B)$, где $f_i(X) = F(X, i)$ при $i = 0,1$. По деформации F строится цепь $d_{k+1}(F) \in C_{k+1}(Y, B, \pi^k(X, A))$, обладающая свойствами:

$$\partial d_{k+1}(F) = Z_k(f_1) - Z_k(f_0),$$

$$d_{k+1}(F + F_1) = d_{k+1}(F) + d_{k+1}(F_1),$$

где F_1 — деформация вида $(*)$, соединяющая отображения f_1 и $f_2 : (X, A) \to (\overline{Y}^k, B)$, а $(F + F_1)$ определяется по формулам: $(F + F_1)(X, t) = F(X, 2t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ и $(F + F_1)(X, t) = F_1(X, 2t-1)$ при $1 \geqslant t \geqslant \frac{1}{2}$.

Доказывается теорема: Если каждое отображение $(X, A) \to (Y^k, B)$ гомотопно в $(\overline{Y}^k, B)$ отображению, постоянному на X, если $\dim(X \setminus A) \leqslant k+m-1$, и если, кроме того, заданы отображение $f : (X, A) \to (Y^k, B)$ и цепь $C \in C_{k+1}(Y, B, \pi^k(X, A))$, то существует такая деформация вида $(*)$, что $F(X, 0) = f(X)$ и $d_{k+1}(F) = C$.

Если к тому же комплекс $\overline{Y}^{k-1}$ асферичен во всех размерностях, меньших $m+1 \leqslant k$, то из предыдущих теорем следует теорема (2.8): Отображение $f : (X, A) \to (\overline{Y}^k, B)$ тогда и только тогда гомотопно в $\overline{Y}^{k-1}$ (относительно A) отображению пары (X, A) в пару $(\overline{Y}^{k-1}, A)$, когда $\{Z_k(f)\} = 0$.

В виде приложения этой теоремы доказана известная теорема Л. С. Понтрягина о стягивании отображения в подкомплекс (Изв. АН СССР, сер. матем., 1949, **13**, № 3, 193—200). С. С. Рышков

512. О гомотопических группах функциональных пространств. Иноуэ (On homotopy groups of function spaces. Inoue Yoshiro), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 4, 222—227 (англ.)

Пусть Y — топологическое пространство. Скажем, что пространство X принадлежит классу $\mathfrak{A}(Y)$, если для каждого непрерывного отображения σ симплекса T в пространство отображений YX формула $\sigma'(t, x) = \sigma(t)(x)$, $(t, x) \in T \times x$ определяет непрерывное отображение $\sigma' : T \times X \to Y$. Если, например, X — локально компактное регулярное пространство, то $X \in \mathfrak{A}(X)$ для любого Y.

Пусть X и Y — топологические пространства и $X_0 \subset X$. Если любое отображение $f : X \cup (X_0 \times T) \to Y$, где T — симплекс, может быть продолжено на все произведение $X \times T$, то, по определению, пара (X, X_0) принадлежит классу $\mathfrak{B}(Y)$. (Если, например, X_0 — подкомплекс конечного комплекса X, то пара (X, X_0) принадлежит классу $\mathfrak{B}(Y)$ при любом Y).

Пусть теперь $(X; X_1, X_2, X_3)$ и $(Y; Y_1, Y_2, Y_3)$ — четверки топологических пространств, причем X_1, X_2 и X_3 — замкнутые подмножества пространства X и $X_3 \subseteq X_1 \cap X_2$, а $Y_3 \subseteq Y_1 \cap Y_2$. Обозначим через Ω и $\mathfrak{B}$ пространства отображений $f : (X; X_1, X_2, X_3) \to (Y; Y_1, Y_2, Y_3)$, соответственно $f : (X_1, X_2 \cap X_2, X_3) \to (Y_1, Y_1 \cap Y_2, Y_3)$ в компактно-открытой топологии.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены следующие условия: 1) $X \in \mathfrak{A}(Y)$, $X_1 \in \mathfrak{A}(Y_1)$, 2) $(X, X_1 \cup X_2) \in \mathfrak{B}(Y)$; $(X_2, X_1 \cap X_2) \in \mathfrak{B}(Y_2)$.

Определим отображение $p : \Omega \to \mathfrak{B}$, поставив в соответствие отображению $f \in \Omega$ отображение $pf \in \mathfrak{B}$, равное отображению f, рассматриваемому лишь на множестве X. Обозначим теперь через $\Omega(f)$ и $\mathfrak{B}(g)$ компоненты множеств Ω и $\mathfrak{B}$ соответственно, содержащие отображения f и g.

Теорема 6. $(\Omega(f), P, \mathfrak{B}(pf))$ есть расслоенное пространство. Из этого следует, что $(\Omega, p, p\Omega)$ также есть расслоенное пространство. Слой его обозначим через φ.

Вводится следующее условие C1, накладываемое на тройку $(X; X_1, X_2)$: Существует такая ретракция $\omega : X \to X_1$, что $\omega | X_2$ есть отображение на все множество $X_1 \cap X_2$.

Теорема 7. Если тройка $(X; X_1, X_2)$ удовлетворяет условию (C1), то расслоенное пространство $(\Omega, p, p\Omega)$ имеет секущую поверхность.

Теорема 8. Если выполнено условие (C1), то имеет место соотношение

$$\pi_n(\Omega, k_{y_0}) \approx \pi_n(\varphi, k_{y_0}) + \pi_n(\mathfrak{B}, k_{y_0}), \quad n \geqslant 2,$$

где $k_{y_0} : X \to Y_0 \in Y_3$, а φ — соответствующий слой расслоения $(\Omega, p, p\Omega)$.

Аналогичная теорема имеет место и для фундаментальных групп.

Автор дает некоторые конкретные применения теоремы 8, например, доказывает следующее соотношение для абгомотопических групп:

$$\underline{K}^{n+p}_{n+r}(\underline{Y}, y_0) \approx \underline{\pi}_{n+r+1}(\overline{Y}, y_0) + \underline{\pi}_{n+p}(Y, y_0).$$

Обозначения, а также определение абгомотопических групп см. в предыдущей статье автора (РЖМат, 1956, 8691), к которой реферируемая работа примыкает по методам и результатам. С. С. Рышков

8513. О точной паре CW-триады. Барратт, Уайтхед (On the exact couple of a CW-triad. Barratt M. G., Whitehead J. H. C.), Proc. London Math. Soc., 1955, **5**, № 19, 330—341 (англ.)

Пусть X — клеточное разбиение и A, B, C — такие

его непустые подразбиения, что $X = A \cup B$, $C = A \cap B$, $A^1 \subset C$, $\pi_i(B, C) = 0$ при $i < n$ и $\pi_1(C) = 1$. Положим

$$\underline{C}_{p+1,\,m+1} = \pi_{p+n}(A^{m+1} \cup B;\ A^{m+1} \cup C,\ A^m \cup B),$$

$$\underline{A}_{p,\,m} = \pi_{p+n-1}(A^m \cup B;\ A^m \cup C,\ B).$$

Относительно естественных отображений $\underline{C}_{p+1,\,m+1} \to \underline{A}_{p,\,m}$, $\underline{A}_{p,\,m} \to \underline{A}_{p,\,m+1}$ и $\underline{A}_{p,\,m+1} \to \underline{C}_{p,\,m+1}$ группы $\underline{A} = \sum_{p,\,m} \underline{A}_{p,\,m}$ и $\underline{C} = \sum_{p,\,m} \underline{C}_{p,\,m}$ образуют точную пару. Оказывается, что производная пара $\langle \underline{A}', \underline{C}' \rangle$ (РЖМат, 1954, 2909) является гомотопическим инвариантом триады $(X; A, B)$. „Разворачивая" пару $\langle \underline{A}', \underline{C}' \rangle$ в точные последовательности, авторы получают, в частности, точную последовательность

$$\to \pi_{m+n-1}(X;\ A,\ B) \to H_m(A,\ C;\ H_n(B,\ C)) \to$$

$$\to \Gamma_{m+n-2} \to \dots,$$

где Γ_{m+n-2} — образ гомоморфизма $\underline{A}_{m,\,m-1} \to \underline{A}_{m,\,m}$, являющуюся обобщением на случай триад известной точной последовательности, построенной Уайтхедом (Whitehead J. H. C., Ann. Math., 1950, **52**, 51—110) в случае одного клеточного разбиения X.

Работа содержит также большое число отдельных результатов и замечаний о гомотопических группах триад и пар.

М. М. Постников

8514. Комплекс стандартных путей и гомотопические группы n-ад. Тода (Complex of the standard paths and n-ad homotopy groups. Toda Hirosi), J. Inst. Polytechn. Osaka Univ., 1955, **A6**, № 2, 101—120 (англ.)

Клеточное разбиение L с единственной вершиной e^0 и определенным в нем непрерывным умножением, относительно которого L является свободной (в алгебраическом смысле) полугруппой с единицей e^0, автор называет FM-разбиением (FM-комплексом), если произведение любых двух клеток этого разбиения также является клеткой разбиения. Очевидно, что на любом FM-разбиении L существует такая непрерывная действительная функция $\rho(x)$, что $\rho(xy) = \rho(x) + \rho(y)$ и $\rho(x) > 0$, если $x \neq e^0$. На произведении $L \times I$, где $I = [0, 1]$, рассмотрим отношения эквивалентности $\equiv$, удовлетворяющие некоторым из следующих трех условий: 1) $(x_1, t_1) \equiv (x_2, t_2)$, если $x_1 = x_2 = e^0$; 2) $(x_1, t_1) \equiv (x_2, t_2)$, если существует такая точка y, что $x_1 = x_2 y$ и $t_2 \rho(x_2) = t_1 \rho(x_1) \leqslant \rho(y)$; 3) $(x_1, t_1) \equiv (x_2, t_2)$, если существует такая точка y, что $x_1 = y x_2$ и $\rho(y) \leqslant t_1 \rho(x_1) = t_2 \rho(x_2) + \rho(y)$. Фактор-пространство пространства $L \times I$ по минимальному отношению эквивалентности, удовлетворяющему условиям 1), 2) и 3) (соответственно условиям 1) и 3)), обозначим через $B(L)$ (соответственно через $\omega(B(L),\ B(L))$), а естественные отображения отождествления $L \times I \to B(L)$ и $L \times I \to \omega(B(L),\ B(L))$ — через d и $\bar{d}$ соответственно.

Оказывается, что пространства $B(L)$ и $\omega(B(L),\ B(L))$ естественным образом определяются как клеточные разбиения, с единственными вершинами $d(e^0, 0)$ и $\bar{d}(e^0, 0)$ соответственно (эти вершины также обозначаются через e^0).

Любой точке $\bar{d}(x, t) \in \omega(K, K)$, где $K = B(L)$, отнесем кончающийся в точке e^0 путь $l_{x(t)}$ пространства K, положив $l_{x(t)}(u) = d(x,\ t + u - tu)$. Получающееся отображение $i : \omega(K, K) \to \Omega(K, K)$, где $\Omega(K, K)$ — пространство всех кончающихся в точке e^0 путей пространства K, очевидно, непрерывно и является взаимно однозначным (но, вообще говоря, не гомеоморфным) отображением пространства $\omega(K, K)$ в пространство $\Omega(K, K)$.

Для любого подразбиения K' разбиения K отображение i переводит полный прообраз $\omega(K, K')$ подразбиения K' при естественном отображении $\omega(K, K) \to K$ в подпространство $\Omega(K, K') \subset \Omega(K, K)$, состоящее из путей, начинающихся в точках подразбиения K'. В частности, в пространство петель $\Omega(K)$ отображается подразбиение $\omega(K)$, изоморфное, очевидно, разбиению L. Основной результат: для любого подразбиения $K' \subset K$ и любого $p \geqslant 0$ гомоморфизм

$$i_* : \pi_p(\omega(K, K')) \to \pi_p(\Omega(K, K')),$$

индуцированный отображением i, является изоморфизмом. Компонируя этот изоморфизм с естественным изоморфизмом $\pi_p(\Omega(K, K')) \approx \pi_{p+1}(K, K')$, мы получим изоморфизм $\pi_p(\omega(K, K')) \approx \pi_{p+1}(K, K')$. В частности, $\pi_p(L) \approx \pi_{p+1}(K)$. Эта теорема применяется к изучению гомотопических групп произвольного пространства, на основании следующего предложения: для любого односвязного пространства X существует такое клеточное разбиение K вида $B(L)$ и такое отображение $f : K \to X$, что $f_x : \pi_p(K) \approx \pi_p(X)$ для всех p.

Измененные общие построения применяются к доказательству следующей теоремы о гомотопических группах $(n+1)$-ад. $(n+1)$-адой называется система n подмножеств $X_1, \dots, X_n$ пространства X, имеющих непустое пересечение X_0; гомотопической m-мерной группой $\pi_m(X;\ X_1, \dots, X_n)$ $(n+1)$-ады $(X;\ X_1, \dots, X_n)$ в точке $x_0 \in X_0$ называется $(m-n)$-мерная гомотопическая группа пространства всех отображений $\left(S^n, S_0^{n-1}, \dots S_n^{n-1}\right) \to \left(X, x_0, X_1, \dots, X_n\right)$, где S^n — упорядоченный n-мерный симплекс, а S_i^{n-1} — его грани.

Пусть $M, M_1, \dots M_n$ — такие связные подразбиения клеточного разбиения K, что $K = M_1 \cup \dots \cup M_n$, $M_i \cap M_j = M$ и, кроме того, $\pi_1(M) = \pi_1(M_i) = 0$ и $\pi_2(M_i, M) = 0$ для всех i и j $(i \neq j)$. Тогда, если $H_p(M_i, M) \in G$ для всех $p \leqslant q_i$, где G — класс абелевых групп, удовлетворяющий аксиомам (II_B) и (III), то $\pi_p(K;\ K_1 \dots, K_n) \in G$ для всех $p \leqslant Q$, где $Q = \sum q_i$, а $K_i = K \setminus (M_i \setminus M)$ и группа $\pi_{Q+1}(K;\ K_1, \dots, K_n)$ G-изоморфна прямой сумме $(n-1)!$ экземпляров группы $H_{q_1+1}(M_1, M) \otimes \dots \otimes H_{q_n+1}(M_n, M)$.

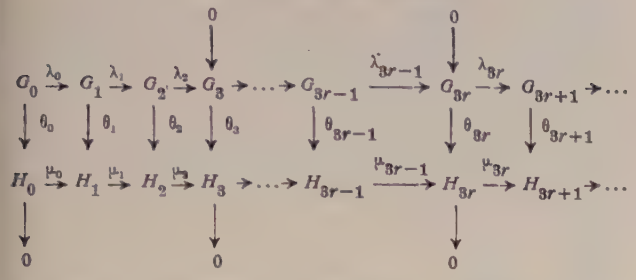
М. М. Постников

8515. Первая нетривиальная группа $(n+1)$-ады. Барратт, Уайтхед (The first non-vanishing group of an $(n+1)$-ad. Barratt M. G., Whitehead J. H. C.), Proc. London Math. Soc., 1956, **6**, № 23, 417—439 (англ.)

Для случая, когда класс C состоит из тривиальных групп, уточнена теорема Тода о группе $\pi_{Q+1}(K;\ K_1, \dots, K_n)$ (реф. 8514). Уточнение состоит в том, что указанное в этой теореме прямое разложение группы $\pi_{Q+1}(K;\ K_1, \dots, K_n)$ описано в явном виде с помощью некоторых операций (обобщающих на случай n-ад известное умножение Уайтхеда).

Работа содержит также интересные результаты о гомотопических группах триад и пар. В частности, указаны некоторые условия, достаточные для того, чтобы любой элемент гомотопической группы триады разлагался в сумму произведений Уайтхеда элементов данных (меньших) размерностей. При исследовании гомотопических групп пар используется следующая лемма, имеющая и самостоятельный интерес:

Для любой коммутативной диаграммы



с точными строками и столбцами последовательность

$$\mathrm{Ker}\,(\mu_0 \circ \theta_0) \xrightarrow{\lambda_0} G_1 \xrightarrow{(\lambda_1,\,\theta_1)} G_1 + H_1 \xrightarrow{\theta_1 - \mu_1}$$

$$\to H_2 \xrightarrow{\lambda_3 \circ \theta_3^{-1} \circ \mu_2} G_4 \to \ldots \to G_r \xrightarrow{(\lambda_r,\,\theta_r)}$$

$$\to G_{r+1} + H_r \xrightarrow{\theta_{r+1} - \mu_r} H_{r+1} \to$$

$$\to \xrightarrow{\lambda_{r+2} \circ \theta_{r+2}^{-1} \circ \mu_{r+1}} G_{r+3} \to \ldots$$

точна. Непосредственным следствием этой леммы является, например, теорема об аддиционных последовательностях собственных триад (Eilenberg S., Steenrod N. E., Foundations of algebraic topology, Princeton, 1952).

М. М. Постников

8516. Некоторые результаты о когомотопических группах. Питерсон (Some results on cohomotopy groups. Peterson Franklin P.), Amer. J. Math., 1956, **78**, № 2, 243—258 (англ.)

Пусть K — клеточное разбиение размерности N, L — произвольное его подразбиение, $\pi^r(K, L)$ — когомотопическая группа пары (K, L) в размерности $r > \frac{N+1}{2}$, $\eta^r : \pi^r(K, L) \to H^r(K, L)$ — естественное отображение, G — класс абелевых групп, удовлетворяющий либо аксиоме II_A, либо аксиоме II_B (РЖМат, 1954, 5086), $\alpha(C)$ — наибольшее число, удовлетворяющее следующему условию: если $0 < t - s < \alpha(C)$, где $t < 2s - 1$, то $\pi_t(S^s) \in C$. Пусть, далее, n — некоторое целое число, большее числа $\frac{N+1}{2}$, произвольное, если класс C удовлетворяет аксиоме II_B, и большее числа $N - \alpha(C)$, если класс C удовлетворяет только аксиоме II_A, и пусть $\bar{n} = n - 1$, если класс C удовлетворяет аксиоме II_A, и $\bar{n} = \max\left(\frac{N+1}{2},\ n - \alpha(C)\right)$, если класс C удовлетворяет аксиоме II_B (обозначение $\bar{n}$ принадлежит референту). Оказывается, что если $H^r(K, L) \in C$ для всех $r > K$, то для всех $r > \bar{n}$ отображение η^r является C-изоморфизмом, а отображение $\eta^{\bar{n}}$ является C-эпиморфизмом (конечно, если $\bar{n} > \frac{N+1}{2}$). Отсюда, в частности, вытекают следующие утверждения:

1) (РЖМат, 1954, 5086) если $n > \frac{N+1}{2}$ и для всех $r > n$ группа $H^r(K, L)$ имеет конечное число образующих, то для тех же r группа $\pi^r(K, L)$ также имеет конечное число образующих и ее ранг равен рангу группы $H^r(K, L)$.

2) Если $n > \frac{N+1}{2} + 1$ и $H^r(K, L) = 0$ для всех $r > n$, то $\pi^r(K, L) = 0$ для всех $r > k$; кроме того, отображение η^n является изоморфизмом, а отображение η^{n-1} — эпиморфизмом.

3) Если $n > \frac{N+1}{2}$ и для всех $r > n$ группа $H^r(K, L)$ периодична и не имеет элементов порядка p, то для всех $r > \max\left(\frac{N+1}{2},\ n - 2p + 3\right)$ индуцированное отображением η^r отображение $\eta^r_{(p)} : \pi^r(K, L)_p \to H^r(K, L)_p$ примарных по p компонент является изоморфизмом, а отображение $\eta^{n-2p+3}_{(p)}$ является эпиморфизмом (конечно, если $n - 2p + 3 > \frac{N+1}{2}$).

Утверждение 2) допускает следующее уточнение: в условиях этого утверждения гомоморфизм η^{n-1} входит в следующую последовательность

$$\pi^{n-2}(K, L) \xrightarrow{\eta^{n-2}} H^{n-2}(K, L) \xrightarrow{Sq^2} H^n(K, L; Z_2) \xrightarrow{\Lambda}$$

$$\to \pi^{n-1}(K, L) \xrightarrow{\eta^{n-1}} H^{n-1}(K, L) \to 0,$$

где Λ — гомоморфизм Спаньера (Ann. Math., 1949, **50**, 203). Аналогично, в условиях утверждения 3) имеет место точная последовательность:

$$H^{r-1}(K, L) \xrightarrow{P^1} H^{r+2p-3}(K, L; Z_p) \xrightarrow{\mu}$$

$$\to \pi^r(K, L)_p \xrightarrow{\eta^r_{(p)}} H^r(K, L)_p \xrightarrow{P^1_{(p)}}$$

$$\to H^{r+2p-2}(K, L; Z_p),$$

если $r > \max\left(\frac{N+1}{2},\ n - 4p + 5\right)$, где μ — некоторый введенный автором гомоморфизм; кроме того, если $n - 4p + 5 > \frac{N+1}{2} + 1$, то имеет место точная последовательность

$$\pi^{n-4p+5}(K, L)_p \xrightarrow{\eta^{n-4p+5}_{(p)}} H^{n-4p+5}(K, L)_p \xrightarrow{P^1_{(p)}}$$

$$\to H^{n-2p+3}(K, L; Z_p).$$

Доказательство всех этих предложений основывается на изучении первой производной когомотопической точной пары для (K, L) (РЖМат, 1954, 2909).

В приложении к работе рассматривается формула универсальных коэффициентов. Приведен пример, показывающий, что в общем случае (без некоторых предположений конечности) эта формула неверна.

М. М. Постников

8517. Обобщенные когомотопические группы. Питерсон (Generalized cohomotopy groups. Peterson Franklin P.), Amer. J. Math., 1956, **78**, № 2, 259—281 (англ.)

Пусть K — клеточное разбиение размерности N, L — его произвольное подразбиение, X — линейно связное пространство, x_0 — некоторая точка пространства X и $\pi(K, L; X, x_0)$ — множество гомотопических классов отображений $(K, L) \to (X, x_0)$. Легко видеть, что если пространство X односвязно и асферично в размерностях $< n$, а $N \leqslant 2n - 2$, то множество $\pi(K, L; X, x_0)$ можно естественным образом определить как абелеву группу (изоморфную двумерной гомотопической группе пространства всех отображений $(K, L) \to (S^2X, x_0)$, где S^2X — двукратная надстройка над пространством X). В частности, множество $\pi(K, L; X, x_0)$ является группой, если пространство X имеет тип (G, n) (РЖМат, 1954, 2907), где G — произвольная абелева группа (и,

конечно, $n > \frac{N+1}{2}$). Получаемая группа обозначается через $\pi^n(K, L; G)$ и называется n-мерной когомотопической группой пары (K, L) с коэффициентами в группе G. Она не зависит от выбора пространства X, если только группа G не имеет элементов второго порядка.

Если $G = Z$, то группа $\pi^n(K, L; G)$ совпадает с n-мерной когомотопической группой $\pi^n(K, L)$ пары (K, L) в обычном смысле.

Группы $\pi^n(K, L; G)$ обладают следующими свойствами (для простоты мы предполагаем, что все группы коэффициентов не имеют элементов второго порядка):

1) любой точной последовательности $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ соответствует точная последовательность

$$\ldots \to \pi^n(K, L; G') \to \pi^n(K, L; G) \to \pi^n(K, L; G') \to \to \pi^{n+1}(K, L; G') \to \ldots,$$

Это соответствие является функтором как по аргументу (K, L), так и по аргументу $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$;

2) если число образующих группы G или разбиение K конечны, то имеет место точная последовательность (аналог формулы универсальных коэффициентов)

$$0 \to \pi^n(K, L) \otimes G \to \pi^n(K, L; G) \to \to \operatorname{Tor}(\pi^{n+1}(K, L), G) \to 0,$$

расщепляющаяся, если группа $\pi^n(K, L)$ имеет конечное число образующих (на примере показано, что без предположений конечности эта последовательность может и не быть точной);

3) группы $\pi^n(K, L; G)$ удовлетворяют всем аксиомам теории когомологий Эйленберга — Стинрода (в части, касающейся групп в размерностях $> \frac{N+1}{2}$);

4) для групп $\pi^n(K, L; G)$ имеет место теорема, аналогичная основной теореме предыдущей работы автора (реф. 8516).

Понятие когомотопической группы с коэффициентами позволяет обычным образом сформулировать определение когомотопической операции данного типа (n, q, A, B). Оказывается, что если $n + 1 \leqslant 2q - 2$, то когомотопические операции типа (n, q, A, B) являются гомоморфизмами и находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с элементами группы $\pi^q(X, x_0; B)$, где X — произвольное пространство типа (A, n). Что же касается последней группы, то для $q < n$ она является расширением группы

$$\operatorname{Ext}(A, Z_{(n+1-q)} \otimes B + \operatorname{Tor}(Z_{(n-q)}, B))$$

с помощью группы

$$\operatorname{Hom}(A, Z_{(n-q)} \otimes B + \operatorname{Tor}(Z_{(n-q-1)}, B)),$$

где $Z_{(r)} = \pi_{r+t}(S^t)$ для $r < t - 1$ (т. е. $Z_{(r)}$ — стационарная гомотопическая группа сфер высоты r), а для $q \geqslant n$ определяется формулой

$$\pi^q(X, x_0; B) \approx \begin{cases} \operatorname{Hom}(A, B), & \text{если } q = n, \\ \operatorname{Ext}(A, B), & \text{если } q = n+1, \\ 0, & \text{если } q > n+1. \end{cases}$$

В заключение автор замечает, что рассматривая отображения пространств, имеющих только одну отличную от нуля группу когомологий, можно двойственным образом ввести коэффициенты и в теорию гомотопических групп. М. М. Постников

8518. Об одной теореме Эйленберга — Маклейна. Накаока (On a theorem of Eilenberg — MacLane. Nakaoka Minoru), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1954, **A5**, № 1, 31—39 (англ.)

Доказано следующее обобщение известной теоремы Эйленберга — Маклейна. Пусть C — произвольный класс абелевых групп, удовлетворяющий аксиомам II_B и III (РЖМат, 1954, 5086), Y и Y' — односвязные пространства, C-асферичные в размерностях $i < q$, $i \neq n < q$. Тогда, если группы $\pi_n(Y)$ и $\pi_n(Y')$ C-изоморфны, то для любых C-изоморфных групп коэффициентов G и G' группы $H_i(Y; G)$ и $H_i(Y'; G')$ также C-изоморфны при любом $i < q$. Кроме того, C-изоморфными являются группы

$$H_q(Y; G)/\textstyle\sum_q(Y; G) \quad \text{и} \quad H_q(Y'; G')/\sum_q(Y'; G')$$

(как обычно, через $\sum_q$ обозначена подгруппа сферических классов гомологий).

В качестве следствия из этой теоремы доказано следующее предложение: Пусть Y — односвязное пространство, все группы гомологий которого имеют конечное число образующих, ρ_i — его числа Бетти и n — первая из положительных размерностей, в которой число Бетти ρ_n отлично от нуля. Тогда, если существует такое $l \not\equiv 0 \pmod n$, что $\rho_i \neq 0$ или такое $l = qn$, что $\rho_i \neq \binom{q + \rho_n - 1}{q}$, если n четно, и $\rho_i \neq \binom{\rho_n}{q}$, если n нечетно, то гомологические группы пространства Y бесконечны по крайней мере в двух размерностях.

Кроме того, доказано одно простое необходимое условие для того, чтобы односвязный полиэдр был гомотопен произведению полиэдров Эйленберга — Маклейна. Как отмечает автор, это условие очевидно, „если допустить употребление“ результатов референта (РЖМат, 1956, 7237). М. М. Постников

8519. О факторизации сферы S_{2p+1} с помощью больших окружностей. Врэнчану (Asupra unei factorizări a sferei S_{2p+1} prin cercuri mari. Vrănceanu G.), Comun. Acad. RPR, 1955, **5**, № 10, 1425—1428 (рум.; рез. русск., франц.)

Известно, что сферу S_{2p+1} размерности $2p+1$ можно рассматривать как расслоенное пространство, базисное пространство V_{2p} которого гомеоморфно комплексному проективному пространству действительной размерности $2p$, а слоями являются большие окружности сферы S_{2p+1}. Записав уравнение сферы S_{2p+1} в декартовых координатах: $(y^1)^2 + \ldots + (y^{2p+2})^2 = R^2$, автор доказывает, что в окрестности V на сфере S_{2p+1}, в которой $(y^{2p+1})^2 + (y^{2p+2})^2 \neq 0$, точки сферы S_{2p+1}, лежащие на одном и том же слое, даются формулами

$$y^{2h-1} = \frac{x^{2h-1}}{1+\lambda x^2}\cos\varphi - \frac{x^{2h}}{1+\lambda x^2}\sin\varphi,$$

$$y^{2h} = \frac{x^{2h-1}}{1+\lambda x^2}\sin\varphi + \frac{x^{2h}}{1+\lambda x^2}\cos\varphi, \quad (h = 1, \ldots, p)$$

$$y^{2p+1} = \frac{1-\lambda x^2}{2\sqrt{\lambda}(1+\lambda x^2)}\cos\varphi,$$

$$y^{2p+2} = \frac{1-\lambda x^2}{2\sqrt{\lambda}(1+\lambda x^2)}\sin\varphi,$$

где $\lambda = \frac{1}{4}R^2$, $x^2 = (x^1)^2 + \ldots + (x^{2p})^2$, φ — координата в слое, а $x^1, \ldots, x^{2p}$ — координаты в той окрестности базы V_{2p}, которая соответствует окрестности V в сфере S_{2p+1}. C. Teleman

8520. Об аналитических расслоениях. Хефлигер (Sur les feuilletages analytiques. Haefliger

André), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 25, 2908—2910 (франц.)

Рассматривается действительное аналитическое n-мерное многообразие V, допускающее аналитическое расслоение в смысле Эресмана (Ehresmann C., Red. mat. e appl., 5^e ser., 1951, **10**) на многообразия размерности $n-1$. Доказывается, что любая замкнутая трансверсаль рассматриваемого расслоения (если она существует) определяет элемент бесконечного порядка фундаментальной группы многообразия V. Отсюда следует, в частности, что если фундаментальная группа многообразия V периодична, то многообразие не компактно и все слои рассматриваемого расслоения замкнуты. Применяя этот результат к расслоению (с особенностями), порожденному некоторой вполне интегрируемой невырожденной формой Пфаффа (форма Пфаффа называется невырожденной, если она обращается в нуль только в изолированных точках, причем в этих точках невырождена квадратичная форма, определенная производными первого порядка ее коэффициентов), автор получает, что если многообразие V с периодической фундаментальной группой компактно и $n>2$, то любая аналитическая вполне интегрируемая невырожденная форма Пфаффа на многообразии V допускает интегрирующий множитель класса C^∞, определенный всюду на многообразии V. М. М. Постников

8521. Гомотопические резольвенты полусимплициальных комплексов. Хеллер (Homotopy resolutions of semisimplicial complexes. Heller Alex), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **80**, № 2, 299—344 (англ.)

Для пространств с операторами развивается теория, аналогичная (основывающейся на иных идеях) теории натуральных систем референта (РЖМат, 1956, 7237). „Полем действия" теории автора являются полные полусимплициальные комплексы X, любые две вершины которых можно соединить одномерным симплексом (условие гомотопической связности), причем комплекс X рассматривается вместе с некоторой операцией C, обладающей следующим свойством: если K — произвольный полный полусимплициальный комплекс, а K^q — его q-мерный остов K_q, пополненный всеми вырожденными симплексами, построенными над симплексами из K_q, то каждому симплициальному отображению $f: K^q \to X$ операция C относит $q+1$-мерный коцикл с f комплекса K над некоторой группой π_q, обладающий известными формальными свойствами препятствий к продолжению отображений. Операция C существует не всегда, но если она существует, то с точностью до изоморфизма она определена однозначно. В частности, однозначно определены группы π_q, называемые гомотопическими группами комплекса X. Это понятие комплекса с гомотопическими группами по существу равносильно введенному референтом понятию комплекса с оснащением. Таким образом, теории автора и референта относятся, как и следовало ожидать, к одним и тем же объектам.

Автор рассматривает полные полусимплициальные комплексы с гомотопическими группами, в которых действуют (без неподвижных симплексов) полные полусимплициальные комплексы, каждый слой которых является группой. Для таких комплексов строится гомотопическая резольвента, аналогичная натуральной системе референта (для пространств без операторов) и обладающая аналогичными свойствами. Попутно автором получено много интересных теорем о комплексах с операторами (как, например, результаты, связанные с аналогией между теорией автора и теорией главных расслоенных пространств, построение „классифицирующих пространств" и т. п.).

М. М. Постников

8522. Индексы ранга и сингулярности абелевых многообразий. Ганнинг (Indices of rank and of singularity on Abelian varieties. Gunning R. C.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, **43**, № 1, 167—169 (англ.)

Для комплексного компактного многообразия индексы сингулярности b_k^d и ранга c_k^d определяются как размерности d-мерных классов когомологий полуранга k и ранга k соответственно. Дается истолкование числа b_k^d для комплексного тора и числа c_k^d для абелевых многообразий как размерностей модулей некоторых кососимметричных форм. Дано геометрическое истолкование индексов ранга для алгебраических многообразий.

В. В. Морозов

См. также: 8591, 8868, 8941.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

8523. О мере векторной суммы двумерных точечных множеств. Леккеркеркер (On the measure of the vectorial sum of two-dimensional point sets. Lekkerkerker C. G.), Math. Centrum Amsterdam. Rapport ZW 1953—015, 1953, 16 pp. (англ.)

Пусть P — множество на плоскости. P называется связным, если для любых двух точек $x \in P$, $y \in P$ и любого ε существует ε-цепь в P, соединяющая x и y. Обозначим через $V_{12}(P)$ число компонент множества P. Пусть x — любая точка плоскости с координатами x_1 и x_2. Для каждого действительного числа c обозначим через $\Pi_1(P, c)$ пересечение P с вертикальной прямой $x_1 = c$. Положим $m_1(P; c) = V_{12}(\Pi_1(P, c))$. Наименьшая верхняя грань интегралов $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ для всех неотрицательных измеримых функций $f(t)$, обращающихся в нуль вне конечного интервала и удовлетворяющих для всех t соотношению $f(t) \leqslant m_1(P; t)$, обозначается через $V_1(P)$ (если $m_1(P; t)$ измерима, то $V_1(P) = \int_{-\infty}^{\infty} m_1(P; t)\,dt$). Аналогично определяется $V_2(P)$, за исключением того, что вертикальная линия $x_1 = c$ заменяется горизонтальной $x_2 = c$. Пусть $V(P)$ обозначает внешнюю меру Жордана множества P, а $P+Q$ — векторную сумму P и Q. Доказывается следующая теорема (дающая ответ на вопрос Корпута). Пусть P и Q — ограниченные замкнутые множества, имеющие не более чем счетное число компонент. Тогда

$$V(P+Q) \leqslant V(P)\,V_{12}(Q) + V_1(P)\,V_2(Q) + V_2(P)\,V_1(Q) + V_{12}(P)\,V(Q), \quad (1)$$

причем считается, что $0 \cdot \infty = 0$, $a \cdot \infty = \infty$ для $a > 0$. Показывается, что (1) может не выполняться, если P и Q имеют несчетное число компонент. Знак $\leqslant$ в (1) в общем случае нельзя заменить знаком $<$. В заключение автор делает предположение об аналогичной теореме для n-мерных множеств. P. Erdös

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 3, 228.

8524. Распространение теоремы Римана — Дини о рядах на несуммируемые функции теории

интегрирования в абстрактных пространствах. Дабони (Estensione del teorema di Riemann — Dini, sulle serie, alle funzioni non sommabili nella teoria astratta della integrazione. Daboni Luciano), Riv. mat. Univ. Parma, 1955, **6**, № 3—4, 293—300 (итал.)

Для интегралов Лебега — Стилтьеса доказывается теорема, аналогичная теореме Римана — Дини о неабсолютно сходящихся рядах.

Если $f(x)$ измерима и конечна на измеримом множестве L и

$$\int_{L^+} f(x)\,dx = +\infty, \qquad \int_{L^-} f(x)\,dx = -\infty,$$

где $L^+ = \mathfrak{E}(f(x) \geqslant 0)$, $L^- = \mathfrak{E}(f(x) < 0)$, то для любого числа a можно указать такую последовательность $\{K_n\}$ подмножеств множества L, что на каждом K_n функция $f(x)$ суммируема, $\bigcup_n K_n = L$ и $\int_{K_n} f(x)\,dx \to a$ при $n \to \infty$.

Приведенная теорема доказана для абстрактных интегралов, рассматривающихся в книге Фикера (РЖМат, 1956, 4664К).

А. Г. Джваршейшвили

8525. О критерии Арцела для непрерывности предела сходящейся последовательности непрерывных функций. Акуаро (Sul criterio di Arzelà per la continuità del limite di una successione convergente di funzioni continue. Aquaro Giovanni), Rend. Sem. Fac. sci. Univ. Cagliari, 1954, **24**, 10—13 (итал.)

Последовательность f_α функций на множестве S метрического пространства M называется квазиравномерно сходящейся к функции f, если она сходится к f в каждой точке и если для каждого $\varepsilon > 0$ и натурального v существует такая ограниченная целозначная функция v_ε на S, что для любого $x \in S$, $v_\varepsilon(x) \geqslant v$ и $|f(x) - f_{v_\varepsilon(x)}(x)| < \varepsilon$. Предположим, что на семействе всех подмножеств множества S определена такая операция $'$ со значениями в этом семействе, что $(E - \{a\})' = E' \subset F'$ всякий раз, как только $a \in E \subset F \subset S$; тогда S будет (V)-пространством в смысле Фреше (Fréchet M. Les espaces abstraits. Paris, 1928, стр. 172—181). Фреше заметил (стр. 247), что если S компактно в себе, каждая f_α непрерывна, последовательность f_α сходится в каждой точке к f и операция $'$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, при которых S становится (H)-пространством (см. вышеуказанную книгу Фреше, стр. 185), то f непрерывна в том и только в том случае, если сходимость квазиравномерна. Им ставился вопрос (стр. 247) о возможности опустить дополнительные условия. Автор дает частичный ответ, доказывая теорему для $(,V)$-пространства, в котором операция $'$ дистрибутивна т. е.

$$(E \cup F)' = E' \cup F' \quad \text{для всех } E,\ F \subset S.$$

V. L. Klee, Jr

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 7, 682.

8526. Множества типа F_σ и симметрическая непрерывность. Маркус (Mulțimile F_σ și continuitatea simetrică. Marcus S.), Bul. științ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. și fiz., 1955, **7**, № 4, 871—886 (рум.; рез. русск., франц.)

Хаусдорф (Hausdorff F., Fundam. math., 1935, **25**, 578) поставил вопрос: для каждого ли линейного множества E типа F_σ существует функция $f(x)$, для которой множество E является множеством точек разрыва, причем в каждой точке x (принадлежащей или не принадлежащей E) выполняется соотношение

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x-h) = 0?$$

Фрид (Fried H., Fundam. math., 1937, **29**, 134) дал отрицательный ответ на этот вопрос. Автор показывает, что произвольные множества типа F_σ все же играют важную роль в изучении симметрической непрерывности.

Теорема. Для каждого данного линейного множества M типа F_σ существует такая функция $f(x)$, что множество точек x, для которых

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x-h) = 0,$$

совпадает с дополнением множества M.

Построение функции $f(x)$ основано на классификации точек множества типа F_σ в зависимости от характера симметрии этого множества в окрестности точки.

Резюме автора

8527. О множествах $\{f(x) > a\}$, где $f(x)$ — функция, интегрируемая по Риману. Липинский (Sur les ensembles $\{f(x) > a\}$, où $f(x)$ sont des fonctions intégrables au sens de Riemann. Lipiński J. S.), Fundam. math., 1956, **43**, № 2, 202—229 (франц.)

Основной целью статьи является характеристика множеств $\{f(x) > a\}$, где $f(x)$ — производная (существующая всюду), интегрируемая по Риману. Без условия интегрируемости R (усложняющего построение функции $f(x)$ такой, что $E = \{f(x) > a\}$ для данного множества E) такая характеристика дана референтом (Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **69**, 1—54). Она дается условием $E \in M_4$. Мы пишем $E \in M_4$, если существуют последовательность замкнутых множеств F_n и последовательность чисел $\eta_n > 0$ такие, что $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ и для каждого $x \in F_n$ и каждого числа $c > 0$ найдется такое число $\varepsilon(x, c) > 0$, что для каждой пары чисел h, h_1 из условий $hh_1 > 0$, $h/h_1 < c$, $|h + h_1| < \varepsilon(x, c)$ следует, что $|(x+h,\ x+h+h_1)E| / |h_1| > \eta_n$. Символ (a, b) обозначает открытый интервал с концами a и b, даже если $a < b$ не выполняется.

В случае, исследуемом автором, характеристика дается следующей теоремой 5: Множество действительных чисел E будет вида $E = \{f(x) > a\}$, где $f(x)$ — производная (существующая всюду), интегрируемая по Риману в каждом интервале, в том и только в том случае, если $E \in M_4$ и $|E \cdot \mathrm{Fr}\, E| = 0$. Следующая теорема 6 дает характеристику множества $\{f(x) > a\}$ для функции $f(x)$, аппроксимативно непрерывной и интегрируемой по Риману: множество E будет вида $\{f(x) > a\}$ при сделанных предположениях относительно $f(x)$ в том и только в том случае, если $|E \cdot \mathrm{Fr}\, E| = 0$ и $E \in M_5$, т. е. E — множество типа F_σ и каждая из его точек есть его точка плотности.

Отметим леммы 2 и 1, содержащие результаты, важные и независимо от применения их в статье. Следующая лемма 2 является аналогом теоремы Лузина — Меньшова: Если F — замкнутое множество действительных чисел меры нуль и каждая точка множества F есть точка плотности открытого множества G, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество F_ε, что $|\mathrm{Fr}\, F_\varepsilon| = 0$, $|F_\varepsilon| < \varepsilon$, $F \subset F_\varepsilon \subset F + G$. Мы пишем $A \subset B$, если $A \subset B$ и каждая точка множества A есть точка плотности множества B.

Пусть A — множество точек $(n+1)$-мерного пространства $\mathfrak{E}^n \times \mathfrak{E}^1$. Точки пространства $\mathfrak{E}^n$ обозначим через x, а точки пространства $\mathfrak{E}^1$ — через y. Положим $A^*(\alpha) = A \cdot \underset{(x,\,y)}{E}\ [\alpha < y]$, $A_*(\alpha) = A \cdot \underset{(x,\,y)}{E}\ [y < \alpha]$. Символы $A^*_y(\alpha)$ и $A_{*y}(\alpha)$ обозначают проекции (параллельно оси y) множеств $A^*(\alpha)$ и $A_*(\alpha)$ соответственно на пространство $\mathfrak{E}^n$. Далее $\mu^k_*(E)$ обозначает k-мерную внутреннюю меру множества E, лежащего в k-

мерном евклидовом пространстве $\mathfrak{E}^k$. Пусть

$$\varphi(\alpha) = \mu_*^n\left(A_y^*(\alpha) \cdot A_{*y}(\alpha)\right).$$

Лемма 1. Если $\mu_*^{(n+1)}(A) > 0$, то множество $\{\varphi(\alpha) = 0\}$ не может быть плотно ни в каком сегменте (u, v) таком, что $\mu_*^{(n+1)}\left(A \cdot \underset{(x,y)}{E}[u < y < v]\right) > 0$. Отчасти используя лемму 1 (при очень слабых предположениях), автор дает несколько условий для интегрируемости по Риману и для непрерывности почти всюду функции $f(x)$ $(x \in \mathfrak{E}^n)$; эти условия выражаются свойствами множеств $\{f(x) > a\}$.

Теорема 1. Множество E точек пространства $\mathfrak{E}^n$ будет вида $E = \{f(x) > a\}$, где $f(x)$ интегрируема по Риману в каждом параллелепипеде этого пространства, в том и только в том случае, если существует такое множество E^* типа F_σ, что $E \subset E^* \subset \bar{E}$ и $|E^* \cdot \operatorname{Fr} E| = 0$. В частном случае, когда E — множество типа F_σ, эти условия заменяются одним условием $|E \cdot \operatorname{Fr} E| = 0$.

Теоремы 2—4. Для того чтобы функция $f(x)$, определенная в пространстве $\mathfrak{E}^n$, была непрерывна почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих трех условий:

1) для каждого числа a

$$|\{f(x) > a\} \cdot \operatorname{Fr}\{f(x) > a\}| = 0,$$
$$|\{f(x) < a\} \cdot \operatorname{Fr}\{f(x) < a\}| = 0;$$

2) для каждой пары неравных чисел a, b

$$|\operatorname{Fr}\{f(x) > a\} \cdot \operatorname{Fr}\{f(x) > b\}| = 0;$$

3) множество всех чисел a, для которых

$$|\operatorname{Fr}\{f(x) > a\}| > 0,$$

не более чем счетно. Z. Zahorski

8528. О множествах точек, где производная равна, соответственно, $+\infty$ и $-\infty$. Содыкс В. М., Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 1, 36—38

Известно, что множества точек E_1 и E_2, где производная заданной конечной в каждой точке функции одного действительного переменного существует и равна соответственно $+\infty$ и $-\infty$, суть множества меры нуль и принадлежат классу $F_{\sigma\delta}$ (см. также РЖМат, 1957, 2177).

В работе доказывается следующее обобщение этого результата: Для того чтобы множества E_1, E_2 точек оси Ox были множествами всех точек, где производная некоторой конечной в каждой точке функции одного действительного переменного существует и равна соответственно $+\infty$, $-\infty$, необходимо и достаточно, чтобы E_1, E_2 имели меру нуль, принадлежали классу $F_{\sigma\delta}$ и были отделимыми с помощью F_σ множеств.

Построенная функция, удовлетворяющая условиям теоремы, абсолютно непрерывна на каждом конечном отрезке оси Ox. Ш. С. Пхакадзе

8529. О системе непрерывных взаимно не дифференцируемых функций. Грот (A system of continuous, mutually non-differentiable functions. Groot J. de), Math. J., 1956, **64**, № 2, 192—194 (нем.)

Строится множество $M\left(\overline{\overline{M}} = 2^{\aleph_0}\right)$ действительных непрерывных функций, определенных на прямой и недифференцируемых одна относительно другой, т. е. для $f, g \in M$, $f \neq g$ и для каждого x $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)}$ не существует.

С применением гипотезы континуума и аксиомы выбора это построение легко осуществляется методом категорий. Построение автора не использует ни гипотезы континуума, ни аксиомы выбора. Этот результат является решением проблемы референта. J. Mycielski

8530. Характеристики Липшица для асимптотически дифференцируемых функций. Остин (A Lipschitzian characterization of approximately differentiable functions. Austin D. G.), Portugaliae math., 1956, **15**, № 1—2, 19—29 (англ.)

Изучаются свойства асимптотически дифференцируемых функций, определенных в E^n.

Основные результаты:

1. Если все асимптотические производные числа функции $f(x)$, $x \in E^n$ на ограниченном множестве K по абсолютной величине меньше, чем P, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно указать конечную систему множеств S_i, на каждом из которых $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой P, причем

$$m\left(K - \sum S_i\right) < \varepsilon.$$

Указывается, что этот результат допускает обращение.

2. Если $f(x)$ имеет конечные асимптотические производные почти всюду на $K \subset E^n$, то существует такая последовательность $\{\delta_k\}$, $\delta_k > 0$, $\lim \delta_k = 0$, что для любой последовательности $\{h_k\}$, $|h_k| < \delta_k$

$$\lim_k \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h_k, \ldots) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots)}{h_k}, \quad i = 1, \ldots, n$$

существует и равен асимптотической частной производной почти всюду на K. А. Я. Дубовицкий

8531. О непрерывности функций нескольких переменных. Розенталь (On the continuity of functions of several variables. Rosenthal Arthur), Math. Z., 1955, **63**, № 1, 31—38 (англ.)

Изучается связь между свойством непрерывности функции многих переменных в точке и вдоль кривых, проходящих через эту точку.

Основная теорема: Из непрерывности $f(x, y)$ в точке p_0 вдоль всех однократно дифференцируемых кривых, проходящих через эту точку, следует ее непрерывность в p_0.

Приводится пример функции, непрерывной в p_0 вдоль всех дважды дифференцируемых кривых и в то же время разрывной в p_0.

Дается обобщение для случая n переменных. А. Я. Дубовицкий

8532. О теореме Г. П. Толстова. Маркус С., Ж. матем. и физ. Акад. РНР, 1954, **3**, 63—65

Рассматривается теорема Г. П. Толстова: Если во всякой точке области G, за исключением, быть может, точек некоторого счетного множества, все производные числа по переменному x линейно непрерывной функции $F(x, y)$ конечны, то на любом совершенном множестве P, $P \subset G$, найдется порция, на которой $F(x, y)$ непрерывна.

Указываются возможные усиления теоремы. А. Я. Дубовицкий

8533. О теореме Г. П. Толстова. Маркус (Über einen Lehrsatz von G. P. Tolstow. Marcus S.), Rev. math. et phys. (București), 1954, **2**, 59—61 (нем.)

См. реф. 8532.

8534. Свойства (по расстоянию) действительных функций в евклидовом пространстве. Фрода (Proprietăți (la distanță) ale funcțiilor reale într- un spațiu euclidian. Froda Alexandru), Bul. științ. Acad. RPR. Sec. mat. și fiz., 1956, **8**, № 4, 683—686 (рум.; рез. русск., франц.)

Содержание см. РЖМат, 1957, 292. А. Я. Дубовицкий

8535. О дифференцируемых отображениях. Кудрявцев Л. Д., Докл. АН СССР, 1955, **104**, № 1, 12—14

Обобщается теорема единственности из теории функций комплексного переменного на класс непрерывно дифференцируемых отображений: Если f — непрерывно дифференцируемое отображение области $G_x \subseteq E_x^n$ в E_y^n и множество нулей якобиана отображения f не имеет предельных точек внутри G_x, то не существует последовательности точек $x_n \in G_x$, имеющей внутри G_x предельную точку и такой, что $f(x_n) = y_0$ $(n = 1, 2, \ldots;$ y_0 — фиксированная точка $\in f(G_x))$. Дается пример и намечается путь к доказательству.

Определяются понятия „монотонное отображение" и свойство отображения быть „локально монотонным". (Отображение f монотонно, если прообраз каждой точки y есть континуум; отображение f локально монотонно в точке $y_0 \in f(G)$, если для любой компоненты $f^{-1}(y_0) = X$ существует окрестность этой компоненты, на которой f монотонно). Приводится теорема, являющаяся также обобщением соответствующей теоремы теории функций комплексного переменного: Если во всех точках ограниченной односвязной области $G_x \subseteq E_x^n$ отображение f является локально монотонным дифференцируемым ориентированным отображением G_x на односвязную область G_y, причем граница образа есть образ границы и множество нулей якобиана отображения не имеет внутренних точек, то f будет монотонным отображением G_x на G_y.

Доказательство этой теоремы ведется при помощи одной леммы, которую кратко сформулировать нельзя.

К. С. Сцилард

8536 Д. Вариации функции многих переменных и достаточные условия для их ограниченности. Витушкин А. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1957

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

8537. Континуум и действительное число. Блей (Continuum en reëel getal. Blij F. van der), Euclides (Nederl.), 1957, **32**, № 6, 205—211 (гол.)

Популярная лекция о действительных числах.

8538. Гипотеза континуума. Амато (Ipotesi del continuo. Amato Vincenzo), Matematiche, Catania, 1953, 8, № 2, 49—50 (итал.)

Краткие замечания популярного характера.

F. Bagemihl

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 4, 343.

8539. Об упорядочении трансфинитных мощностей. Оплуштил (K uspořádání transfinitních mohutností. Opluštil Karel), Sbor. Vysokého učení techn. Brně, 1956, № 4, 375—379 (чешск.; рез. нем.)

Предложение из общей теории множеств, на котором основывается возможность упорядочения трансфинитных мощностей, обычно доказывается в теории вполне упорядоченных множеств. Автор приводит формально упрощенное доказательство Френкеля, не использующее теорию вполне упорядоченных множеств и основанное только на аксиоме выбора и понятии взаимно однозначного отображения. Резюме автора

8540. Об ослаблении аксиомы выбора. Кинна, Вагнер (Über eine Abschwächung des Auswahlpostulates. Kinna W., Wagner K.), Fundam. math., 1955, **42**, № 1, 75—82 (нем.)

Сравнивается следующее предположение относительно множества M:

(E) существует такая функция $\varphi(A)$, определенная для любого $A \subset M$, что $0 \subset \varphi(A) \subset A$, если только A имеет по крайней мере 2 элемента, — с другими неэффективными предположениями, такими, например, как возможность упорядочить или вполне упорядочить множество. Существенный результат работы — множество со свойством (E) можно эффективно упорядочить. Авторы не знают, верна ли обратная теорема, т. е. можно ли для упорядоченного множества эффективно определить функцию, удовлетворяющую условию (E). (Мостовский дал отрицательный ответ, который будет опубликован в Fundam. math. *Реф.*).

Кроме того (теорема 3), множество M обладает свойством (E) тогда и только тогда, когда оно эквивалентно некоторому множеству подмножеств некоторого вполне упорядоченного множества. J. Łoś

8541. О некоторых соотношениях для операций P_α и S_α на классах множеств. Окума (Sur quelques relations concernant les opérations P_α et S_α sur les classes d'ensembles. Ohkuma Tadashi), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, №·7, 410—413 (франц.)

Пусть F и G — операции на классах множеств, значения которых также есть классы множеств; $F \leqslant G$ означает, что $F(K) \subset G(K)$ для каждого класса K множеств; FG означает операцию, определенную равенством $FG(K) = F(G(K))$.

Пусть K — класс множеств и α — порядковое число. Тогда $P_\alpha(K)(S_\alpha(K))$ означает класс множеств, являющихся пересечениями (суммами) не более чем $\aleph_\alpha$ множеств, принадлежащих классу K.

Исследуются условия относительно порядковых чисел α, β, γ, δ, ε, при которых верны соотношения вида $P_\alpha S_\beta P_\gamma \geqslant P_\delta S_\varepsilon$, $P_\alpha S_\beta P_\gamma \leqslant P_\delta S_\varepsilon$, ...

Пусть $\pi_\alpha(\beta)$ — наименьшее порядковое число γ, которое удовлетворяет условию: (π) для каждого множества $\{\mathfrak{m}_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ кардинальных чисел $\mathfrak{m}_\lambda$ с $\lambda < \aleph_\alpha$ и $\mathfrak{m}_\lambda < \aleph_\beta$ $(\lambda \in \Delta)$ будет $\prod_{\lambda \in \Delta} \mathfrak{m}_\lambda < \aleph_\gamma$.

Пусть $l\pi_\alpha(\beta)$ обозначает (для предельного порядкового числа β) число $\lim_{\beta' \to \beta} \pi_\alpha(\beta')$; $\mathrm{cf}(\beta)$ — наименьшее порядковое число, кофинальное с β.

Формулируются следующие теоремы:

1. Соотношение $S_\alpha P_\beta S_\gamma \leqslant P_\delta S_\varepsilon$ (или $P_\alpha S_\beta P_\gamma \leqslant S_\delta P_\varepsilon$) имеет место в том и только в том случае, если $\pi_\alpha(\beta) \leqslant \delta$ и $\gamma < \varepsilon$, когда $\mathrm{cf}(\gamma) < \alpha \leqslant \gamma + 1$, или $\sup(\alpha, \gamma) \leqslant \varepsilon$ в противном случае.

2. Соотношение $S_\alpha P_\beta S_\gamma \leqslant S_\delta P_\varepsilon$ (или $P_\alpha S_\beta P_\gamma \leqslant P_\delta S_\varepsilon$) выполняется тогда и только тогда, когда $\beta \leqslant \varepsilon$ и $\pi_\beta(\gamma) < \delta$ в случае, если $\mathrm{cf}(\pi_\beta(\gamma)) < \alpha \leqslant \pi_\beta(\gamma) + 1$, или $\sup(\alpha, \pi_\beta(\gamma)) \leqslant \delta$ в противном случае.

3. Для выполнения соотношения $P_\alpha S_\beta P_\gamma \geqslant P_\delta S_\varepsilon$ (или $S_\alpha P_\beta S_\gamma \geqslant S_\delta P_\varepsilon$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий: 1) $\delta \leqslant \alpha$; 2) $\pi_{\delta^*}(\varepsilon) \leqslant \beta$ и $\delta^* \leqslant \gamma$; 3) ε — предельное порядковое число, $l\pi_{\delta^*}(\varepsilon) \leqslant \beta$, $\delta^* < \gamma$ и $\mathrm{cf}(\varepsilon) < \alpha$, где $\delta^* = \delta$, если δ — предельное порядковое число или если $\delta = \delta' + 1$ и $\alpha \leqslant \mathrm{cf}(\delta')$; и $\delta^* = \delta'$, если $\delta = \delta' + 1$ и $\mathrm{cf}(\delta') < \alpha$.

4. Для выполнения соотношения $P_\alpha S_\beta P_\gamma = P_\delta S_\varepsilon$ (или $S_\alpha P_\beta S_\gamma = S_\delta P_\varepsilon$) необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

1) $\alpha = \delta$ и $\pi_\beta(\gamma) < \delta$,
2) $\alpha = \delta = \mathrm{cf}(\alpha) = \pi_\beta(\gamma)$,
3) $\alpha \leqslant \beta = \gamma = \delta = \varepsilon$ и $\pi_\beta(\beta) = \beta$.

5) Для выполнения соотношения $P_\delta S_\varepsilon \leqslant S_\alpha P_\beta S_\gamma$ (или $S_\delta P_\varepsilon \leqslant P_\alpha S_\beta P_\gamma$) необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: 1) $\varepsilon \leqslant \gamma$, 2) $\pi_\delta(\varepsilon) \leqslant \alpha$, 3) $\varepsilon = \gamma + 1$ и $\delta \leqslant \mathrm{cf}(\gamma) < \alpha$.

6. Для выполнения соотношения $P_\delta S_\varepsilon = S_\alpha P_\beta S_\gamma$ (или $S_\delta P_\varepsilon = P_\alpha S_\beta P_\gamma$) необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: 1) $\delta = \beta$, $\varepsilon = \gamma$, $\pi_\alpha(\beta) = \beta$

и $\alpha \leqslant \mathrm{cf}(\gamma)$, 2) $\gamma \leqslant \delta = \varepsilon = \alpha = \beta$ и α — недостижимое порядковое число. S. Mrówka

8542. Некоторые замечания о свойстве Бэра. Ян Цзун-пань (關於貝爾性質的幾點注意. 楊宗磐), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, **6**, № 1, 83—91 (кит.; рез. нем.)

В теории свойства Бэра в метрическом пространстве вводятся понятия бэровской оболочки и бэровского ядра, аналогичные понятиям измеримой оболочки и измеримого ядра в теории меры, и доказываются некоторые предложения о свойстве Бэра, аналогичные имеющимся в работах: Rademacher H., Monatsh. Math. und Phys., 1916, **27**, 181—291; Steinhaus H., Fundam. math., 1920, **1**, 93—104; Wilkosz W., Fundam. math., 1920, **1**, 82—92. Из резюме автора

8543. Поправка (更正), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, **7**, № 1, 167 (кит.; рез. англ.)

Указывается, что решение вопроса Серпинского в § 4 работы автора (реф. 8542) неверно.

8544 К. Элементы математики. XVII. Часть 1. Основы анализа. Кн. I. Теория множеств. Гл. I и II. Бурбаки (Éléments de mathématique. XVII. 1-e partie. Les structure fondamentales de l'analyse. Livre I. Théorie des ensembles. Chapitre I. Description de la mathématique formelle. Chapitre II. Théorie des ensembles. Bourbaki N. (Actual. scient. et industr., № 1212), Paris, Hermann et Cie, 1954, 136 p.) (франц.)

Это первая книга из серии, состоящей из шести книг, в которых автор излагает теорию множеств, алгебру, общую топологию и математический анализ. Изложение аксиоматическое, абстрактное. Выделяются и формулируются элементарные логические основания (аксиомы, отношения, термы и пр.), на которых строится указанная выше часть математики; широко используются символы математической логики (кванторы и др.).

В гл. I описываются формально логические основы и аппарат, используемые в последующем.

В гл. II излагаются основные понятия и операции теории множеств в терминах и символах математической логики.

Чтение книги требует хорошего математического развития, хотя и не предполагает наличия специальных математических знаний. Изложение краткое, но достаточно ясное, сопровождаемое примерами. Выделены трудные места. В. Я. Арсенин

8545 К. Элементы математики. XX. Часть 1. Основы анализа. Кн. I. Теория множеств. Гл. III. Бурбаки (Éléments de mathématique. XX. 1-e partie. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre I. Théorie des ensembles. Chapitre III. Ensembles ordonnés. Cardinaux. Nombres entiers. Bourbaki N. (Actual. scient. et industr., № 1243), Paris, Hermann et Cie, 1956, 118 p.) (франц.)

Излагаются упорядоченные и вполне упорядоченные множества; кардинальные числа; целые положительные числа, конечные и бесконечные множества целых положительных чисел и стационарные последовательности. В. Я. Арсенин

8546 К. О конгруэнтности множеств и их эквивалентности по конечному разложению. Серпинский (On the congruence of sets and their equivalence by finite decomposition. Sierpiński Wacław. Lucknow University Studies, № XX. Lucknow, The Lucknow University, 1954, 117 pp.) (англ.)

Это небольшая книга, увлекательно излагающая материал и не требующая почти никаких математических знаний от читателя, кроме знакомства с некоторыми метрическими свойствами евклидова пространства. Большая часть материала излагалась автором в лекциях в университете Лакнау в 1949 г. В книге обсуждаются парадоксы, связанные с именами Хаусдорфа, Нёймана, Банаха и Тарского, и связь этих парадоксов с существованием мер различного рода. Приводятся различные другие результаты и некоторые нерешенные проблемы. Характер их в целом можно передать, приведя по два примера. Будем писать: $A \cong B$, когда A и B — плоские множества, наложимые при помощи переноса или вращения, и $A \sim B$, когда A и B можно разложить на конечное число таких непересекающихся множеств A_i и B_i, что $A_i \cong B_i$.

Теорема. Если E—линейное множество, то существует не более одной точки $p \in E$ такой, что $E \setminus \{p\} \cong E$.

Проблема. Существует ли такое непустое плоское множество E, что $E \setminus \{p\} \cong E$ для всех $p \in E$?

Теорема. Если T — равнобедренный прямоугольный треугольник и S — квадрат той же площади, то $S \sim T$.

Проблема. Если C — круг и S — квадрат той же площади, то будет ли $C \sim S$? P. R. Halmos

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 8, 691.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

8547. Замечание о неравенствах А. А. Маркова и С. Н. Бернштейна. Турецкий А. Х., Уч. зап. Белорусск. ун-та, 1957, вып. 32, 59—62

Для произвольной системы точек θ_i $(i = \overline{0, n})$ промежутка $[0, \pi]$ строится четный тригонометрический полином $T(\theta)$ порядка не выше n, удовлетворяющий условиям: $|T(\theta_i)| \leqslant 1$, а в некоторой точке $\alpha \in [0, \pi]$ будет $|T'(\alpha)| > Cn \ln n$, где C — абсолютная положительная константа. И. Г. Соколов

8548. О применимости принципа Дирихле в случае круга. Фрёйд, Кралик (Über die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips für den Kreis. Freud G., Králik D.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, **7**, № 3—4, 411—418 (нем.; рез. русск.)

Пусть $F(\varphi) \in L_2(0, 2\pi)$ и $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ — ее ряд Фурье, а $\omega(\delta, F)_{L_2}$ — ее модуль непрерывности (1-го порядка) в метрике L_2. Доказывается, что следующие соотношения эквивалентны между собой при $0 < \alpha < 2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} (a_n^2 + b_n^2) < \infty, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \omega^2 (n^{-1}, F)_{L_2} < \infty, \tag{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} t^{-(1+\alpha)} |F(\varphi + t) - F(\varphi - t)|^2 \, d\varphi \, dt < \infty. \tag{3}$$

При $\alpha = 1$ эти соотношения дают условия применимости принципа Дирихле в случае круга. Из соотношения (2) авторы получают необходимое и достаточное условия конечности интеграла Дирихле, установленные С. М. Никольским (Докл. АН СССР, 1952, **83**, № 1, 23—25; РЖМат, 1955, 5034).

Отметим, что эквивалентность соотношений (1) и (3) была известна: при $\alpha = 1$ она доказана Бёрлингом (Beurling A., Acta math., 1939, **72**, 1—13), при $0 < \alpha < 1$— Броманом (Broman A., On two classes of trigonometrical series, Uppsala, 1947), при $1 < \alpha < 2$ годится доказательство Бромана. А. А. Конюшков

8549. Ряды Фурье. III. Проблема Винера. Идзуми (Fourier series. III. Wiener's problem. Izumi Shin-ichi), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 8, 527—528 (англ.)

Обобщаются результаты автора и Кинукавы (РЖМат, 1957, 1299, 1300). Доказывается теорема: Пусть

$f(x) \in L^p(0, 2\pi)$ $(p > 1)$ и $s_n(x)$ — частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x) - s_n(x)|^p$$

сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_p^p\left(\frac{1}{n}, f\right) < \infty,$$

где

$$\omega_p(t, f) = \sup_{0<u<t} \left(\int_0^{2\pi} |f(x+u) - f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

В статье имеется ряд опечаток, в том числе и в библиографии. П. Л. Ульянов

8550. О явлении Гиббса при суммировании ряда Фурье методом Римана (R, 1). Ли Цзин-си (用黎曼求和法 (R, 1) 求和時的基卜斯現象, 李經熙), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, **6**, № 3, 418—425 (кит.; рез. англ.)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ суммируется методом $(R, 1)$ к числу s, если ряд

$$s_h = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)$$

сходится при всех достаточно малых $h\,(h \neq 0)$ и $\lim_{h \to \infty} s_h = s$.

(Обычно этот метод суммирования называется методом Лебега. См. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, М. — Л., ГОНТИ, 1939, стр. 270. *Реф.*).

Доказывается, что при суммировании методом $(R, 1)$ ряда Фурье функции $f(x)$ с ограниченным изменением явление Гиббса не имеет места (в то время как при обычной сходимости, как известно, в окрестности точки разрыва $f(x)$ явление Гиббса наблюдается).

Ф. И. Харшиладзе

8551. О суммируемости по Риссу рядов Фурье. Канно (On the Riesz summability of Fourier series. Kanno Kôsi), Tôhoku Math. J., 1956, **8**, № 2, 223—234 (англ.)

Обобщаются результаты Вана, относящиеся к суммируемости по Риссу рядов Фурье. Именно, пусть $\varphi(t) \in L(0, 2\pi)$ — четная функция со средним значением на $(0, 2\pi)$, равным нулю, и дробным интегралом

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \varphi(u)\,(t-u)^{\alpha-1}\, du \quad (\alpha > 0).$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 1. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и

$$\varphi_\alpha(t) = o\{t^\alpha (\log t^{-1})^{-\alpha\beta}\} \quad \text{при} \quad t \to 0,$$

то ряд Фурье функции $\varphi(x)$ в точке $x = 0$ суммируем методом Рисса $(\exp(\log \omega)^{1+\beta}, \alpha + \delta)$ к нулю, где $\alpha + \delta > [\alpha] + 1$ для дробных α, т. е.

$$\sum_{1 \leqslant n < \omega} \{\exp(\log \omega)^{1+\beta} - \exp(\log n)^{1+\beta}\}^{\alpha+\delta} a_n = o\{\exp[(\alpha+\delta)(\log \omega)^{1+\beta}]\},$$

при $\omega \to \infty$, где a_n — коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$. П. Л. Ульянов

8552. Выпуклая емкость и ряды Фурье. Темко К. В., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 2, 225—227

Резюме сообщения о результатах работы автора (РЖМат, 1957, 4703).

8553. Суммируемость по Абелю двойных рядов, полученных последовательным дифференцированием двойных рядов Фурье. Мак-Миллин (Abel summability of the double series successively derived from the double Fourier series. McMillin Kenneth M.), Tôhoku Math. J., 1956, **8**, № 2, 183—187 (англ.)

Обобщаются результаты Мисра (Misra, Duke Math. J., 1947, **14**, 167—177). Именно, пусть $f(x, y)$ — периодическая интегрируемая функция на квадрате $[-\pi \leqslant x \leqslant \pi, \ -\pi \leqslant y \leqslant \pi]$ и

$$A(x, y, r, p) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v)\, P(r, u-x)\, P(p, v-y)\, du\, dv,$$

где $0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant p < 1$ и $P(r, \varphi)$ — ядро Пуассона, т. е.

$$P(r, \varphi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\varphi}.$$

Приводятся достаточные условия для функции $f(x, y)$, при которых в точке (x_0, y_0) существует предел

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ p \to 1}} \frac{\partial^{j+k} A(x, y, r, p)}{\partial x^j \, \partial y^k}\Bigg|_{(x_0, y_0)}$$

П. Л. Ульянов

8554. Единственность двойных тригонометрических рядов при сходимости по кругам. Шапиро (The uniqueness of double trigonometric series under circular convergence. Shapiro Victor L.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, **42**, № 11, 885—887 (англ.)

Работа непосредственно примыкает к предыдущим работам автора (РЖМат, 1954, 3663, 3988).

Доказывается теорема: Пусть $\sum_{1 \leqslant |M| < \infty} a_M e^{iMX}$ — двойной тригонометрический ряд, где $M = (m, n)$ (m и n — целые числа), $X = (x, y)$ (x и y — действительные числа), $MX = mx + ny$, $|M| = (m^2 + n^2)^{1/2}$. Тогда, если $a_M = o(1)$ при $|M| \to \infty$ и для всех X $S_R(X) = \sum_{1 \leqslant |M| \leqslant R} a_M e^{iMX} \to 0$ при $R \to \infty$, то $a_M = 0$ для всех M. П. Л. Ульянов

8555. О коэффициентах Фурье—Стилтьеса неубывающей функции. Гиццетти (Sui coefficienti di Fourier — Stieltjes di una funzione non decrescente. Ghizzetti Aldo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, **20**, № 5, 580—583 (итал.)

Дается новое доказательство необходимого и достаточного условия для того чтобы последовательность $\{c_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ $(c_{-k} = \bar{c}_k)$ была последовательностью тригонометрических моментов неубывающей функции.

Г. И. Натансон

8556. О коэффициентах Лежандра—Стилтьеса неубывающей функции. Гиццетти (Sui coefficienti di Legendre — Stieltjes di una funzione non decrescente. Ghizzeti Aldo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, **20**, № 6, 753—758 (итал.)

Выводятся условия для того чтобы последовательность $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ была последовательностью коэффициен-

тов Лежандра—Стилтьеса неубывающей функции $\alpha(x)$, т. е. чтобы

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} P_k(x)\, d\alpha(x). \qquad (1)$$

Пусть

$$b_k = -k \sum_{r=0}^{[k/2]} \frac{(2k-2r-2)!!\,(2r-3)!!}{(2r)!!\,(2k-2r-1)!!}\, c_{k-2r} \quad (k=1, 2, \ldots),$$

$$b_0 = c_0, \quad 0!! = (-1)!! = 1, \quad (-3)!! = -1.$$

Тогда для справедливости (1) необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{b_k\}$ была положительно определенной. При этом

$$b_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \cos k \arccos x\, d\alpha(x).$$

Г. И. Натансон

8557. Об одном методе приближения тригонометрическими полиномами. Соколов И. Г., Наук. зап. Львівськ. ун-ту, 1956, **38**, № 7, 36—41

Изучаются константы Лебега $M_p^{(n)}$ для сумм Валле-Пуссена $\sigma(n, p, f, x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^{n} s_k(f, x)$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$, где $s_k(f, x)$ — частичная сумма Фурье. Автор ошибочно относит начало рассмотрения сумм $\sigma(n, p, f, x)$ к 1940 г., тогда как Валле-Пуссен рассматривал их значительно раньше (Vallée Poussin C. Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris, 1919, ch. II).

В работе имеется много описок и опечаток, основной результат работы — формула (14) — должен иметь вид

$$M_p^{(n)} = \frac{4}{\pi^2} \lg \frac{2n-p+1}{p+1} + \frac{4}{\pi^2}\left[C + 2\lg 2 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lg \nu}{4\nu^2-1}\right] + O\left(\frac{p+1}{2n-p+1}\right),$$

где C — постоянная Эйлера. Все результаты работы были получены ранее С. Б. Стечкиным (Докл. АН СССР, 1951, **80**, № 4, 545—549). (Это отмечено также автором заметки в его письме, опубликованном в журнале Наук. зап. Львівськ. ун-ту, 1957, **44**, вып. 8. *Ред.*).

С. А. Теляковский

8558. О некоторых методах приближения непрерывных функций тригонометрическими полиномами. Калашников (Про деякі методи наближення неперервних функцій тригонометричними поліномами. Калашников М. Д.), Доповіді АН УРСР, 1956, № 2, 113—118 (укр.; рез. русск.)

Пусть $f(x) \in \tilde{C}$ ($\tilde{C}$ — класс непрерывных 2π-периодических функций), $N > 2n$ — произвольное натуральное число. Строятся полиномы

$$T_{n,m}^{(N)}(f, x) = \sum_{k=0}^{m}{}' (a_k^{(N)} \cos kx + b_k^{(N)} \sin kx) \quad (m = \overline{0, n})$$

(штрих указывает, что свободный член пишется как $a_0^{(N)}/2$), где

$$a_k^{(N)} = \frac{2}{N} \sum_{\nu=1}^{N} f(x_\nu) \cos kx_\nu, \quad b_k^{(N)} = \frac{2}{N} \sum_{\nu=1}^{N} f(x_\nu) \sin kx_\nu, \quad x_\nu = 2\pi\nu/N \quad (\nu = \overline{1, N}).$$

В частности, $T_{n,n}^{(2n+1)}$ есть интерполяционный полином с равноотстоящими узлами, $T_{n,n}^{(N)}$ дает минимум выражению $\sum_{\nu=1}^{N} [f(x_\nu) - T_N(x_\nu)]^2$ среди всех полиномов порядка $\leqslant n$ и $T_{n,n}^{(2n+2)}$ есть полином наилучшего (равномерного) приближения для $f(x)$ на системе точек $\nu\pi/(n+1)$, $\nu = \overline{1, 2n+2}$. Кроме того,

$$\lim_{N\to\infty} T_{n,n}^{(N)}(f, x) = S_n(f, x),$$

где $S_n(f, x)$ есть сумма Фурье порядка n для функции $f(x)$. Рассматриваются средние вида

$$\sigma_{n,p}^{(N)}(f, x) = (p+1)^{-1} \sum_{k=0}^{p} T_{n,n-k}^{(N)}(f, x).$$

Средние этого типа рассматривались для сумм Фурье и интерполяционных полиномов с равноотстоящими узлами С. М. Никольским (Изв. АН СССР, 1940, **4**, № 6, 519); см. также работу референта (реф. 8557). Пусть $M_{n,p}^{(N)}(x)$ есть норма (при фиксированном x) функционала $\sigma_{n,p}^{(N)}(f, x)$. Находится главный член асимптотического выражения для $M_{n,p}^{(N)}(x)$ при различных предположениях относительно N, n и p.

Пусть $0 \leqslant p = p(n) \leqslant n$. Для того чтобы для всех $f \in \tilde{C}$ имело место равенство $\lim_{n\to\infty} \sigma_{n,p}^{(N)}(f, x) = f(x)$ равномерно относительно x, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n\to\infty} p(n)/n > 0$.

Если существуют пределы при $n \to \infty$

$$\lim p/n = \alpha, \quad \lim n/N = \beta$$

и $\alpha > 0$, то существует

$$\lim_{n\to\infty} \max_x M_{n,p}^{(N)}(x) = \mu.$$

В работе имеются опечатки (главным образом в индексах суммирования).

Примечание референта. Требование $N = m(2n+1)$, накладываемое на число N для того, чтобы $\lim T_{n,n}^{(N)}(f; x) = S(f, x)$, излишне.

И. Г. Соколов

8559. Об одной наилучшей сумматорной формуле. Турецкий А. Х., Уч. зап. Белорусск. ун-та, 1957, вып. 32, 49—57

Рассматривается класс $MW_2^{(r)}$ функций периода 2π, имеющих r-ю дробную производную (в смысле Вейля), для которой

$$\|f^{(r)}\|_{L_2} \leqslant M. \qquad (1)$$

Рассматривается интерполяционная формула

$$L_m(f) = \sum_{k=0}^{2m} f(x_k)\, l_k(x), \qquad (2)$$

где $0 \leqslant x_k < x_{k+1} < 2\pi$ и $l_k(x)$ — такие тригонометрические полиномы порядка не выше n $(n \leqslant m)$, что $L_n(T_n) = T_n$ для любого полинома T_n порядка не выше n.

Неравенство Буняковского—Шварца дает оценку:

$$\|f - L_n(f)\|_{L_2} \leqslant M\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r}\left\{\cos\left[k(t-x) + \frac{r\pi}{2}\right] - \sum_{\nu=0}^{2m} l_\nu(x) \cos\left[k(t-x)_\nu + \frac{r\pi}{2}\right]\right\}\right)^2 dx\, dt\right]^{1/2}. \qquad (3)$$

Автор называет интерполяционную формулу (2) наилучшей, если полиномы $l_k(x)$ таковы, что правая часть неравенства (3) достигает наименьшего значения (при условии (1)).

Для случая равноотстоящих узлов $x_\nu = \frac{2\nu\pi}{2m+1}$ ($\nu = \overline{0,2m}$) находятся явные выражения для коэффициентов наилучших полиномов $l_k(x)$ и для минимума правой части неравенства (3). И. Г. Соколов

8560Д. Некоторые теоремы о тригонометрических полиномах. Хюльтен-Каваллиус (Sòme theorems concerning trigonometrical polynomials. Hyltén-Cavallius Carl. Thesis. Doct. Philos. Inst. Math. Univ. Lund., 1955, Lund, Håkan Ohlssons Boktry, 1955, 3 pp.) (англ.)

См. также: 8576, 8746, 8893, 8894

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

8561. О двух проблемах Н. Н. Лузина. Трохимчук Ю. Ю., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 215—222

Если $f(z)$ — непрерывная, однозначная функция в области D, то почти для всех $z \in D$ множество моногенности (РЖМат, 1956, 7301) $\mathfrak{M}_z$ этой функций суть либо окружность, либо полные плоскости.

Если множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ не зависит от точки z, то $\mathfrak{M}_z$ либо есть полная плоскость, либо окружность, причем в последнем случае $f(z)$ имеет вид $f(z) = Az + B\bar{z} + C$, где A, B, C — постоянные.

Если $f(z)$ имеет полный дифференциал в точке z_0, то множество $\mathfrak{M}_{z_0}$ является окружностью или точкой.

Строится пример функции $f(z)$, для которой множество $\mathfrak{M}_z$ почти для всех точек z области D является полной плоскостью. А. Д. Тайманов

8562. Еще о задаче Н. Н. Лузина. Мышкис А. Д., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 2 (74), 155—157

Строится любопытный пример непрерывной действительной функции $\varphi(x)$, имеющей в каждой точке x любые производные числа $a \in (-\infty, +\infty)$ (число a называется производным числом функции $\varphi(x)$ в точке x, если существует последовательность $\{h_n\}$, $h_n \to 0$ для которой

$$\frac{\varphi(x+h_n)-\varphi(x)}{h_n} \to a \quad (n \to \infty)).$$

Эта функция строится по образцу классической функции Вейерштрасса:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi x/\alpha_n)}{2^n} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

где $\alpha_1 = 1$, $\alpha_n/4\alpha_{n+1} = \beta_n$ — натуральное нечетное ($n = 1, 2, \ldots$), при этом числа β_n достаточно быстро растут.

Полагая $f(x+iy) = \varphi(x)$, получим комплексную непрерывную функцию $f(z)$, определенную на всей плоскости и имеющую в каждой ее точке z любые производные числа (последние определяются как и выше). Этим примером решается вопрос, связанный с одной задачей Н. Н. Лузина (реф. 8561).

Примечание референта. Функция $F(z) = z + i\varphi(x)$ однолистна на всей плоскости и обладает тем же свойством, что и построенная выше функция $f(z)$. Ю. Ю. Трохимчук

8563. О полноте системы функций $\{z^{\lambda_n}\}$ в комплексной области при взвешенно-квадратической аппроксимации. Джрбашян М. М., Хачатрян И. О., Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 6, 914—917

Рассматривается класс $B_2^{(\alpha)}[P(r)]$ всех функций $f(z)$, голоморфных в области $\Delta(\alpha)$, представляющей собой угол $|\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}$, $\alpha \geqslant 1/2$, и удовлетворяющих условию

$$\iint\limits_{\Delta(\alpha)} e^{-P(|z|)} |f(z)|^2 \, dx\, dy < \infty,$$

где

$$P(r) = P(1) + \int_1^r \frac{\omega(t)}{t}\, dt,$$

а $\omega(t)$ — данная функция, монотонно стремящаяся к бесконечности вместе с t.

Если $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant h > 0$, причем при любом b $(0 < b \leqslant 1)$

$$\int_1^b \frac{P(be^{k_*(r,\alpha)})}{r^2}\, dr = +\infty, \qquad (1)$$

где

$$k_*(r, \alpha) = \inf_{r' \geqslant r} \left[2 \sum_{\lambda_n < r} \lambda_n^{-1} - \frac{1}{\alpha} \ln r \right],$$

то система функций $\{z^{\lambda_n}\}$ полна в классе $B_2^{(\alpha)}[P(r)]$, т. е. для всякой функции $f(z) \in B_2^{(\alpha)}[P(r)]$,

$$\inf_{n,\, a_k} \iint\limits_{\Delta(\alpha)} e^{-P(r)} \left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k z^{\lambda_k} \right|^2 dx\, dy = 0.$$

(При этом у функций z^{λ_n} рассматривается в разрезанной вдоль луча $(-\infty, 0)$ плоскости z та их ветвь, которая принимает вещественные положительные значения на полуоси $(0, +\infty)$). Устанавливается еще одна теорема, дающая достаточное условие для полноты системы $\{z^{\lambda_n}\}$ в другом примыкающем сюда классе функций. А. Ф. Тиман

8564. Дальнейшие результаты об алгебраических базисных множествах полиномов. III. Макар, Макар (Further results on algebraic basic sets of polynomials. III. Makar Ragy H., Makar Bushra H.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet ensch., 1956, **A59**, № 3, 295—300; Indagationes math., 1956, **18**, № 3, 295—300 (англ.)

Статья является продолжением предыдущей работы авторов (РЖМат, 1956, 339). См. также РЖМат, 1954, 1628, 1994; 1956, 1042.

Пусть $\{P_n(z)\}$ — базисное степени m алгебраическое множество, имеющее порядок ω и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{u(n)}{n} = u < \infty, \quad \underline{\lim} \frac{\ln |\pi_{nn}|}{n \ln n} \geqslant 0. \qquad (1)$$

Тогда если множество $\{q_n(z) = \lambda\{P_n(z)\} + \mu\{z^n\}$

является базисным, то его порядок Ω удовлетворяет точному неравенству $\Omega \leqslant (1+u+\ldots+u^{m-2})\,\omega$.

Если $\{P_n(z)\}$ — квазипростое базисное множество степени m и порядка ω, удовлетворяющее условию (1), то при $m \geqslant 3$ обратное множество $\{\overline{P}_n(z)\}$ имеет порядок $\overline{\omega} \leqslant (1+u)\,\omega$, а при $m=2$ $\overline{\omega}=\omega$. Если все нули $P_n(z)$, где $\{P_n(z)\}$ — алгебраически простое базисное множество степени m, удовлетворяющее условию (1), лежат в круге $|z| \leqslant kn^{\lambda}$, $(\lambda \geqslant 0)$, то порядок этого множества не превышает $u^{m\lambda}$. А. Ф. Тиман

8565. О некоторых конформных отображениях в пространстве. Рид (On certain conformal maps in space. Reade Maxwell O.), Michigan Math. J., 1957, **4**, № 1, 65—66 (англ.)

Доказывается теорема: всякое отображение $y=y(x)$, $y(0)=0$, открытого шара $\|x\|<1$ на шар $\|y\|<1$, гомеоморфное, конформное и дифференцируемое с положительным якобианом, есть вращение. В простом и изящном доказательстве используются пространственный аналог изопериметрического неравенства и элементарные свойства субгармонических функций. Автор отмечает, что подобный результат для более общих областей был установлен М. А. Лаврентьевым (РЖМат, 1955, 1736), но при более ограничительных условиях относительно гладкости отображения.

А. И. Маркушевич

8566. Искажения при псевдоконформных отображениях. Старк (On distortion in pseudo-conformal mapping. Stark J. M.), Pacif. J. Math., 1956, **6**, № 3, 565—582 (англ.)

Применяется метод Бергмана минимальных задач и метод сравнения инвариантной и евклидовой метрик к получению оценок для искажений при псевдоконформных отображениях длин и углов. Результаты, которые получает автор, являются, по существу, повторением теорем, полученных ранее Бергманом (Bergman S., Atti Accad. naz. Lincei Rend., 6 ser., 1934, **19**, 474—478) и референтом (Матем. сб., 1936, **1**, 569—574). Б. А. Фукс

8567. О коэффициентах однолистных функций. III. Гун Шэн (單葉函數的係數. (III) 龔昇), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, **6**, № 3, 490—499 (кит.; рез. англ.)

Часть I, II, см. РЖМат, 1955, 3166; 1957, 1330.

Пусть S — класс функций $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$, регулярных и однолистных в $|z|<1$. В работе находятся некоторые новые оценки сверху для $|c_n|$ в классе S. Например, показано, что существует абсолютная постоянная N такая, что для $n>N$ в классе S имеет место оценка $|c_n| < \frac{e}{2}(n-\sqrt{n})$. Н. А. Лебедев

8568. Нечетные типично-вещественные функции. Ху Цзя-чань (典型實照的奇函數. 胡家赣), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, **6**, № 4, 651—664 (кит.; рез. англ.)

Рассматриваются функции $f(z)$, регулярные в круге $|z|<1$ и удовлетворяющие условиям $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f(-z)=-f(z)$, $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} f(z) > 0$ для $\operatorname{Im} z \neq 0$. Для таких функций дается представление

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{z+z^3}{(1+z^2)^2-4z^2\cos^2\theta}\,d\alpha(\theta),$$

где $\alpha(\theta)$ — возрастающая функция с $\int_0^{\pi} d\alpha(\theta)=\pi$, из которого получаются точные оценки сверху и снизу величин $|f(z)|$, $|f'(z)|$ для любого фиксированного z из единичного круга. С. А. Гельфер

8569. О коэффициентах Тейлора некоторых классов функций. Артемиадис (Sur les coefficients de Taylor de certaines classes de fonctions. Artémiadis Nicolas K.), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 6, 713—715 (франц.)

Рассматриваются:

1) класс $\mathfrak{M}$ регулярных в $|z|<1$ функций $F(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, для каждой из которых $\operatorname{Re} F(z) \geqslant \operatorname{Im} F(z)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ при всех $\alpha=\arg z$ и всех $r=|z|<1$, начиная с некоторого;

2) класс $\mathfrak{N}$ регулярных в $|z|<1$ функций $F(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, для каждой из которых $\operatorname{Re} F(z)+\frac{1+r}{1-r}\operatorname{Im} F(z)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\geqslant 0$ при всех $\alpha=\arg z$ и всех $r=|z|<1$, начиная с некоторого.

Доказываются три теоремы о коэффициентах этих функций; приведем две из них.

Теорема 1. Если $F(z)\in\mathfrak{M}$, то $|a_n+a_{n+2}|\leqslant 2$ и $|a_n|\leqslant 2n+1$, $n=0,1,\ldots$ Пример $F(z)=\frac{1}{1-z}$ показывает, что первое неравенство не может быть усилено.

Теорема 3. Если $F(z)\in\mathfrak{N}$, то $|a_{n+2}-a_n|\leqslant 2$ и $|a_n|\leqslant n$, $n=1,2,\ldots$ Пример $F(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ показывает, что эти неравенства не могут быть усилены.

Доказываются также несколько асимптотических равенств для сумм коэффициентов типично-вещественных в круге функций и теорема о суммируемости процессом Чезаро рядов из коэффициентов таких функций.

Ю. Е. Аленицын

8570. Обобщение одной теоремы Мандельбройта. Артемиадис (Généralisation d'un théorème de M. S. Mandelbrojt. Artémiadis Nicolas K.), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 7, 834—836 (франц.)

Рассматривается класс $T(p)$ функций $F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(p)} z^n$, регулярных и типично-вещественных порядка p в круге $|z|<1$, впервые введенный Робертсоном (Robertson M. S., Ann. Math., 1937, **38**, 770—783) и определяемый следующим условием: каждая функция $F(z)$ этого класса имеет вещественные коэффициенты и $\operatorname{Im} F(z)$ меняет знак $2p$ раз на $|z|=r$ для $0<\rho_p<r<1$. При $p=1$ получаем класс функций типично-вещественных в $|z|<1$. Мандельбройт (Mandelbrojt S., Bull. sci. math., 1934, **58**) доказал следующую теорему: Если $F(z)\in T(1)$, $C_1^{(1)}=1$, то $\lim_{r\to 1-0} F(r)=F(1)$ существует и положителен (может быть равен $+\infty$) и

$$F(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{s_1+\ldots+s_n+s_{n+1}/2}{n},$$

где $s_k=1+C_2^{(1)}+\ldots+C_k^{(1)}$.

Эта теорема обобщается на случай $F(z)\in T(p)$, $p>1$. При этом, поскольку в случае $p>2$ доказательство принципиально не усложняется, теорема формулируется и доказывается для $p=2$.

Пусть $\left(r,\vartheta_k^{(r)}\right)$ в полярных координатах есть точка на $|z|=r$, в которой $\operatorname{Im} F(z)$ меняет знак и E — множество точек сгущения на $|z|=1$ всех точек $\left(r,\vartheta_k^{(r)}\right)$ при $r\to 1$. Если $(1,\vartheta)\in E$, то пусть $\gamma=\cos\vartheta$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется $\mathfrak{M}$-суммируемым, если существует $\lambda \geqslant 0$ такое, что при $s_k = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu$, $k=1, 2, \ldots$, предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_2 + \ldots + s_{n-1} + s_n/2 + \lambda(s_{n+1} - s_{n-1})}{n}$$

существует, конечен и отличен от нуля.

Теорема. Если $F(z) \in T(2)$, $\lim_{r\to 1-0} F(r) = F(1)$ существует, конечен и отличен от нуля, то:

а) если существует по крайней мере одна точка E такая, что $\gamma \neq 1$ и $2F(1)(1-\gamma) - C_1^{(2)} \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(2)}$ является $\mathfrak{M}$-суммируемым и его сумма равна $F(1)$.

б) для всех точек $(1, \vartheta) \notin E$ имеем:

$$\left| C_{n+2}^2 - C_{n-2}^{(2)} - 2\gamma\left(C_{n+1}^{(2)} - C_{n-1}^{(2)}\right)\right| \leqslant 2\left|C_2^{(2)} - 2\gamma C_1^{(2)}\right|.$$

Ю. Е. Аленицын

8571. Некоторые свойства плоских множеств с положительным трансфинитным диаметром. Шибяк (Some properties of plane sets with positive transfinite diameter. Szybiak A.), Ann. polon. math., 1956, **3**, № 1, 19—28 (англ.)

Автор дает новое доказательство обобщенной леммы Келлога. Пусть трансфинитный диаметр (емкость) $d(E)$ границы E плоской неограниченной и содержащей точку $z=\infty$ области D положителен. Тогда множество $F_0 \subset E$ всех регулярных (по отношению к задаче Дирихле для области D) граничных точек имеет емкость, равную $d(E)$. Множество F_0 есть множество G_δ. Доказательство основывается на теории экстремальных точек Лея. Пусть $\eta^{(n)}$ обозначает n-ю экстремальную систему точек множества E и $\mu_n = \mu_n(e)$ — меру, определенную на борелевых множествах следующим образом: $\mu_n(e)=0$, если e не содержит точек системы $\eta^{(n)}$, и $\mu_n(e) = \dfrac{k}{n+1}$, если e содержит k точек системы $\eta^{(n)}$. Потенциал равновесия множества E будем обозначать далее через $U(z) = \int_E \ln|z-\zeta|^{-1} d\mu(\zeta)$ (Frostman O., Medd. Lunds Univ. Math. Sem., 1935, **3**, 1—118). Автор показывает существование предела последовательности $\{\mu_n\}$ и соотношение $\lim_n \mu_n = \mu$. В частности, обобщенная функция Грина для области D с полюсом в точке $z=\infty$, построенная с помощью экстремальных точек (Leja F., Ann. Soc. polon. math., 1933, **12**, 57—71), выражается формулой $-U(z) + \log 1/d(E)$. J. Górski

8572. Об одной проблеме Лузина. Дженкинс (On a problem of Lusin. Jenkins James A.), Michigan Math. J., 1955—1956, **3**, № 2, 187—189 (англ.)

Геометрически строится риманова поверхность $\mathfrak{R}$, расположенная над единичным кругом $|w|<1$, такая, что функция $w=f(z)$, конформно отображающая $|z|<1$ на $\mathfrak{R}$, удовлетворяет условиям: (I) образ каждого круга, касающегося $|z|=1$ изнутри в точке ζ, обладает бесконечной площадью для всех ζ, за исключением, быть может, множества меры нуль и первой категории; (II) там, где $\lim_{r\to 1} f(re^{i\vartheta})$ существует, его модуль равен 1. Этим дается геометрическое построение примера, отвечающего условиям вопроса, поставленного Лузиным (Лузин Н. Н., Докл. АН СССР, 1947, **56**, 447—450); аналитическое построение другого такого примера, основанное на иных соображениях, было предложено Ловатером и Пираняном (РЖМат, 1957, 2223). А. И. Маркушевич

8573. Заметка о степенных рядах и площади. Багемил (A note on power series and area. Bagemihl F.), Michigan Math. J., 1955—1956, **3**, № 2, 133—135 (англ.)

Пусть C обозначает $|z|=1$, а D — $|z|<1$. Пересечение D с какой-либо окрестностью точки $e^{i\vartheta}$ в дальнейшем называется „окрестностью $e^{i\vartheta}$“. Точка $e^{i\vartheta}$ называется „сильной точкой“ голоморфной в D функции $f(z)$, если каждая окрестность $e^{i\vartheta}$ отображается функцией $f(z)$ на риманову поверхность бесконечной площади. В противном случае $e^{i\vartheta}$ называется для $f(z)$ „слабой точкой“. Показывается, что, как правило (в смысле, подробно разъясняемом далее) для функций $f(z)$ любая точка $e^{i\vartheta}$ будет сильной точкой.

Теорема. Пусть $f(x, z)$ при любом фиксированном значении x, принадлежащем некоторому банахову пространству X, будет голоморфной функцией в области D, а при фиксированном $z \in D$ $f(x, z)$ будет линейным функционалом от x. Тогда существует открытое множество $G \subset C$ и множество $Q \subset X$ типа F_σ и первой категории такое, что для каждого $x \in X$ любая точка $e^{i\vartheta} \in G$ будет слабой точкой $f(x, z)$, а для каждого $x \in X - Q$ любая точка $e^{i\vartheta} \in C - G$ будет сильной точкой $f(x, z)$. Если же, кроме того, каждой точке $e^{i\vartheta} \in C$ соответствует $x_\vartheta \in X$ такое, что $e^{i\vartheta}$ будет сильной точкой $f(x_\vartheta, z)$, то для каждого $x \in X - Q$ любая точка $e^{i\vartheta} \in C$ будет сильной точкой $f(x, z)$.

Для доказательства теоремы применяются рассуждения, сходные с примененными автором в другой заметке (РЖМат, 1957, 6304) для получения результата, аналогичного сформулированному, в котором только вместо площадей кусков римановой поверхности идет речь о множествах предельных значений.

Г. Ц. Тумаркин

8574. О дифференциальных свойствах некоторых функций, представляемых сингулярными интегралами. Геронимус Я. Л., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, **20**, № 6, 775—782

Пусть $\mu(s)$ ограниченной вариации на $[0, l]$, $K(s)$ — нечетная на $[-l, +l]$ функция с единственной особенностью при $s=0$, причем

$$\int_0^l |K(s)|\, ds = +\infty.$$

Рассматривается интеграл

$$v(\sigma) = \int_0^l K(s-\sigma)\, d\mu(s),$$

понимаемый в смысле $\lim\left(\int_0^{\sigma-\varepsilon} + \int_{\sigma+\varepsilon}^{l}\right)$.

Теорема 1. Пусть на $[s_1 - h, s_2 + h]$ $(0 < s_1 - h < s_2 + h < l,\ h > 0)$ существует непрерывная $\mu^{(k)}(s)$ с модулем непрерывности $\omega_k(\delta)$, для которого

$$\int_0^a \omega_k(x)\,|K(x)|\,dx < +\infty \qquad (a > 0).$$

Если на $[\lambda, l]$, $\lambda > 0$, существует непрерывная $K_{(\sigma)}^{(k)}$, то на $[s_1, s_2]$ существует ограниченная $v^{(k-1)}(\sigma)$.

Частные случаи $K(s) = 1/s$ и $K(s) = \operatorname{ctg}(s/2)$ приводят к соответствующим предложениям об интегралах типа Коши — Стилтьеса и о рядах, сопряженных с рядами Фурье — Стилтьеса. И. П. Натансон

8575. Множества точек двузначности функций с ограниченной характеристикой. Ловатер, Пиранян (The sets of ambiguous points of functions of bounded characteristic. Lohwater A. J., Piranian G.), Michigan Math. J., 1957, **4**, № 1, 23—24 (англ.)

Точку $P = e^{i\theta}$ авторы называют точкой двузначности (ambiguous point) комплекснозначной функции $f(z)$, определенной в единичном круге D, если существует простая замкнутая жорданова кривая Γ, такая, что $P \in \Gamma$, $\Gamma - P \subset D$, причем $f(z)$ стремится к двум различным пределам при $z \to P$ вдоль Γ с противоположных сторон. Ранее Багемилом (РЖМат, 1956, 2940) было показано, что для произвольной комплекснозначной функции $f(z)$ множество ее точек двузначности не более чем счетно. Вслед за этим Багемил и Сейдель (РЖМат, 1957, 360) установили, что каждое счетное множество содержится в множестве точек двузначности некоторой аналитической функции $f(z)$ ограниченной характеристики в D. Усиливая последний результат, авторы доказывают, что в его формулировке слова „содержится в" могут быть заменены на „совпадает с".

Г. Ц. Тумаркин

8576. О целых функциях иррегулярного роста. Салес-Вальес (Sobre las funciones enteras a crecimiento irregular. Sales Vallés Francisco de A.), Collect. math., 1954, **7**, № 1, 69—94 (исп.)

Работа состоит из двух частей. В первой части изучается рост действительных функций. Через $L - E$ обозначается класс действительных и непрерывных функций, определенных при достаточно больших значениях x и получаемых с помощью обычных действий и действий взятия $\ln(\ldots)$ и $e^{(\cdots)}$ из переменного x и постоянных.

Порядок роста любой функции класса $L - E$ выражается полиномом, члены которого суть произведения действительных чисел на символы

$$\ldots \omega^{-3},\ \omega^{-2},\ \omega^{-1},\ 1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \ldots,$$

выражающие порядки роста соответственно функций

$$\ldots \ln(\ln(\ln x)),\quad \ln(\ln x),\quad \ln x,\quad x,\quad e^x,\quad e^{e^x},\quad e^{e^{e^x}},\ \ldots$$

Пусть $f(x)$ — любая положительная и непрерывная, начиная с некоторого значения x, функция. Если существует функция $\Phi(x)$ класса $L - E$ порядка μ такая, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(x)}{\Phi(x)} = L \quad \text{и} \quad \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(x)}{\Phi(x)} = l,$$

где L и l — конечные и отличные от нуля числа, то $f(x)$ называется функцией регулярного роста и порядок ее роста обозначается, согласно Борелю, через (μ).

С целью изучения функции иррегулярного роста вводятся следующие понятия. Если для функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ класса $L - E$ имеют место

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(x)}{\Phi(x)} = L \quad \text{и} \quad \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(x)}{\Psi(x)} = l,$$

причем $L, l \neq 0, \infty$, то порядки роста функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ называются соответственно верхними и нижними порядками роста функции $f(x)$ и обозначаются через $\overline{O}[f(x)]$ и $\underline{O}[f(x)]$. Разность $\overline{O}[f(x)] - \underline{O}[f(x)]$ называется колебанием роста функции $f(x)$. Устанавливаются основные действия над введенными порядками роста функции.

Изучается рост целых функций по их разложению в ряд. Доказывается, например, что если $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ — целая функция, $a_n \geqslant 0$ и $\varphi(n) = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$, причем $\underline{O}[\varphi(n)] = \omega^k p$ и $\overline{O}[\varphi(n)] = \omega^{k'} P$, то

$$\overline{O}[f(x)] < \omega\left(\omega^{-1} + \omega^{-k}\frac{1}{p}\right)$$

и

$$\underline{O}[f(x)] \geqslant \omega\left(\omega^{-1} + \omega^{-k'}\frac{1}{P}\right).$$

Во второй главе применяются введенные в первой главе понятия для изучения роста максимума модуля целой трансцендентной функции $f(z)$ комплексного переменного z и роста модуля функции $f(z)$ в данном направлении в зависимости от обычного порядка самой функции, для чего обобщается понятие уточненного порядка, введенное Валироном.

Направления φ, для которых $|f(re^{i\varphi})|$ является функцией регулярного роста, называются регулярными направлениями. Приводятся примеры функций следующих трех классов, на которые автор разделяет целые трансцендентные функции: 1) функции вполне регулярного роста, т. е. для которых все направления регулярны; 2) функции вполне иррегулярного роста, т. е. для которых все направления иррегулярны; 3) функции с регулярными и иррегулярными направлениями.

Э. Апарисио

8577. Явление интерференции для целых функций. Боас (Interference phenomena for entire functions. Boas R. P., Jr), Michigan Math. J., 1955—1956, **3**, № 2, 123—132 (англ.)

Дано распространение одной теоремы референта (РЖМат, 1953, 172) на операторы вида

$$L[f(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{zt}\lambda(t)\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

в классе целых функций $f(z)$ экспоненциального типа, которые при любом $\varepsilon > 0$ на вещественной оси обладают свойством $f(x) = O(e^{\varepsilon|x|})$, при условии, что

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} f(t)\,e^{-zt}\,dt$$

есть преобразование Лапласа — Бореля для $f(z)$, функция $\lambda(w)$ регулярна на отрезке $[-i\pi, i\pi]$ мнимой оси и Γ — замкнутый контур, содержащий этот отрезок.

Пусть $q > 1$ и $\lambda(t)$ имеет в точках $\pm i\pi$ нули кратности $p \geqslant q - 1$. Для любой целой функции $f(z)$ степени π, для которой $\sup_n |f(n)| < \infty$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ и $f(x) = o(|x|^q)$ на вещественной оси, всегда

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |L[f(x)]| < \infty. \tag{2}$$

При $q = 1$ устанавливается, что условие $\lambda(i\pi) = \lambda(-i\pi) = 0$, так же как и в случае

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu}\,d\rho(u),$$

рассматривавшемся референтом, необходимо для ограниченности на вещественной оси $L[f(x)]$ во всем классе целых функций $f(z)$ степени π, для которых

$$\sup_n |f(n)| < \infty, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

и

$$f(x) = o(|x|).$$

При тех же условиях, если $k = 1, 2, 3, \ldots, [q] - 1$ и $p \geqslant q - k - 1$, всегда $L[f(x)] = O(|x|^k)$.

Кроме того, при любом $q \geqslant 1$, если $p \geqslant q$, существует константа C, такая, что для всякой целой функции $f(z)$ степени π, для которой $\sup_n |f(n)| < \infty$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ и $f(x) = o(|x|^q)$

$$\left.\begin{array}{c}\sup\limits_{-\infty < x < \infty} |L[f(x)]| \leqslant C \sup\limits_n |f(n)|, \\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)\end{array}\right\} \tag{3}$$

В случае $q = 1$ для константы C в неравенстве (3) указано наименьшее возможное значение, которое равно

$\sup_x \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(x)|$, где $c_n(x)$ — коэффициенты ряда Фурье функции $e^{ixt}\cdot\lambda(lt) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x)\, e^{int}$.

Неравенство (3) обобщает прежний результат С. Н. Бернштейна (Изв. АН СССР, сер. матем. 1948, **12**, 421—444, РЖМат, 1955; 2628 (стр. 446—467 книги)) и теорему 3 из упомянутой выше статьи референта.

Распространение рассматриваемой автором теоремы референта на тот случай, когда функция $\lambda(w)$ регулярна в круге $|w| \leqslant \pi$, ранее было дано в его монографии Entire functions, Academy Press, New York, 1954.

А. Ф. Тиман

8578. О производных целых функций. Кумар-Джайн (On the derivatives of integral functions. Kumar Jain Mahendra), Ganita, 1953, **4**, 143—146 (англ.)

Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка ρ и нижнего порядка λ; $A(r)$, $A^{(1)}(r)$ — максимумы действительных частей f и f' соответственно; $\mu(r)$, $\mu^{(1)}(r)$ — максимальные члены степенных рядов для f и f'.

Тогда для достаточно больших r, если $\rho < \frac{1}{2}$, $A(r) > A^{(1)}(r)$; если $\lambda > 1$, $A(r) < A^{(1)}(r)$; если $\rho < 1$, $\mu(r) > \mu^{(1)}(r)$.

R. P. Boas, Jr

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 4, 347.

8579. Об одном представлении мероморфных функций в единичном круге. Фишман К. М., Докл. АН СССР, 1956, **107**, № 3, 366—369

Пусть $\sigma(\rho)$ — непрерывная монотонно убывающая функция на $[0, 1]$, положительная в интервале $(0, 1)$ и $Z_\sigma^{(p)}$ $(p > 0)$ — класс голоморфных в открытом единичном круге C_1 функций $f(z)$, для которых

$$\|f(z)\|_\sigma^{(p)} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\int |f(\zeta)|^p \sigma(\rho)\, d\rho\, d\theta\right)^{1/p} < \infty.$$

Если $p \geqslant 1$, то всякая функция $f(z) \in Z_\sigma^{(p)}$ представима в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\int f(\zeta) E(z\bar{\zeta}) \sigma(\rho)\, d\rho\, d\theta \quad (\zeta = re^{i\theta})$$

или

$$f(z) = -\bar{f}(0) + \frac{1}{\pi}\int_{C_1}\int \operatorname{Re} f(\zeta) E(z\bar{\zeta}) \sigma(\rho)\, d\rho\, d\theta,$$

где при

$$\alpha_n = \int_0^1 \sigma(\rho)\, \rho^{2n}\, d\rho$$

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\alpha_n}.$$

Если $F(z)$ мероморфна в C_1 и для ее характеристической функции $T_F(r)$ (см., например, Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М., 1941)

$$\int_0^1 \sigma(r)\, T_F(r)\, dr < \infty,$$

то имеет место представление

$$F(z) = \frac{K_s}{c_\lambda} z^\lambda \frac{\prod_s(z; a_n)}{\prod_s(z; b_n)} \times \exp\left[\frac{1}{\pi}\int_{C_1}\int \ln|F(\zeta) E(z\bar{\zeta}) S(\rho)\, d\rho\, d\theta\right],$$

где

$$\prod_s(z; z_n) = \prod_{0<|z_n|<1}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{-u_s(z, z_n)},$$

$$u_s(z, z_n) = \frac{1}{\pi}\int_{C_1}\int \ln\left|1-\frac{\zeta}{z_n}\right| E(z\bar{\zeta}) S(\rho)\, d\rho\, d\theta,$$

$$K_s = \exp\left[\frac{2\lambda}{\alpha_0}\int_0^1 S(\rho)\ln\frac{1}{\rho}\, d\rho\right],$$

$$S(\rho) = \int_\rho^1 \sigma(r)\, dr,$$

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — соответственно расположенные в порядке возрастания модулей последовательности нулей и полюсов функции $F(z)$ отличных от нуля и $F(z) = C_\lambda z^\lambda + \ldots$ $\ldots (C_\lambda \neq 0)$ — ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$.

Случай, когда $\sigma(r) = (1-r)^\alpha$, $(\alpha > -1)$, ранее был рассмотрен М. М. Джрбашяном (Сообщ. Ин-та матем. и механ. АрмССР, 1948, вып. 2).

А. Ф. Тиман

8580. О поведении однозначных аналитических функций в окрестности изолированной существенной особенности. Дингхас (Zum Verhalten eindeutiger analytischer Funktionen in der Umgebung einer wesentlichen isolierten Singularität. Dinghas Alexander), Math. Z., 1957, **66**, № 5, 389—408 (нем.)

В целях изучения функции $w(z)$, мероморфной в области $|z| > r_0$, строятся для кольцевых областей $R_{r|r_0}$ $(r_0 \leqslant |z| \leqslant r)$ функции, аналогичные функциям Неванлинна, например, $n(r|r_0, a)$ — число a — точек в $R_{r|r}$ и $T(r|r_0, w) = \int_{r_0}^{r} S(t|r_0, w)\frac{dt}{t}$, где $S(r|r_0, w) = \frac{1}{\pi}\int_{r|r_0}\frac{|w'|^\circ}{(1+|w|^2)^2}\, d\sigma$.

Полагая $[z_1, z_2] = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$ (хордальное расстояние точек z_1 и z_2), автор получает следующие уточнения теоремы Сохоцкого—Казорати—Вейерштрасса:

Теорема 4. Если $z = \infty$ не есть полюс, то для каждого комплексного a (a может равняться ∞) и для α, $0 < \alpha < 1$, существует последовательность $\{r_n\} \uparrow \infty$ такая, что $[w(z), a] < \exp\{-\alpha T(r|r_0, w)\}$ при $|z| = r_n$.

Теорема 7. Пусть

$$\nu_0(r, a) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}\frac{d\varphi}{[w, a]^2}\right\}^{-1/2}.$$

Если

$$\int_{r_0}^{\infty} \nu_0(r, a)^2 \frac{dr}{r} = \infty;$$

то

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{n(r|r_0, a)}{S(r|r_0, w)} \leqslant 1 \leqslant \varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r|r_0, a)}{S(r|r_0, w)}.$$

Теорема 8. Если

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r|r_0, a)}{S(r|r_0, w)} < 1,$$

то

$$\int_{r_0}^{\infty} \nu_0(r, a)^2 \frac{dr}{r} < \infty.$$

Теоремы 7 и 8 являются обобщением и развитием прежних результатов автора (Math. Ann. 1945, **120**, 581—584). Вводится также понятие дефекта $(\delta_0(r_0|a))$ и устанавливается обобщение теоремы Пикара—Неванлинна:

Теорема 10. Если z_0 не есть полюс, то для любых q различных точек $a_1, \ldots, a_q$ $(a_q = \infty, q \geqslant 3)$: $\sum_1^q \delta_0(r_0|a_k) \geqslant q-2$ (эта теорема переходит в известную в случае, когда $r_0 = 0$ и точка 0 является правильной точкой или полюсом функции $w(z)$).

А. И. Маркушевич

8581. О множестве значений, принимаемых голоморфными функциями вблизи существенных особенностей. Багемил (On the set of values assumed by holomorphic functions near essential singularities. Bagemihl F.), Math. Z., 1957, **67**, № 1, 49—50 (англ.)

С помощью простых рассуждений, использующих результат Безиковича (Besicovitch A. S., Proc. London Math. Soc., 1931, (2) **1**—9) о том, что если множество E существенных особенностей голоморфной функции $f(z)$ имеет линейную меру нуль, то в каждой окрестности любой точки из E $f(z)$ принимает значения, как угодно близкие ко всякому комплексному числу, доказывается, что при тех же предположениях существует множество комплексных чисел R второй категории, каждое из которых принимается $f(z)$ в любой окрестности всякой точки из E.

В то же время, как это было ранее показано Сейделем (Seidel W., Trans. Amer. Math. Soc., 1934, **36**, 201—226), существует голоморфная функция $f(z)$, множество существенных особенностей которой имеет линейную меру нуль, которая выпускает несчетное множество логарифмической емкости нуль. Г. Ц. Тумаркин

8582. О мероморфных функциях с ограниченной характеристикой. Лехто (On meromorphic functions of bounded characteristic. Lehto Olli), 12-te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953, Lund, 1954, 183—187 (англ.)

Краткий обзор результатов автора, относящихся к распределению значений, мероморфных в круге $|z|<1$ функций $f(z)$ с ограниченной характеристикой, при условии, что граничные значения $f(e^{i\varphi})$ почти для всех φ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ принадлежат замкнутому множеству Γ, с не пустым дополнением относительно w-плоскости. Результаты эти были опубликованы с доказательствами в нескольких работах (РЖМат, 1955, 2175; 1956, 365, 5206).

А. И. Маркушевич

8583. О многочленах, имеющих корень, модуль которого превышает единицу. Пароди (Sur les polynomes ayant un zéro de module supérieur à l'unité. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 11, 1436—1437 (франц.)

Доказывается теорема: Если многочлен $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n (a_n \neq 0)$ удовлетворяет условию $|a_1| > 1 + \sigma$, где $\sigma = \sum_{k=2}^{n} |a_k|$, то $n-1$ корней этого многочлена лежат в круге $|z| \leqslant 1$, а единственный корень, лежащий вне этого круга, лежит в области $|z(z+a_1)| \leqslant \sigma$, содержащейся в круге $|z+a_1| < 1$.

Эта теорема представляет уточнение одной прежней теоремы автора (РЖМат, 1956, 8590). В. А. Зморович

8584. О числе нулей полинома в области ограниченной кусочно-рациональной кривой. Клингенберг (Die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in Gebieten mit stückweise rationalen Randkurven. Klingenberg Wilhelm), Z. angew. Math. und Phys., 1956, **7**, № 4, 304—316 (нем.; рез. англ.)

С помощью обобщенного ряда Штурма указывается способ подсчета числа корней полинома в области комплексной плоскости z, ограниченной несколькими кривыми вида

$$z_\sigma = \frac{P_\sigma(t) + iQ_\sigma(t)}{R_\sigma(t)} \quad (a_\sigma \leqslant t \leqslant b_\sigma),$$

где P_σ, Q_σ, R_σ — некоторые полиномы с действительными коэффициентами. Применительно к полуплоскости этот метод использовался ранее (см., например, монографию Н. Г. Чеботарева и Н. Н. Меймана „Проблема Раусса — Гурвица для полиномов и целых функций". Тр. Матем. ин-та АНСССР, 1949, **26**, 331 стр.)

Ю. И. Неймарк

8585. Исследование асимптотических свойств больших по абсолютной величине корней квазиполиномов. Лабазин В. Г., Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1956, **33**, № 3, 194—197

Даются асимптотические формулы для больших по модулю корней квазиполинома

$$A(z)e^{2z} + B(z)e^{z} + C(z),$$

где $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ — полиномы степеней соответственно n, m и l. Рассматривается только интересный для приложений случай квазиполинома с главным членом $(n \geqslant m, n \geqslant l)$, т. е. имеющего лишь конечное число корней в правой полуплоскости. Выкладки и результат приведены для случая $n+l > 2m$; указано, что при $n+l \leqslant 2m$ исследование проводится аналогично.

Утверждается, что тот же метод возможно перенести на исследование корней квазиполиномов более общего вида

$$A_n(z)e^{nz} + A_{n-1}(z)e^{(n-1)z} + \ldots + A_0(z).$$

Г. Н. Чеботарев

8586. О типах целой функции двух комплексных переменных. Ронкин Л. И., Матем. сб., 1956, **39**, № 2, 253—266

Определяется тип целой функции конечной степени от двух переменных по совокупности этих переменных

$$\sigma = \overline{\lim_{|z|+|u|\to\infty}} \frac{\ln|f(z,u)|}{|z|+|u|}.$$

Сопряженными типами называются такие два числа σ_1, σ_2, что при любом $\varepsilon > 0$ и некотором положительном A_ε

$$|f(z,u)| < A_\varepsilon e^{(\sigma_1+\varepsilon)|z|+(\sigma_2+\varepsilon)|u|}$$

и при $\sigma_1' < \sigma_1$, $\sigma_2' \leqslant \sigma_2$ $\left(\sigma_2' < \sigma_2,\ \sigma_1' \leqslant \sigma_1\right)$ существуют такие последовательности z_n и u_n, что

$$\overline{\lim_{|z_n|+|u_n|\to\infty}} \frac{\ln|f(z_n,u_n|}{\sigma_1'|z_n|+\sigma_2'|u_n|} > 1.$$

Целая функция называется функцией ограниченного регулярного типа по z, если при любом $r > 0$ и $|u| \leqslant r$

$$|f(z,u)| < A_r e^{a|z|},$$

где a — постоянная и A_r — функция от r. Кроме того,

$$\sigma_z(u) = \overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\ln|f(z,u)|}{|z|}.$$

Основные результаты:

Теорема 1. Сопряженные типы целой функции конечной степени по совокупности переменных $f(z,u) = \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{a_{n,k}}{n!k!} z^n u^k$ совпадают с сопряженными радиусами сходимости ряда $\sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{a_{n,k}}{z^{n+1}u^{k+1}}$.

Теорема 2. У целой функции ограниченного регулярного типа по z, $\sigma_z(u) = \sup_u \sigma_z(u)$ всюду, за исклю-

чением, быть может, некоторого множества M_f, являющегося счетной суммой замкнутых множеств абсолютной гармонической меры нуль. Дан пример функции, у которой множество M_f незамкнутое. Показано, что любому множеству M указанного типа отвечает такая функция $\varphi(z, u)$, что $M \subseteq M_\varphi \subseteq \overline{M}$.

Заменяя тип $\sigma_z(u)$ индикатором

$$h_f(\theta, u) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta}, u)|}{r},$$

автор получает для этого случая теорему, аналогичную теореме 2. Б. Я. Левин

8587. Интегральное представление функций двух комплексных переменных. Темляков А. А., Изв. АН СССР, сер. матем., 1957, 21, № 1, 89—92

Доказывается теорема: Пусть: 1) D — ограниченная двоякокруговая область пространства переменных w, z, границей которой служат гиперповерхности $|w| = r_1(\tau)$, $|z| = r_2(\tau)$, где $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, причем $r_1(0) = r_2(0) = 0$, $0 < r_1'(\tau) \leqslant \tau^{-1} r_1(\tau)$, $r_1(1) < \infty$,

$$r_2(\tau) = \exp\left[-\int_0^\pi \tau(1-\tau)^{-1}\, d\ln r_1(\tau)\right];$$

2) функция $F(w, z)$ голоморфна в области D и непрерывна вместе со своими производными 1-го порядка в замкнутой области $\overline{D}$. Тогда

$$F(w, z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{\Phi[r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\zeta e^{-it}]}{\zeta - u}\, d\zeta,$$

где C — окружность

$$|\zeta| = 1,\ u = \tau w r_1^{-1}(\tau) + (1-\tau) z r_2^{-1}(\tau) e^{it},$$

$$\Phi(w, z) \doteq F(w, z) + wF_w'(w, z) + zF_z'(w, z).$$

Приводятся также некоторые следствия из этой теоремы. Б. А. Фукс

8588. Некоторые проблемы, относящиеся к аналитическим функциям многих переменных. Северн (Quelques problèmes se rapportant aux fonctions analytiques de plusieurs variables. Severi Francesco). Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, tenu à Bruxelles, Paris, G. Thone, 1953, 9—20 (франц.)

Ставится ряд проблем: 1. Возможно ли так определить линейные аналитические функционалы на ориентированных циклах проективного пространства или риманова многообразия, что для этих функционалов будет справедлива теорема типа Лиувилля? 2. Известно, что функция многих комплексных и действительных переменных, голоморфная в окрестности границы некоторой ограниченной области, голоморфно продолжаема на всю эту область. Возможно ли распространить этот результат на случай мероморфных функций? Утвердительный ответ на этот вопрос был позже дан в работе Бенке и Штейна (Behnke—Stein) (РЖМат, 1955, 4999).

Третья проблема относится к существованию и единственности в некоторой замкнутой области аналитической функции, принимающей на границе области значения, удовлетворяющие там некоторым условиям (например, удовлетворяющая там определенного типа системе дифференциальных уравнений). Четвертая проблема относится к существованию определенного типа квазиабелевых функций. Б. А. Фукс

8589. Минимальные области и кернфункция Бергмана. Машлер (Minimal domains and their Bergman kernel function. Maschler Michael), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 3, 501—516 (англ.)

Область D пространства переменных $z_1, \ldots, z_n = (z)$ называется минимальной с центром в точке $(t_1, \ldots, t_n) = (t) \in D$, если всякое псевдоконформное отображение $w_k = w_k(z)$, $k = 1, \ldots,$ области D, удовлетворяющее условию $\left.\frac{\partial(w_1, \ldots, w_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}\right|_{(z)=(t)} = 1$ переводит область D в такую область D^*, что $V(D) \leqslant V(D^*)$. Здесь $V(D)$ и $V(D^*)$ — объемы областей D и D^*. Автор доказывает, что если D — минимальная область, то кернфункция $K_D(z, \bar{t}) \equiv [V(D)]^{-1}$. Автор получает отсюда ряд следствий, относящихся к геометрической характеристике минимальных областей. Б. А. Фукс

8590. Особые точки комплексных многообразий и римановы области. Грауэрт, Реммерт (Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete. Grauert Hans, Remmert Reinhold), Math. Z., 1957, 67, № 2, 103—128 (нем.)

Классическая теория областей голоморфности (иначе, областей существования) функций n комплексных переменных построена для случая многолистных областей, не имеющих внутренних точек ветвления. Одной из важных задач теории функций является исследование областей голоморфности с внутренними точками ветвления. Последние, как известно, могут быть униформизируемыми и неуниформизируемыми (таковой, например, является начало координат для области существования функции $\sqrt{z_1 z_2}$). Обобщением многолистных областей с внутренними униформизируемыми точками ветвления являются комплексно аналитические многообразия. Теория функций на подобных многообразиях в настоящее время продвинута достаточно далеко. Обобщением многолистных областей, имеющих также и неуниформизируемые точки ветвления, служат комплексные пространства Бенке-Штейна и общие аналитические пространства А. Картана (определения этих пространств несколько отличаются друг от друга).

Авторы доказывают ряд теорем, из которых следует, что теория аналитических функций на комплексных пространствах существенно отличается от теории функций на комплексно-аналитических многообразиях, что основные свойства областей голоморфности без внутренних точек ветвления не переносятся на случай областей голоморфности с внутренними точками ветвления. В частности, авторы доказывают, что в отличие от комплексно-аналитических многообразий:

1. В n-мерном комплексном пространстве $(n-1)$-мерное аналитическое множество не всегда локально совпадает с нулевым множеством некоторой локально голоморфной функции; здесь $n \geqslant 3$. Размерности здесь и далее всюду — комплексные.

2. В n-мерном комплексном пространстве два $(n-1)$-мерных аналитических множества могут пересекаться по множеству изолированных точек (в n-мерном комплексно-аналитическом многообразии это множество пересечения или пусто или является $(n-2)$-мерным аналитическим множеством). Здесь $n \geqslant 3$.

3. Существуют комплексные пространства как угодно большой размерности, на которых существуют мероморфные функции, имеющие изолированные точки неопределенности.

Авторы доказывают, что в отличие от областей голоморфности без внутренних точек ветвления:

1. Существуют конечно-листные области голоморфности размерности $n \geqslant 3$, имеющие (даже только униформизируемые) внутренние точки ветвления, граница которых является не аналитически выпуклой (иначе не является выпуклой в смысле Леви) по крайней мере в одной ее точке.

2. Существуют голоморфно невыпуклые конечнолистные области голоморфности размерности $n \geqslant 3$, имеющие (даже только униформизируемые) внутренние точки ветвления. Б. А. Фукс

8591. Аналитическое расслоение комплексных пространств. Штейн (Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Stein Karl), Math. Ann., 1956, **132**, № 1, 63—93 (нем.)

Расслоение Z n-мерного комплексного пространства X называется аналитическим, если множеству M элементов расслоения Z можно так придать структуру комплексного пространства, что естественное отображение X на M окажется голоморфным.

Пусть F — некоторое голоморфное отображение пространства X на комплексное пространство X_1, $Z(F)$ — порождаемое этим отображением аналитическое расслоение пространства X, $Z'(F)$ — соответствующее простое расслоение пространства X (при последнем расслоении слоями являются связные компоненты расслоения $Z(F)$).

Автор строит теорию аналитических расслоений комплексных пространств. Так, рассматривается вопрос о том, когда расслоение $Z'(F)$ является аналитическим, когда оно является наиболее тонким аналитическим расслоением $\tilde{Z}$ пространства X.

В числе других автор доказывает следующее предложение: пусть X — некоторое комплексно-аналитическое многообразие, F — его голоморфное отображение на комплексное пространство X_1; все связные компоненты аналитических множеств $F^{-1}(F(p))$ (для всех точек $p \in X$) предполагаются компактными. Тогда определенное с помощью отображения F простое расслоение $Z'(F)$ многообразия X является нормальным аналитическим расслоением. Естественное отображение многообразия X на комплексное пространство $X/Z'(F)$ является собственным голоморфным отображением.

Эта теорема остается справедливой, если X является связным n-мерным общим аналитическим пространством в смысле А. Картана, а отображение F имеет на X глобальный ранг n или $n-1$. Автор также находит достаточные условия для того, чтобы пространство $X/Z'(F)$ являлось общим аналитическим пространством А. Картана.

Во введении в сжатой форме излагаются основные понятия, относящиеся к комплексным пространствам и их голоморфным отображениям. Б. А. Фукс

8592. Аналитические вектор-функции многих комплексных переменных. Оно (Analytic vector functions of several complex variables. Ono Isao) J. Math. Soc. Japan, 1956, **8**, № 3, 216—246 (англ.)

Система K аналитических функций n комплексных переменных определяет аналитическую вектор-функцию. Продолжая свои прежние исследования (Ozaki A., Ono J., РЖМат, 1954, 1632), автор распространяет на вектор-функции теорему о вычетах, оценки Шура для коэффициентов ряда Тейлора, теорему Ландау — Дьедонне о радиусе однолистности, принцип аргумента и ряд других предложений. Б. А. Фукс

8593. К теории кернфункции. Сугавара (On the theory of kernel functions. Sugawara Masao), 東京大學理學部紀要, Токё дайгаку ригакубу киё; J. Fac. Sci., Univ. Tokyo. Sec. I, 1956, **7**, № 3, 265—303 (англ.)

Статья посвящена рассмотрению бергманновской кернфункции пространства m, n матриц и ее приложений к теории псевдоконформных отображений. В части 1 излагается теория ортонормированных систем матриц, с их помощью определяется кернфункция ограниченной области пространства переменных $z_1, \ldots, z_{mn}$, устанавливаются ее основные свойства. В части 2 строится теория репрезентативных областей; рассматриваются отображения круговых областей некоторых типов; находятся отображения единичного гипершара на себя. В заключение рассматривается инвариантная метрика Бергмана; для единичного гипершара находится выражение линейного элемента метрики, строятся уравнения ее геодезических линий, находится выражение римановой кривизны.

В связи со статьей Сугавара см. работы Хуа Ло-гэна (Hua Loo-Keng, Acta Math. Sinica, 1952, **2**, 288—321; РЖМат, 1954, 3686; 1956, 379) Б. А. Фукс

8594. О лемме Шварца в матричном пространстве. Одзаки, Касиваги, Цубои (On the Schwarzian lemma in the matrix space. Ozaki Shigeo, Kashiwagi Sadao, Tsuboi Teruo), Sci. Rept Tokyo Kyoiku Daigaku, 1954, **A4**, 309—316 (англ.)

Обозначим через R линейное пространство всех матриц из m строк и n столбцов (типа (m, n)), элементами которых являются комплексные числа. Норма $A \in R$ определяется так же, как и норма линейного оператора, соответствующего A, который отображает комплексное n-мерное евклидово пространство в комплексное m-мерное евклидово пространство.

Пусть $Z = (z_{ij})$ — независимое переменное, изменяющееся в пространстве R. Функция $W(Z)$, отображающая R в R, называется аналитической, если элементы матрицы $W(Z)$ — аналитические функции mn переменных $z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{mn}$.

Сугавара (Sugawara, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1941, **17**, 483—488) показал, что классическая форма леммы Шварца остается в силе, т. е. $\|W(Z)\| \leqq \|Z\|$, когда $\|Z\| < 1$, при условии, что W — аналитическая функция, причем $\|W(Z)\| \leqslant 1$, когда $\|Z\| < 1$, а $W(0) = 0$.

В настоящей заметке условие $W(0) = 0$ заменяется на $W(A) = B$, где $\|A\| < 1$, $\|B\| < 1$, и выводится более точное неравенство для $W(Z)$.

Результат опирается на теорему о том, что функция вида

$$W = (A_1 Z + A_2)(A_3 Z + A_4)^{-1}$$

является взаимно однозначным отображением $\|Z\| < 1$ в $\|W\| < 1$, где A_1, A_2, A_3, A_4 — типа (m, n), (m, m), (n, m), (n, n) соответственно. A. E. Taylor

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 7, 689.

8595. Обобщение леммы Шварца в матричном пространстве. Одзаки, Касиваги, Цубои. (On extension of Schwarzian lemma in matrix space. Odzaki Shigeo, Kashiwagi Sadao, Tsuboi Teruo), Sci. Rept Tokyo Kyoiku Daigaku, 1954, **A4**, 317—318 (англ.)

Обозначения и определения см. в реф. 8594. Пусть W имеет то же самое значение, что и в лемме Шварца в форме Сугавара; предположим далее, что $W(tZ)$ имеет вид $t^m G(t, Z)$, где m — неотрицательное целое число и G — аналитическая функция от t, когда $\|tZ\| \leqslant 1$, причем $G(0, Z) = 0$. Тогда $\|W(Z)\| \leqq \leqq \|Z\|^{m+1} M$, где $M = \max \|W(Z)\|$, когда $\|Z\| = 1$. A. E. Taylor

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 7, 690.

8596. О принципе симметрии для полигармонических функций. Хубер (On the reflection principle for polyharmonic functions. Huber Alfred), Communs Pure and Appl. Math., 1956, **9**, № 3, 471—478 (англ.)

Пусть G — область n-мерного пространства, граница которой содержит открытое множество S гиперплоскости $x_1 = 0$.

Теорема. Пусть $w(x_1, \ldots, x_n)$ — функция полигармоническая, порядка p в области G и $w/x_1^{p-1} \to 0$ на S. Тогда w аналитически продолжается в симметрическую область G^* по формуле

$$w(-x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-x_1)^{p+k}}{(k!)^2} \Delta^k \left(\frac{w(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_1^{p-k}} \right) \cdot$$

Случай $p=2$ рассмотрен ранее Даффином (Duffin R. J., Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, 347) и Порицким (Poritsky H., Trans. Amer. Math. Soc., 1946, **59**, 248—279)

В качестве следствия получается следующее предложение типа Фрагмен—Линделефа: Если w — полигармоническая функция порядка p в полуплоскости $x_1>\vartheta$ и $w/x_1^{p-1}\to 0$ при $x_1\to 0$, то из $w=0(|x|^p)$, где $|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$, следует, что $w\equiv 0$.

Н. С. Ландкоф

8597. О сингулярностях разложений Лежандра. Нехари (On the singularities of Legendre expansions. Nehari Zeev), J. Rational Mech. and Analysis, 1956, **5**, № 6, 987—992 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть $P_n(t)$ — полином Лежандра степени n, $\{a_n\}$ — последовательность комплексных чисел, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n|^{1/n}=\zeta<1$, $g(t)$ и $f(z)$ — аналитические функции, определенные рядами $g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(t)$, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, сходящимися соответственно в областях $|t+1|+|t-1|<\frac{1+\zeta^2}{\zeta}$, $|z|<\frac{1}{\zeta}$. Тогда точка $t=r$ $(r\neq\pm 1)$, которая достигается при аналитическом продолжении вдоль пути C_t, начинающемся в точке $t=1$ и в дальнейшем не проходящем через точки $t=\pm 1$, будет являться особой точкой функции $g(t)$ тогда и только тогда, когда $r=\frac{1+\sigma^2}{2\sigma}$, где $z=\sigma$ есть особая точка функции $f(z)$, которая достигается при аналитическом продолжении $f(z)$ вдоль пути C_z, начинающемся в точке $z=1$ и совпадающем с одним из двух изображений C_t при конформном отображении $t=\frac{1+z^2}{2z}$. Предельным случаем этой теоремы является теорема Сечё (РЖМАТ, 1956, 338).

Н. А. Давыдов

8598. О новом квазианалитическом классе функций. Гончар А. А., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 5, 930—932

Через $R_n(f;\ F)$ обозначается наилучшее приближение функции $f(x)$ на замкнутом множестве F рациональными дробями, у которых степени числителя и знаменателя не превосходят n. Измеримая и почти везде конечная функция $f(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ включается в класс $R[0,\ 1]$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое замкнутое множество $F_\varepsilon\subset[0,\ 1]$, что

$$mF_\varepsilon>1-\varepsilon,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{R_n(f;\ F_\varepsilon)}=0.$$

Теорема 1. Если две функции из $R[0,\ 1]$ совпадают на множестве положительной меры, то они совпадают почти везде на $[0,\ 1]$.

Теорема 2. Функция из $R[0,\ 1]$ почти везде имеет асимптотическую производную, также входящую в $R[0,\ 1]$.

Теорема 3. Если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое замкнутое множество $F_\varepsilon\subset[0,\ 1]$, что

$$mF_\varepsilon>1-\varepsilon,\quad R_n(f;\ F_\varepsilon)<C(\varepsilon)\,n^{-p-\delta}$$

(p — натуральное, $\delta>0$), то у $f(x)$ почти везде существует p-я асимптотическая производная.

И. П. Натансон

8599. Вариационно-топологические теоремы краевых задач теории кручения валов переменного сечения. Метод сохранения области и мажорантных областей. Положий Г. Н., Изв. АН СССР, сер. матем. 1955, **19**, 245—270

Напряженное состояние при кручении вала переменного сечения определяется комплексным потенциалом напряжений

$$w=w(Z)=\varphi+i\psi,$$

где $Z=r+iz$ $(\mathrm{Re}\,Z>0)$, φ — функция перемещений и ψ — функция напряжений, связанные между собой равенствами

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{1}{\mu r^3}\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{1}{\mu r^3}\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

По аналогии с теорией фильтрации, автор называет функции φ и ψ соответственно потенциальной функцией и функцией тока. Решение задачи, таким образом, сводится к нахождению функции w в области G, ограниченной кусочно-гладким контуром L, в плоскости $Z=r+iz$ $(\mathrm{Re}\,Z>0)$, являющейся осевым сечением вала, по некоторым контурным условиям, заданным на границе L области G.

Вариацией комплексного потенциала напряжений называется функция комплексной переменной

$$\omega=\omega(Z)=w_1-w=\sigma+i\tau,$$

где $w_1=\varphi_1+i\psi$ — комплексный потенциал напряжений соответствующий области G_1, полученной из G путем вариации ее границы, такой, что $G_1\subset G$.

Для областей напряжений, ограниченных двумя линиями тока и двумя потенциальными линиями, исследование годографа функции ω приводит к установлению группы теорем о характере изменения при постоянном скручивающем моменте M суммарного угла поворота H, функции φ и вектора напряжений

$$v=\tau_{rj}+i\tau_{zj}=\mu r\nabla\varphi=-\frac{i}{r^2}\nabla\psi$$

при: а) уменьшении одной из граничных потенциальных линий (т. е. линий $\varphi=\mathrm{const}$); б) вдавливания граничной потенциальной линии; в) вдавливании граничной линии тока (т. е. линии $\psi=\mathrm{const}$). Для этой же области при указанном варьировании границ даются теоремы об изменении величины M, φ и v при постоянном значении H.

Аналогичного рода теоремы устанавливаются для областей, ограниченных двумя линиями тока и одной потенциальной линией, областей, ограниченных двумя линиями тока, а также для областей, содержащих в составе своей границы линии переменного потенциала.

Доказанные теоремы применены автором для математического обоснования принципа Сен-Венана при кручении цилиндрического вала с свободной от внешних усилий боковой поверхностью и для установления оценки снизу и сверху величин максимальных касательных напряжений в кольцевых выточках на боковой поверхности цилиндрических валов гиперболической и круговой формы. Для первой задачи дана величина уклонения напряжений в закрепленном сечении от линейного закона, соответствующего решению Кулона, для второй — нижние и верхние оценки величин максимальных напряжений, имеющие довольно тесные пределы при небольшой глубине выточки или при малой ее ширине.

К. В. Соляник-Красса

См. также: 8387, 8535, 8677, 8701, 8702, 8731, 8740, 8922, 8932.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

8600. Об одной теореме интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Хохлов М. А., Сб. научно-исслед. работ. Ташкентск. текстильн. ин-та, 1956, вып. 3., 140—143

Доказана следующая теорема: Если известен интеграл $\varphi(x_1, \ldots, x_n, t) = \text{const}$ системы

$$dx_i/dt = X_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

где X_i — функция от $x_1, \ldots x_n, t$ и интеграл $f(x_1, \ldots, x_h, P_1, \ldots, P_n, t) = \text{const}$, соответствующей системы Лиувиля

$$dx_i/dt = \partial\Phi/\partial P_i, \qquad dP_i/dt = -\partial\Phi/\partial x_i$$
$$(i = \overline{1, h}), \quad \Phi = \sum_{i=1}^{h} X_i P_i,$$

то соотношение $f(x_1, \ldots, x_h\, \partial\varphi/\partial x_1, \ldots, \partial\varphi/\partial x_n) = \text{const}$, дает, вообще говоря, новый интеграл системы.

Теорема применяется к неголономным системам С. А. Чаплыгина. Показано, что, если найден один интеграл такой системы, то другие интегралы (число которых равно числу неголономных связей) могут быть получены в виде частных производных от первого, взятых по независимым скоростям. Г. Л. Мизернюк

8601. О единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения $d^n x/dt^n = f(t, x)$. Винтнер (On the local uniqueness of the initial value problem of the differential equation $d^n x/dt^n = f(t, x)$. Wintner Aurel), Boll. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 4, 496—498 (англ.)

Пусть $f(t, x)$ непрерывна в области, состоящей из прямоугольника $0 < t \leqslant a$, $|x| \leqslant b$ и точки (0, 0), и удовлетворяет условию

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant n! t^{-n} |x_1 - x_2|.$$

Тогда при любых начальных условиях $x(0) = 0$, $d^k x(0)/dt^k = c_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ уравнение

$$d^n x/dt^n = f(t; x)$$

имеет не более одного решения на достаточно малом отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

Теорема справедлива и в том случае, когда x, f и c_k — векторы. А. Ф. Филиппов

8602. О методе решения одного класса дифференциальных уравнений. Волков И. Ф., Уч. зап. Кишиневск. пед. ин-та, 1956, **5**, 131—137

В работе найдена в явной форме фундаментальная система решений уравнения

$$y^{(n)} + x^{-2n} y = 0.$$

Это уравнение при помощи подстановки $y = u/z^{n-1}$ $x = 1/z$ приводится к уравнению $u^{(n)} + (-1)^n u = 0$. Все решения, составляющие фундаментальную систему, не имеют нулей на интервале $(1, \infty)$. С. А. Гальперн

8603. Дифференциальное уравнение третьего порядка. Уц (A third order differential equation. Utz W. R.), Monatsh. Math., 1956, **60**, № 4, 329—332 (англ.)

Доказывается, что если функции $f(x)$ и $p(x)$ непрерывны и таковы, что $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$, $0 < c < \infty$, $f'(x)$ ограничена при $x \to +\infty$, $p(a) = 0$, $p'(a) > 0$ в некоторой точке $a > 0$ и $y(x)$ решение уравнения $f(x)\, y''' - yy'' + p(y') = 0$ такое, что $\lim_{x\to\infty} y'(x) = a$, то $y = ax + b$, где b постоянная.

Доказательство основывается на сведении рассматриваемого уравнения к линейному дифференциальному уравнению второго порядка. В. А. Кондратьев

8604. О методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вблизи вырожденных неподвижных точек. Мацуда (一階常微分方程式の不動特異点の近傍における解の行動について. 松田千鶴子), **數學,** Сугаку, 1957, **8**, № 3, 139—148 (японск.)

8605. Способ получения сингулярного решения дифференциального уравнения Клеро. Альварадо, Акоста-Льерас (Procedimiento para obtener la integral singular en las ecuaciones diferenciales de Clairaut. Alvarado Ricardo Alonso, Acosta Lieras Jorge), Ingeniería y arquit., 1956, **11**, № 132, 34, 36 (исп.)

8606. Определение положительного минимального интеграла уравнения Фукухара. Сансоне, Конти (Determinazione dell'integrale positivo minimo nell' equazione di M. Hukuhara. Sansone G., Conti R.), Rev. Union mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, **17**, 213—216 (итал.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$xy' = Ay^k + B(x), \qquad (1)$$

где $A > 0$, $k > 1$; $B(x)$ — непрерывная положительная функция на сегменте, $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $x_0 > 0$; $B(0) = 0$. Авторы ставят задачу: найти наименьший интеграл уравнения (1), удовлетворяющий условиям

$$y(x) > 0, \text{ при } 0 < x < x_0; \quad \lim_{x\to+0} y(x) = 0. \qquad (2)$$

Как показал японский математик Фукухара [Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 1939, **21**, (3), 183—190], для существования интегралов уравнения (1), удовлетворяющих условиям (2), необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\eta(x)$, непрерывная вместе со своей производной, для которой имеет место неравенство:

$$\frac{A}{x}\left[\int_0^x \frac{B(u)}{u\eta(u)}\, du\right]^{k-1} \leqslant \frac{\eta'(x)}{\eta^k(x)}. \qquad (3)$$

Предполагая, что условие (3) имеет место, авторы строят последовательность

$$y_0(x) = \int_0^x \frac{B(u)}{u}\, du;$$

$$y_{n+1}(x) = A\int_0^x \frac{y_n^k(u)}{u}\, du + \int_0^x \frac{B(u)}{u}\, du$$

и доказывают существование $y_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$. Доказывается, что эта последовательность дает минимальный положительный интеграл уравнения (1).

Примечание референта: Заметим, что в результате подстановки $y = u(\ln x)^{1/(1-k)}$, уравнение (1) приводится к виду:

$$\frac{du}{dx} = \frac{-\frac{1}{k-1}u + Au^k + B(x)(\ln x)^{k/(k-1)}}{x \ln x} \qquad (4)$$

Как показал Бендиксон, для уравнения (4) существует единственная характеристика, входящая в начало справа. Уравнение этой характеристики (которое легко может быть получено с помощью метода последовательных

приближений Бендиксона) представляет собой минимальный положительный интеграл, который авторы находят другим методом. И. С. Куклес

8607. О дифференциальном уравнении

$$y''+\left(\frac{a_0+a_1\cos 2x}{b_0+b_1\cos 2x}-\frac{m(m-1)}{\sin^2 x}-\frac{n(n-1)}{\cos^2 x}\right)y=0.$$

Салинас-Палеро (Sobre la ecuacion diferencial

$$y''+\left(\frac{a_0+a_1\cos 2x}{b_0+b_1\cos 2x}-\frac{m(m-1)}{\sin^2 x}-\frac{n(n-1)}{\cos^2 x}\right)y=0.$$

Salinas Palero Baltasar R.), Rev. mat. hisp.-amer. 1955, **15**, № 1—2, 31—47; № 3—4, 121—135; № 5—6, 182—208; 1956, **16**, № 1—2, 49—71; № 3—4, 122—150; № 5—6, 229—263 (исп.)

Рассматривая уравнение

$$y''+\left(A(x)-\frac{m(m-1)}{\sin^2 x}-\frac{n(n-1)}{\cos^2 x}\right)y=0, \qquad (1)$$

где функция $A(x)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Im} x|<\eta$ и имеет период π, автор называет главным решением типа $[m, n]$ решение вида $y=\sin^m x\cos^n x\,\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ голоморфна при $|\operatorname{Im} x|<\eta$ и периодична с периодом π, а также имеет точки симметрии при $x=0,\ \pi/2$. Если $m-1/2$ и $n-1/2$ не целые, то существуют линейно независимые решения y_1 и y_2, разлагающиеся в окрестности $x=\pi/2$ в ряды

$$y_1=\cos^n x\,(1+p_1\cos^2 x+\ldots),$$
$$y_2=\cos^{1-n} x\,(1+p_2\cos^2 x+\ldots)$$

и решения y_3, y_4, разлагающиеся в окрестности $x=0$ в ряды

$$y_3=\sin^m x\,(1+p_3\sin^2 x+\ldots),$$
$$y_4=\sin^{1-m} x\,(1+p_4\sin^2 x+\ldots),$$

причем

$$y_3=a_{31}y_1+a_{32}y_2;\quad y_4=a_{41}y_1+a_{42}y_2.$$

Если $a_{32}=0$, то y_1 — главное решение типа $[m, n]$;
если $a_{31}=0$, то y_2 — главное решение типа $[m, 1-n]$;
если $a_{42}=0$, то y_1 — главное решение типа $[1-m, n]$
и если $a_{41}=0$, то y_2 — главное решение типа $[1-m, 1-n]$.

Если $a_{32}=0$ и $a_{41}=0$, то y_1 — главное решение, типа $[m, n]$, а y_2 — главное решение типа $[1-m, 1-n]$.

Отдельно рассматриваются случаи

$$A(x)=(2k+m+n)^2+4ph+2h\cos 2x, \qquad (2)$$

где k целое положительное число, и

$$A(x)=\frac{a_0+a_1\cos 2x}{b_0+b_1\cos 2x}.$$

Отбросив требование периодичности функции $z=\varphi(x)$, полагаем

$$z=\sum_{r=-\infty}^{+\infty} C_{\mu+r}P^{(m-1/2,\ n-1/2)}_{\mu+r}(t),$$

где μ — не целое, а P_μ — решение уравнения $O_\mu(P)=0$, разложимое в окрестности $t=\infty$ в ряд

$$P=t^\mu\sum_{r=0}^{\infty}p_{\mu r}t^{-r},$$

где $p_{\mu 0}\neq 0$. Для $C_{\mu+r}$ получается бесконечная система трехчленных рекуррентных уравнений

$$\alpha_{\mu+r}C_{\mu+r-1}+\beta_{\mu+r}C_{\mu+r}+\gamma_{\mu+r}C_{\mu+r+1}=0,$$
$$(r=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

причем

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{\alpha_\mu}{\mu^2}=\lim_{\mu\to\infty}\frac{\gamma_\mu}{\mu^2}=-2b_1;\quad \lim_{\mu\to\infty}\frac{\beta_\mu}{\mu^2}=-4b_0.$$

Изучается разрешимость этой бесконечной системы.

Далее автор исследует различные частные случаи, когда уравнение (1) имеет два линейно независимых главных решения. Если эти решения типа $[m, n]$, то

$$m=-N_1-\frac{1}{2},\ n=-N_2-\frac{1}{2},\ N_1,\ N_2=0, 1, 2, \ldots$$

Если одно решение типа $[m, n]$, а другое типа $[m, 1-n]$, то $m=-N-\frac{1}{2}$, $N=0, 1, 2, \ldots$

Кроме этого необходимого условия, автор рассматривает различные дополнительные условия, достаточные для существования двух главных решений: одного — типа $[m, n]$ и другого — типа $[m, 1-n]$.

В случае $A(x)=a-\frac{q^2}{2}\cos 2x$ при условии $m+n\neq -1, -2, \ldots$ вычисляются коэффициенты $\chi^{(m, n)}(q)$ и $C_r^{(m, n)}(q)$, с помощью которых в области $|\cos x|<1$ решения y_1 и y_2 уравнения (1) выражаются через бесселевы функции от $q\cos x$.

Далее рассматривается уравнение

$$y''+[Ax+\lambda B(x)]\,y=0,$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — периодические функции периода π. Требуется найти периодические решения с периодом $k\pi$. Доказывается эквивалентность этой задачи интегральному уравнению

$$y(u)=l\int_{-k\pi/2}^{k\pi/2}K(u, v)\,B(v)\,y(v)\,dv,$$

если $K(v, u)=K(u, v)=K(u+k\pi, v)$,

$$\frac{1}{B(u)}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial u^2}+A(u)\,K\right)=\frac{1}{B(v)}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial v^2}+A(v)\,K\right).$$

В случае $B(x)=1$ полагаем

$$K=[\varphi'(u)]^m[\varphi'(v)]^m f(\varphi(u)\,\varphi(v)).$$

Задача сводится к нахождению такой функции φ, чтобы дробь

$$\frac{\varphi''(u)\,\varphi(v)-\varphi''(v)\,\varphi(u)}{\varphi'^2(u)\,\varphi^2(v)-\varphi'^2(v)\,\varphi^2(u)}$$

была функцией от $\varphi(u)\,\varphi(v)$. Этому условию удовлетворяет эллиптическая функция

$$\varphi=\operatorname{sn}(x+c, \bar{k}),\ \text{причем}$$

$$A(x)=4h\varphi^2(x)-m(m-1)\left[\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}\right]^2-\frac{n(n-1)}{\varphi^2(x)}+C,$$

а $f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(\bar{k}^2x^2-1)f''+2(2m+1)\bar{k}^2xf'+$$
$$+\left(4h+6m\bar{k}^2+\frac{n(n-1)}{x^2}\right)f=0.$$

Ю. Л. Рабинович

8603. О линейных дифференциальных уравнениях, имеющих частные интегралы заданного вида и связанные заданными условиями. Карасев И. М., Уч. зап. Кабардино-Балкарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 12, 39—41

8609. Ограниченные матрицы и линейные дифференциальные уравнения. Винтнер (Bounded matrices and linear differential equations. Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1953, **79**, № 1, 139—151 (англ.)

В комплексном гильбертовом пространстве, состоящем из векторов $x=\{x_1, x_2, \ldots\}$, рассматриваются линейные операторы $A, B, C, \ldots$, задаваемые матрицами.

Матрица A называется ограниченной, если $|A| = \sup |Ax|/|x| < \infty$. Вводится также число

$$[A] = \mu - \lambda,$$

где μ и λ — наибольшее и наименьшее собственные значения оператора $B = (1/2)(A + A^*)$.

Далее, для дифференциального уравнения

$$x' = A(t)\,x \qquad (1)$$

с матрицей $A(t)$, ограниченной и непрерывной при каждом отдельном значении t, $0 \leqslant t < \infty$, устанавливаются следующие оценки нормы решения $x(t)$ и нормы фундаментальной матрицы $X(t)$ (естественным образом определенной):

$$|x(0)| \exp \int_0^t \lambda(s)\,ds \leqslant |x(t)| \leqslant |x(0)| \exp \int_0^t \mu(s)\,ds,$$

$$|X(t)| \leqslant |X(0)| \exp \int_0^t \mu\,ds,$$

$$|X^{-1}(t)| \leqslant |X^{-1}(0)| \exp \int_0^t \lambda\,ds.$$

Эти оценки, а также выведенные из них простые теоремы, хорошо известны для конечномерного пространства.

Основной результат:

если $A(t) = C + F(t)$, где $C = \text{const}$ и

$$\int_0^\infty e^{|C|t}\,|F(t)|\,dt < \infty,$$

то (1) обладает фундаментальной матрицей вида

$$X(t) = e^{Ct}\{I + Z(t)\},$$

где I — единичная матрица, а $\lim\limits_{t\to\infty} |Z(t)| = 0$.

Остальная часть статьи носит характер исторической справки, имеющей целью установить приоритет автора в некоторых вопросах определения понятия спектра линейного оператора. Цитируемая по этому поводу работа относится к 1929 г. Р. Э. Виноград

8610. О системе интегральных неравенств. Опяль (Sur un système d'inégalités intégrales. Opial Z.), Ann. polon. math., 1957, **3**, № 2, 200—209 (франц.)

Рассматриваются условия разрешимости „задачи Чаплыгина“ для системы дифференциальных уравнений

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (1)$$

Теорема 1. Пусть $f_i(x, y_1, \ldots y_n)$ — неубывающая по совокупности переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функция. Если непрерывные функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \ldots, \varphi_n(x)$ удовлетворяют интегральным неравенствам

$$\varphi_i(x) \leqslant \eta_i + \int_\xi^x f_i(x, \varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x))\,dx \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (2)$$

то

$$\varphi_i(x) \leqslant \psi_i(x) \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (3)$$

где $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ — верхний правый интеграл (1), проходящий через точку $(\xi, \eta_1, \ldots \eta_n)$.

Существенность условия возрастания $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ вытекает из теоремы 2: Если для каждой точки $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ и каждой системы непрерывных функций $\varphi_i(x)$, удовлетворяющих (2), выполняется (3), то $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ возрастают по каждому из переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Теорема 1 обобщает результат Висванатхама (Viswanatham B., Proc. Indian Acad. Sci, **A**, 1952, № 5, 335—341).

Автор не цитирует работ советских математиков, посвященных задаче Чаплыгина (см., например, Гельфанд А. В., Изв. АН СССР, сер. матем., 1938, № 5-6, 583—594, Бабкин Б. Н., РЖМат, 1954, 3075).

Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк

8611. Замечание о системе интегральных неравенств. Важевский (Remarque sur un système d'inégalités intégrales. Wazewski T.), Ann. polon. math., 1957, **3**, № 2, 210—212 (франц.)

В работе дается изящное доказательство результата Опяля (реф. 8610). Доказательство основано на сведении интегральных неравенств к дифференциальным.

Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк

8612. Об одном преобразовании уравнений движения материальных систем. Ценов (Sur une transformation des équations du mouvement des systèmes matériels. Tzénoff Iv.), Докл. Болгар. АН, 1956, **9**, № 3, 5—8 (франц.; рез. русск.)

Сначала приводятся выведенные автором в предыдущих его работах уравнения движения, имеющие одинаковую структуру, как для голономных механических систем, так и для неголономных. Данные уравнения выражаются через вторую производную по времени от кинетической энергии системы. Существо дальнейшего содержания работы состоит в том, что делается переход от голономных лагранжевых координат q_i к новым, неголономным (терминология референта) координатам μ_i и показывается, что уравнения движения сохраняют свою форму.

Примечание референта: Инвариантность уравнений при переходе к неголономным координатам была впервые показана референтом для уравнений Аппелля (Уч. зап. МГУ, 1948, **2**, вып. 122, 146).

В. В. Добронравов

8613. О существовании бесконечного множества вещественных собственных значений для некоторого класса дифференциальных уравнений типа Штурма при некоторых несамосопряженных дополнительных условиях. Томас (Über die Existenz unendlich vieler reeller Eigenwerte bei einer gewissen Klasse Sturmscher Differentialgleichungen nebst gewissen nicht selbstadjungierten Nebenbedingungen. Thomas Johannes), Math. Nachr., 1955 (1956), **14**, № 4-6, 235—239 (нем.)

Устанавливается существование бесконечного множества вещественных собственных значений для уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda g(x) + h(x))\,y = 0 \quad (-a \leqslant x \leqslant a) \qquad (1)$$

при дополнительных условиях одного из следующих типов:

А) $y(-a, \lambda) = 0, \quad \int_{-a}^{a} A(x)\,y(x, \lambda)\,dx = 0;$

А′) $y(a, \lambda) = 0, \quad \int_{-a}^{a} A(x)\,y(x, \lambda)\,dx = 0;$

Б) $y(-a, \lambda) = 0, \; A(0)\,y(0, \lambda) + \sum_{\nu=1}^{n} (A(x_\nu)\,y(x_\nu)\,\lambda) + A(-x_\nu)\,y(-x_\nu, \lambda)) = 0;$

Б′) $y(a, \lambda) = 0, \; A(0)\,y(0, \lambda) + \sum_{\nu=1}^{n} (A(x_\nu)\,y(x_\nu, \lambda) + A(-x_\nu)\,y(-x_\nu, \lambda)) = 0.$

Вещественные функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ подчинены следующим ограничениям: $f(x)$, $h(x)$ — четные функции, $g(x)$ — нечетная функция; $A(x)$ — либо четная, либо нечетная функция. Доказательство основано на классической теореме Штурма, с помощью которой непосредственно устанавливается, что в силу принятых предположений число нулей решения, удовлетворяющего интегральному или разностному условию ортогональности к функции $A(x)$, неограниченно возрастает при $\lambda \to \pm\infty$. Ввиду непрерывной зависимости нулей этого решения от λ каждый новый нуль может появиться только на одном из концов интервала $(-a, a)$. С помощью условий четности легко показывается, что любому собственному значению λ, принадлежащему условиям А) или Б) отвечает собственное значение $-\lambda$, принадлежащее условиям А′) или Б′). Л. А. Чудов

8614. Об оценке собственных значений самосопряженной краевой задачи. Рапопорт (Про оцінку власних значень самоспряженої краєвої задачі. Рапопорт І. М.), Наук. зап. Київськ. держ. пед. ін-т, 1956, **19**, 3—14 (укр.)

Рассматривается самосопряженное дифференциальное уравнение

$$D_{2n}y(x) = \lambda\rho(x)\,y(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

с краевыми условиями

$$D_{k-1}y(0)\sin\alpha_k + D_{2n-k}y(0)\cos\alpha_k = 0 \quad \left(\begin{matrix}0 \leqslant \alpha_k,\ \beta_k \leqslant \pi \\ k = 1, 2, \ldots, n\end{matrix}\right)$$
$$D_{k-1}y(l)\sin\beta_k + D_{2n-k}y(l)\cos\beta_k = 0$$

Здесь $D_0y = y$, $D_1y = y'$, $D_2y = y'', \ldots, D_{n-1}y = y^{(n-1)}$; $D_ny = q_n(x)\,y^{(n)}$, $D_{n+1}y = q_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} - (D_ny)'$,

$$D_{n+2}y = q_{n-2}(x)\,y^{(n-2)} - (D_{n+1}y)', \ldots,$$
$$D_{2n}y = q_0(x)\,y - (D_{2n-1}y)'.$$

Предполагается, что $q_n(x) > 0$ и $\rho(x) > 0$.

Пусть $\varphi(x)$ — допустимая функция, удовлетворяющая краевым условиям. Обозначим

$$\tilde{\lambda} = \int_0^l \varphi D_{2n}\varphi\,dx \Big/ \int_0^l \varphi^2\rho\,dx,$$

$$\varepsilon^2 = \int_0^l (-\rho^{-1}D_{2n}\varphi + \tilde{\lambda}\varphi)^2\rho\,dx \Big/ \int_0^l \varphi^2\rho\,dx.$$

По теореме о включении Крылова-Боголюбова отрезок $[\tilde{\lambda} - \varepsilon, \tilde{\lambda} + \varepsilon]$ содержит хотя бы одно собственное значение задачи. Если найдены m допустимых функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ таких, что $\tilde{\lambda}_{k-1} + \varepsilon_{k-1} < \tilde{\lambda}_k - \varepsilon_k$ $(k = 2, 3, \ldots, m)$, причем $\tilde{\lambda}_m + \varepsilon_m < \underline{\lambda}_{m+1}$ ($\underline{\lambda}_{m+1}$ — каким-либо образом найденная оценка снизу для λ_{m+1}), то очевидно $\tilde{\lambda}_k - \varepsilon_k \leqslant \lambda_k \leqslant \tilde{\lambda}_k + \varepsilon_k$.

Автор устанавливает более точные неравенства

$$\tilde{\lambda}_k - \varepsilon_k^2/(\tilde{\lambda}_{k+1} - \tilde{\lambda}_k - \varepsilon_{k+1}) \leqslant \lambda_k \leqslant \tilde{\lambda}_k + \varepsilon_k^2/(\tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_{k-1} - \varepsilon_{k-1}),$$

где при $k = 1$ верхнюю границу надо заменить на $\tilde{\lambda}_1$, а при $k = m$ нижней границей будет выражение

$$\tilde{\lambda}_m - \varepsilon_m^2/(\underline{\lambda}_{m+1} - \tilde{\lambda}_m).$$

И. М. Соболь

8615. О разложении по собственным функциям одной краевой задачи второго порядка на полуоси. Штраус А. В., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, **20**, № 6, 783—792

Рассматривается краевая задача:

$$-(py')' + qy = \lambda y;$$
$$y(0) = \vartheta(\lambda)\,p(x)\,y'(x)\big|_{x=0},$$

где $\vartheta(\lambda)$ — произвольная мероморфная функция с неотрицательной мнимой частью в верхней полуплоскости и вещественная на вещественной оси или же бесконечная константа; вещественные функции $p(x)$ и $q(x)$ подчинены обычным условиям (абсолютная интегрируемость $q(x)$ и $1/p(x)$ на любом конечном интервале).

Уточняя результаты двух своих ранее опубликованных работ (РЖМат, 1954, 5661; РЖМат, 1956, 3803), автор получает разложение по собственным функциям указанной краевой задачи; далее устанавливается, что спектральная функция имеет разрывы в точках спектра, которым отвечают собственные функции, имеющие интегрируемый квадрат на $(0, +\infty)$. Л. А. Чудов

8616. О полноте системы собственных и присоединенных функций несамосопряженного дифференциального оператора. Лидский В. Б., Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 2, 172—175

В пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$ рассматривается оператор $Ly = -y'' + [q(x) + r(x)]\,y$, где $q(x)$ — вещественная функция, удовлетворяющая для некоторого $\alpha > 0$ условию

$$\lim_{|x| \to \infty} q(x)/x^\alpha \geqslant c > 0,$$

а $r(x)$ — любая комплексная функция, для которой

$$\lim_{|x| \to \infty} |r(x)|/|q(x)| = 0.$$

При этих условиях оператор имеет вполне непрерывную резольвенту и обладает полной системой собственных и присоединенных функций. Основную роль в доказательстве играет теорема М. В. Келдыша о полноте собственных и присоединенных функций оператора, возникающего при возмущении вполне непрерывным оператором самосопряженного оператора, некоторая степень которого имеет конечную абсолютную норму. Л. А. Чудов

8617. Разложение по собственным функциям системы дифференциальных уравнений второго порядка. Биглов З. И., Докл. АН СССР, 1957, **112**, № 5, 797—799

На систему n дифференциальных уравнений второго порядка

$$l(y) = -y'' + P(x)\,y \quad (0 \leqslant x < +\infty)$$

в случае, когда вещественная симметрическая матрица $P(x)$ n-го порядка суммируема в интервале $(0, \infty)$, перенесены результаты, известные при $n = 1$: равенство Парсеваля и разложение резольвенты соответствующего самосопряженного дифференциального оператора в пространстве вектор-функций, определяемого условиями $y'(0) = \theta y(0)$ с эрмитовой матрицей θ. М. К. Фаге

8618. Некоторые проблемы качественной теории дифференциальных уравнений. Немыцкий (Některé problémy kvalitativní teorie diferenciálních rovnic. Nemyckij V. V.), Casop. pěstov. mat., 1956, **81**, № 4, 451—469 (чешск.)

Перевод с русского. См. РЖМат, 1955, 3193.

8619. О некоторых дифференциальных уравнениях, допускающих понижение порядка. Минц Р. М., Уч. зап. Горьковск. ун-та, 1957, **35**, 246—262

Уравнение второго порядка

$$d^2\eta/d\xi^2 = a\xi^k(1-\xi)^{-2}\eta^\alpha + (b/\xi)(d\eta/d\xi) + (c/\eta)(d\eta/d\xi)^2 \quad (1)$$

некоторой заменой переменных приводится к одной из систем первого порядка вида:

$$dx/dt = x(y-p), \quad dy/dt = x + y + qy^2 \quad (2)$$

или

$$dx/dt = x(y-k), \quad dy/dt = x + qy^2, \quad (3)$$

где k, p, q, как и α, a, b, c являются параметрами. Исследуется поведение интегральных кривых систем (2), (3) в целом, в зависимости от значений параметров. Вся плоскость p, q (или k, q) разбивается на области каждой из которых соответствует качественная картина, выясненная до конца. Показано, в частности, что ни при одном из значений параметров системы (2), (3) не могут иметь предельных циклов. Указывается на наличие ошибок в работе Джонса (РЖМат, 1953, 716), где неправильно утверждается существование предельного цикла у некоторой системы первого порядка. Рассмотрен ряд уравнений, к которым сводятся некоторые физические проблемы и которые представляют собой частные случаи уравнения (1). Г. Л. Мизернюк

8620. Обобщение теоремы Пуанкаре — Бендиксона. Урабэ, Кацума (Generalization of Poincaré — Bendixson theorem. Urabe Minoru, Katsuma Shôichirô), J. Sci Hiroshima Univ., 1954, **A17**, 365—370 (англ.)

Пусть (E) $\dot{x} = X(x, y)$, $\dot{y} = Y(x, y)$, где X и Y — действительные из $C^{(1)}$ функции, определенные в открытой плоской области G, и пусть простые замкнутые кривые C_1 и C_2 (из класса $C^{(2)}$) ограничивают замкнутую кольцевую область $R \subset G$, свободную от критических точек дифференциальной системы. Авторы доказывают теорему Пуанкаре — Бендиксона о существовании предельного цикла для (E) в R в предположении, что в каждой точке границы R векторное поле (E) или направлено внутрь (вне) R или является касательной к граничной кривой R. L. Markus

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 7, 700.

8621. Теория локального анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. III. Цин Юаньсюнь (常微分方程的區域分析理論 III. 秦元勳), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, **6**, № 3, 363—373 (кит.; рез. англ.)

Ч. 1, II см. РЖМат, 1956, 8784; 1957, 1385.

Рассматривается дифференциальное уравнение следующего вида:

$$d^2x/dt^2 + P(dx/dt) + Q(x) = 0,$$

где

$$P(y) = ay\Pi_{i=1}^{n}\left(1 + y^2/y_i^2\right),$$

a — действительное число, $y_i^2 > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и предполагается, что $Q(x)$ имеет один из следующих видов:

$$Q(x) = bx\Pi_{i=1}^{n}\left(1 - x/x_i\right), \quad x_i \neq 0, \quad x_i \neq x_j, \quad (i \neq j);$$

$$Q(x) = bx\Pi_{i=1}^{\infty}(1 - x^2/(n\pi)^2) = b \sin x;$$

$$Q(x) = b \sin x\, \Pi_{i=1}^{n}(1 - \sin x/\sin x_i),$$

$$\sin x_i \neq 0, \quad \sin x_i \neq \sin x_j \quad (i \neq j),$$

где b отличное от нуля действительное число.

Рассматривается далее эквивалентная система

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -P(y) - Q(x).$$

Строится характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -Q'(x) & -P'(y) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + p(x, y)\lambda + q(x, y).$$

Доказывается, что $q(x, y) = Q'(x) = 0$ разделяет фазовую плоскость на области, так что каждая из них содержит одну сингулярность, поведение которой определяет распределение траекторий в этой области и структура траекторий на всей плоскости определяется одновременно рассмотрением всех этих областей.

Резюме автора

8622. Бесконечно удаленные особые точки и вынужденные колебания. Гомори (Critical points at infinity and forced oscillation. Gomory Ralph E.), Ann. Math. Studies, 1956, № 36, 85—126 (англ.)

В работе исследуются траектории „в большом" на проективной плоскости. Автор связывает природу особых точек системы

$$dx/dt = X(x, y); \quad dy/dt = Y(x, y), \tag{1}$$

где $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ — полиномы, с существованием периодических решений системы

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y) + \mathcal{E}_1(t) \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) + \mathcal{E}_2(t) \tag{2}$$

где $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ = периодические функции периода T, непрерывные вместе со своими производными.

Наряду с уравнениями (1) автор вводит уравнения

$$\frac{dz}{d\tau} = -zY^H(x, 1, z); \quad \frac{dx}{d\tau} = X^H(x, 1, z) - xY^H(x, 1, z) \tag{3}$$

$$\frac{dz}{d\sigma} = -zX^H(1, y, z); \quad \frac{dy}{d\sigma} = Y^H(1, y, z) - yX^H(1, y, z), \tag{4}$$

которые он называет преобразованными уравнениями. В этих уравнениях Y^H и X^H — однородные полиномы степени H. Автор рассматривает бесконечно удаленные особые точки систем (3) и (4) и предполагает, что эти точки обладают следующими свойствами:

а) эти точки являются изолированными и простыми;

б) сумма индексов Пуанкаре для этих точек отлична от единицы;

в) если рассматривать последовательность бесконечно удаленных особых точек при монотонном возрастании полярного угла φ, то в этой последовательности точки типа седла не встретятся два раза подряд. Если же имеется только одна бесконечно удаленная особая точка, то она не является седлом. Автор доказывает, что при выполнении этих условий система (2) имеет периодическое решение периода T. Далее автор рассматривает уравнение вынужденных колебаний:

$$y'' + y'f(x) + g(x) = \mathcal{E}(t), \tag{5}$$

где

$$f(x) = \sum_{s=0}^{m} a_s x^s; \quad g(x) = \sum_{s=0}^{n} b_s x^s, \quad \mathcal{E}(t) -$$

непрерывная вместе со своей производной функция, периодическая с периодом T, а $m \geqslant n \geqslant 0$.

Пользуясь известной теоремой Бендиксона об индексах $2[-\text{index}(p) + 1] = c - n_f$, автор доказывает, что, если число n нечетное и мы не имеем одновременно: $b_n > 0$ и m — нечетное, то уравнение (5) имеет периодическое решение периода T. И. С. Куклес

8623. Влияние Анри Пуанкаре на эволюцию современной теории нелинейных колебаний. Минорский (Influence d'Henri Poincaré sur l'évolution moderne de la théorie des oscillations non linéaires. Minorsky N.), Mém. Soc. ingrs civils France, 1954, **107**, № 3, 205—208 (франц.)

8624. Обобщение одной теоремы Аткинсона. Джонс (On the extension of a theorem of Atkinson's. Jones John, Jr), Quart. J. Math., 1956, **7**, № 28, 306—309 (англ.)

Для уравнения

$$y'' + \sum_{i=2}^{n} f_i(x)\, y^i = 0 \tag{*}$$

доказана теорема:

Если для $x \geqslant 0$ на $[a, \infty)$ функции $f_i(x)$, $i = 2, \ldots, n$ неотрицательны и непрерывны, причем одна из них $f_k(x) > 0$, а $f_i'(x)$ абсолютно интегрируемы, тогда

необходимым и достаточным условием колеблемости любого решения уравнения (*) является

$$\int_a^\infty \sum_{i=2}^n x f_i(x)\,dx = \infty.$$

Примечание референта. Теорема верна, если сумма в уравнении (*) содержит только нечетные степени y. С. А. Гальперн

8625. О колебательности решений дифференциального уравнения $u'' = f(u, u', t)$. Петропавловская Р. В., Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 3, 389—391

Рассматривается уравнение $u'' = f(u, u', t)$. Сформулированы следующие теоремы.

1. Если $f(u, u', t)/u < (gv, v', t)/v$ при $a < t < \infty$, $0 < |u| < |v|$ (причем u, v одного знака) $|u'| \leqslant |v'|$, $u(t)$ решение уравнения $u'' = f(u, u', t)$, а $v(t)$ уравнения $v'' = g(v, v', t)$; оба эти решения существуют при $T_1 < t < T_2$, причем $u(t) \neq 0$ на этом промежутке и $u(t_0) = v(t_0)$, $u'(t_0) = v'(t_0)$, тогда справедливо неравенство $|u| < |v|$ при $T_1 < t < T_2$, $t \neq t_0$.

2. Если $\varphi(u, t) > 0$ при $u \neq 0$ возрастает с ростом $|u|$ и выполнено одно из условий: а) для всякого u_0 уравнение $u'' + \varphi(u_0 t)\,u = 0$, $a < t < \infty$ имеет колебательные решения; б) для всякого $u_0 \neq 0$

$$\int_{a+1}^\infty dz \int_z^\infty \varphi(u_0 t)\,dt = \infty$$

и существует такое $c \neq 0$, что уравнение $u'' + \varphi(c, t)\,u = 0$, $a < t < \infty$ имеет колеблющиеся решения, то все решения уравнения $u'' + \varphi(u, t)\,u = 0$ колебательные.

3. Если $\varphi(u, t)$ удовлетворяет условиям 2, а $\psi(u, u', t) > 0$ при $u \neq 0$ и для всякого $r > 0$ $\sup_{\sqrt{u^2+t^2} < r} |\psi(u, u', t)| < \infty$, то все решения уравнения $u'' + u[\varphi(u, t) + \psi(u, u', t)] = 0$ колебательные.

Из этих теорем, в качестве следствия получены достаточные критерии колебательности и неколебательности решений уравнения $u'' = f(u, u', t)$.

В. А. Кондратьев

8626. Об одном достаточном условии неколебательности решений уравнения $y'' + f(x)\,y = 0$. Николенко Л. Д., Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 6, 929—931

Доказано, что если при каком-либо целом неотрицательном p $\int^\infty L_{p+1}\varphi_p(x)\,dx < \infty$, где $L_p(x) = x \ln x \ln\ln x \ldots \ln^{(p)} x$, ($\ln^{(p)}(x)$ здесь определено так: $\ln^{(p)} x = \ln\ln^{(p-1)} x$, $\ln^{(0)} x = \ln x$): а $\varphi_p(x) = f(x) - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^p [L_i(x)]^{-2}$, при

$$f(x) - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^p [L_i(x)]^{-2} \geqslant 0$$

и $\varphi_p(x) = 0$ при $f(x) - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^p [L_i(x)]^{-2} < 0$; тогда все решения уравнения $y'' + f(x)\,y = 0$ неколеблющиеся.

В. А. Кондратьев

8627. О малом параметре в методе гармонической линеаризации. Попов Е. П., Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1955, № 2, 41—59

Рассматриваются системы, движение которых описывается дифференциальным уравнением

$$Q(p) + R(p)\,F(p, px) = 0 \quad (p \equiv d/dt),$$

где $Q(p)$ и $R(p)$ — многочлены любых степеней, подчиненные условию, что после гармонической линеаризации нелинейной функции $F(x, px)$ коэффициенты характеристического уравнения будут все положительны. Коэффициенты A_k и B_k разложения функции $F(x, px)$ при $x = a\sin\omega t$ в ряд Фурье должны стремиться к нулю при $k \to \infty$ и, кроме того, при этом

$$A_k \left|\frac{R(ik\omega)}{Q(ik\omega)}\right| \to 0, \quad B_k \left|\frac{R(ik\omega)}{Q(ik\omega)}\right| \to 0.$$

Ищутся одночастотные периодические решения по методу малого параметра в форме Б. В. Булгакова.

Вводятся новые переменные; нелинейная функция представляется в виде $x_2 = F(x, px) = hx + h_1 x_3 + \varepsilon\varphi_2(x, x_3)$, где ε — малый параметр, а $x_3 = px$.

Показано, что для данного класса нелинейных систем метод малого параметра дает тот же самый результат, что и метод гармонической линеаризации, если при этом ограничиться первым приближением. Методы различаются лишь техникой вычисления. Однако при этом существенную роль играет способ введения параметра.

Следует отметить, что совпадение результатов первого приближения по обоим методам не может рассматриваться как обоснование метода гармонической линеаризации для указанного класса систем. Автор утверждает, что в отношении свойств авторезонанса и фильтра оба метода дают один и тот же результат и что эти свойства могут одновременно существовать в одной и той же системе автоматического регулирования.

Указывается на целесообразность в некоторых случаях определять приближенное синусоидальное движение для выходной величины нелинейного звена.

В заключение излагается метод гармонической линеаризации с учетом конечного числа высших гармоник. Рассматриваются два примера, в которых в качестве высшей учитывается третья гармоника.

А. П. Проскуряков

8628. Одно обобщение асимптотического метода Н. Н. Боголюбова в теории нелинейных колебаний. Попов Е. П., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 2, 308—311

Рассматривается колебательная система с одной степенью свободы, описываемая уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + c^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \qquad (1)$$

где ε — малый параметр; b и c — вещественные постоянные числа; $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ — заданная нелинейная функция.

Показывается, что для этой системы при $b > 0$ также может быть применен асимптотический метод Крылова — Боголюбова.

Согласно асимптотическим методам Крылова — Боголюбова решение уравнения (1) ищется в форме:

$$x = a\cos\psi + \varepsilon\varphi_1(a, \psi) + \varepsilon^2\varphi_2(a, \psi) + \ldots,$$

где a и ψ определяются из системы:

$$\frac{da}{dt} = -ba + \varepsilon\Phi_1(a) + \varepsilon^2\Phi_2(a) + \ldots,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots,$$

причем $\omega = \sqrt{c^2 - b^2}$.

В первом приближении для определения функций $\Phi_1(a)$ и $B_1(a)$ выведены формулы:

$$2\omega\Phi_1(a) = \beta(a) + ba^2\frac{dB_1}{da},$$

$$2\omega B_1(a) - \gamma(a) = b\frac{d\Phi_1}{da},$$

где

$$\beta(a) = -h_1(a) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi - ba\cos\psi)\sin\psi\,d\psi,$$

$$\gamma(a) = -\frac{g_1(a)}{a} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi,\ -a\omega\sin\psi - ba\cos\psi)\cos\psi\,d\psi. \quad (5)$$

В случае, если $\beta(a)$ и $\gamma(a)$ являются медленно меняющимися функциями, то предлагается формальный прием эквивалентной линеаризации, согласно которому вместо уравнения (1) рассматривается следующее:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left[2b - \frac{\varepsilon\beta(a)}{a\omega}\right]\frac{dx}{dt} + \left[c^2 + \varepsilon\gamma(a) - \frac{b\varepsilon\beta(a)}{a\omega}\right]x = 0.$$

Составляя для уравнения (2) характеристическое уравнение

$$p^2 + \left[2b - \frac{\varepsilon\beta(a)}{a\omega}\right]p + c^2 + \varepsilon\gamma(a) - \frac{b\varepsilon\beta(a)}{a\omega} = 0,$$

находим

$$p = -b + \frac{\varepsilon\beta(a)}{2a\omega} \pm i\sqrt{c^2 + \varepsilon\gamma(a) - \frac{b\varepsilon\beta(a)}{a\omega} - \left[b - \frac{\varepsilon\beta(a)}{2a\omega}\right]^2},$$

откуда сразу получаем показатель затухания

$$b(a) = -b + \frac{\varepsilon\beta(a)}{2a\omega}$$

и квадрат частоты

$$\omega_1^2(a) = c^2 - b^2 + \varepsilon\gamma(a).$$

Ю. А. Митропольский

8629. Выражения для затухания и собственных частот линейной системы. Фуллер, Мак-Миллан (Expressions for the damping and natural frequency of linear systems. Fuller A. T., Macmillan R. H.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1956, 9, № 3, 345—359 (англ.)

Используя критерий Рауса — Гурвица, авторы находят приближенные выражения для действительной и мнимой частей корня $\alpha + i\beta$ полинома n-й степени, в случае, когда α мало. Именно

$$\alpha \approx -H_{n-1}/[K_1 + K_2 + \ldots + K_{n-1}],$$

$$\beta^2 \approx M_r/M_{r+1},$$

где H_{n-1} предпоследний определитель Рауса — Гурвица, а K_1, K_2, ..., K_{n-1}, M_r, M_{r+1} определители, получаемые некоторым образом из H_{n-1}.

Ю. И. Неймарк

8630. Решение линейных векторных дифференциальных уравнений, содержащих гироскопические члены. Уэстфолд (The solution of linear vector differential equations containing gyroscopic terms. Westfold K. C.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 3, 174—180 (англ.)

Рассматривается линейное векторное уравнение

$$f(D)\bar{r} + 2\bar{\omega}\times g(D)\bar{r} = \bar{F}(t), \quad (1)$$

где f и g — полиномы с вещественными коэффициентами, $D \equiv d/dt$ $\bar{\omega} = \omega\bar{k}$ — постоянный вектор, имеющий направление единичного вектора $\bar{k}$, $\bar{F}(t)$ — заданная вещественная вектор-функция от t. Вводя единичный тензор U автор записывает однородное уравнение для (1)

$$f(D)\bar{r} + 2\bar{\omega}\times Ug(D)\cdot\bar{r} = 0, \quad (2)$$

разлагает $\bar{r}$ на компоненты по направлениям собственных векторов оператора $2\bar{\omega}\times Ug(D)$ и получает характеристическое уравнение

$$|\,2\bar{\omega}\times Ug - U\lambda\,| = 0.$$

Показывается, что все три вектора взаимно ортогональны.

Если одну из осей декартовой системы координат направить по $\bar{k}$, то собственные векторы принимают простую форму

$$\bar{e}_1 = (1, i, 0)/\sqrt{2},\ \bar{e}_2 = (1, -i, 0)/\sqrt{2},\ \bar{e}_3 = (0, 0, 1) = \bar{k}.$$

Однородное уравнение (2) для $\bar{r} = \tilde{x}_s\bar{e}_s$ становится

$$\{f(D) - 2i\omega g(D)\}\tilde{x}_1\bar{e}_1 + \{f(D) + 2i\omega g(D)\}\tilde{x}_2\bar{e}_2 + f(D)\tilde{x}_3\bar{e}_3 = 0$$

и распадается на три скалярных уравнения.

Показывается, что общее решение уравнения (2) можно выразить в форме

$$\bar{r} = \bar{A}_s x_s + \bar{k}\times A_s y_s + \bar{k}c_s z_s,$$

где

$$\bar{A}_s = A_{1s}\bar{e}_1 + A_{2s}\bar{e}_2,\quad \tilde{x}_{1s} = x_s - iy_s,\quad \tilde{x}_{2s} = x_s + iy_s$$

и z_s — линейно независимые решения однородных уравнений соответственно для $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ и $\tilde{x}_3$; A_{1s}, A_{2s} и C_s — постоянные интегрирования; x_s, y_s и z_s — вещественные.

Затем автор указывает вид частного решения неоднородного уравнения.

В качестве примера рассматриваются незатухающие колебания маятника Фуко и упругие колебания электрона в однородном магнитном поле. В этом случае $f(D) \equiv D^2 + n^2$, $g(D) \equiv D$.

А. К. Никитин

8631. Асимптотическое решение дифференциальных уравнений в области, содержащей регулярную особую точку. Казаринов, Мак-Келви (Asymptotic solution of differential equations in a domain containing a regular singular point. Kazarinoff N. D., McKelvey R.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 1, 97—104 (англ.)

Указываются рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов асимптотического (относительно больших по модулю комплексных λ) разложения решения (определенного в окрестности $z = 0$ комплексной плоскости) уравнения

$$z^2\,d^2u/dz^2 - \lambda^2 P(z, \lambda)\,u = 0,$$

где функция $P(z, \lambda)$ аналитична и однозначна при $\lambda = \infty$ и $z \in D$ (D — ограниченная, замкнутая односвязная область; $D \ni 0$).

В качестве приложения полученных результатов выводится асимптотическое выражение для функции Уиттекера $M_{k,\,m}(z)$ при $\mathrm{Re}\,m \geqslant 0$, $k = 2am + b$; m — численно достаточно большом, a и b ограниченных:

$$M_{k,\,m}(z) =$$

$$= z^{1/2+m}e^{-az}\left[1 + \frac{z}{2m}\left(\frac{z}{8} - b + a - \frac{a^2z}{2}\right) + \frac{B(z, m)}{m^2}\right],$$

где $B(z, m)$ — аналитическая функция при $z \in D$, $m = \infty$. Библ. 6 назв.

Ю. С. Богданов

8632. Асимптотические свойства решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка. Раб (Asymptotické vlastnosti integrálů di-

ferenciální lineární rovnice 3. Řádu. Ráb Miloš), Spisy vyd. přírodověd. fak. Masarykovy univ., 1956, № 9, 441—454 (чешск.; рез. русск., нем.)

Рассматривается уравнение

$$y''' - a(x)\,y' - [2^{-1}a^1(x) + \omega(x)]\,y = 0.$$

Доказано, что а) если $\lim_{x\to\infty} a(x) = \text{const} > 0$,

$$\int^{\infty} |da(x)| < \infty, \quad \int^{\infty} |\omega(x)|\,dx < \infty,$$

то существует фундаментальная система рассматриваемого уравнения такая, что

$$y_1 \sim e^{-\int^{x} \sqrt{a(t)}\,dt}, \quad y_2 \sim 1, \quad y_3 \sim e^{\int^{x} \sqrt{a(t)}\,dt};$$

б) если $a(x) > 0$, $\int^{\infty} \sqrt{a(x)}\,dx = \infty$ и

$$\int^{\infty} \left|\frac{a'(t)}{a(t)}\right| (\sqrt{a(t)})^{\gamma-1}\,dt < \infty,$$

где γ — некоторое число из отрезка $[1, 2]$, $\int^{\infty} \left|\frac{\omega(t)}{a(t)}\right| dt < \infty$, то уравнение имеет такую фундаментальную систему решений:

$$y_1 \sim e^{-\int^{x} \sqrt{a(t)}\,dt} \Big/ \sqrt{a(x)}; \quad y_2 \sim 1/\sqrt{a(x)},$$

$$y_3 \sim [a(x)]^{-1/2}\, e^{\int^{x} \sqrt{a(t)}\,dt}$$

В. А. Кондратьев

8633. Асимптотические свойства решений линейных уравнений третьего порядка. Раб (Asymptotische Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichung dritter Ordnung. Ráb Miloš), Spisy vyd. přírodověd. fad. Masarykovy univ., 1956, **A13**, **B8**, № 4, 177—184 (нем.; рез. русск.)

Рассматривается уравнение

$$z''' + 4A(x)\,z' + [2A'(x) + \omega(x)]\,z = 0, \qquad (1)$$

к которому приводится всякое линейное однороднсе уравнение третьего порядка с достаточно гладкими коэффициентами. Предполагая, что $\int_a^{\infty} |\omega(x)|\,dx$ сходится, автор доказывает следующие теоремы: а) Если решения уравнения

$$y'' + A(x)\,y = 0 \qquad (2)$$

ограничены, то и решения уравнения (1) ограничены б) Если решения уравнения (2) стремятся к нулю, то и решения (1) также стремятся к нулю

В предположении, что

а) $A(x) > 0$,

б) $\lim_{x\to\infty} A(x) = \infty$,

в) функция $A^{-1/4}(x)$ выпукла,

г) $\int_a^{\infty} \left|\frac{\omega(t)}{A(t)}\right| dt$ сходится, доказывается, что для всякого решения уравнения (1) имеет место асимптотическая формула $y = O\left(\frac{1}{\sqrt{A(x)}}\right)$, при этом производная решения остается ограниченной. С. А. Гальперн

8634. К исследованию устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, которые мало отличаются от периодических. Семылит (До питання про стійкість розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, що мало відрізняються від періодичних. Семиліт М. Й.), Наук. зап. Кам'янець-Подільськ. держ. пед. ін-т, 1956, 2, 7—12 (укр.)

В системах

$$dx/dt = A(t)\,x \qquad (1)$$

и

$$dy/dt = P(t)\,y \qquad (2)$$

элементы матрицы $A(t)$ непрерывные, и матрицы $P(t)$ — непрерывные периодические функции.

Теорема Ляпунова о приводимости утверждает существование неособой непрерывно-дифференцируемой периодической матрицы $U(t)$, такой, что замена $y = U(t)\,z$ приводит систему (2) к системе $dz/dt = Cz$ с постоянными коэффициентами.

Автор показывает, что при условии $\|A(t) - P(t)\| \to 0$ $t \to \infty$ замена $x = U(t)\,z$ приводит систему (1) к системе

$$dz/dt = B(t)\,z, \quad \text{где} \quad \|B(t) - C\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Теорема 1. Если общее решение системы (2) ограничено при $t \to \infty$ и $\int_0^{\infty} \|A(t) - P(t)\|\,dt < \infty$, то любое решение системы (1) приближается к решению системы (2), $\|x - y\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема 2. Если $\|A(t) - P(t)\| \to 0$, $t \to \infty$ и среди решений системы (2) имеются неограниченные при $t \to \infty$, то среди решений системы (1) также имеются неограниченные при $t \to \infty$.

Автор указывает, что его результаты содержатся в работе И. М. Рапопорта РЖМат, 1957, 5569К, с рукописью которой автор познакомился после завершения настоящей работы.

Примечание референта. Доказательство автора теоремы 1 ошибочно. Оно проходит лишь, если среди решений системы (2) нет решений $y \to 0$ при $t \to \infty$. Сама же теорема верна и получается последовательным применением упомянутой теоремы Ляпунова и теоремы Левинсона — Г. Вейля (Amer. J. Math. 1946, 68, 7—12), как было отмечено референтом в (Матем. сб., 1951, 28 (70), № 1, 217—240).

Теорема 2, относительно которой в работе сказано, что ее доказательство не представляет трудностей, неверна, что можно легко обнаружить на примере уравнения Эйлера $y'' + \frac{a}{t}\,y' + \frac{b}{t^2}\,y = 0$. По-видимому, автор имел в виду случай, когда некоторые из решений системы (2) имеют отрицательные характеристические числа Ляпунова. С этим дополнением теорема верна и является следствием общей теоремы Ляпунова о неустойчивости. В. А. Якубович

8635. Дополнение к статье „Обобщение одной теоремы Ляпунова". Рябов Ю. А., Уч. зап. МГУ, 1956, вып. 181, 241

Устанавливается справедливость одного из двух замечаний, сделанных Н. П. Еругиным в реферате на работу автора (РЖМат, 1955, 1201).

В конце заметки автор еще раз необоснованно утверждает, что им доказана обобщенная теорема А. М. Ляпунова в самом общем случае. Если выделенные характеристические числа матрицы коэффициентов линейной системы $\mu_i, -\mu_i$ кратные и каждому из этих кратных характеристических чисел отвечает лишь один элементарный делитель, то метод автора не применим, что и было отмечено в другом замечании Н. П. Еругина. В. П. Басов

8636. Переходная функция ступенчатых процессов. Ч. 1. Акривос (The transient response of stagewise processes. Part I. Acrivos Andreas), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1956, 4, № 1, 1—19 (англ.)

Рассматриваемые автором химические реакции описываются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dT(n)}{dt} = \sum_{k=0}^{N} a_k(n)[T(k)-T(n)] + \sum_{j=1}^{l} b_j R_j + h(n)$$

$$(1 \leqslant n \leqslant N)$$

$$\frac{dc_i(n)}{dt} = \sum_{k=0}^{N} a_k(n)[c_i(k)-c_i(n)] + \sum_{j=1}^{l} \nu_{ij} R_j$$

$$(1 \leqslant i \leqslant m, \quad i \leqslant n \leqslant N),$$

где $T(n)$ температура смеси в n-ом реакторе, $c_i(n)$ — концентрация i-го реагирующего вещества в n-ом реакторе. Температура $T(0)$ и концентрации $c_i(0)$ реагирующих веществ, подающихся в реактор, являются заданными функциями времени. Остальные параметры, входящие в систему (1), заданы и от времени не зависят.

Предполагая, что $T(0)$ и $c_i(0)$ постоянные, автор исследует по линейному приближению устойчивость стационарных решений системы (1).

Наряду с этим, также в линейном приближении, рассматриваются переходные явления, когда величины $T(0)$ и $c_i(0)$ имеют вид

$$T(0) = T^{(0)}(0) + \delta T(0)$$

$$c_i(0) = c_i^{(0)}(0) + \delta c_i(0),$$

где $T^{(0)}(0)$ и $c_i^{(0)}(0)$ — постоянные, $\delta T(0)$ и $\delta c_i(0)$ — малые возмущения, зависящие от времени.

Д. П. Костомаров

8637. Переходная функция ступенчатых процессов. Ч. II. Акривос (The transient response of stagewise processes. Part II. Acrivos Andreas), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1956, **4**, № 2, 120—130 (англ.)

Часть I см. реф. 8636

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и частично запаздывающим аргументом, причем запаздывания аргумента фиксированы. Система уравнений решается методом преобразования Лапласа в матричной форме. Исследуется устойчивость решения. Указывается возможность численного осуществления решения, а также и практическое значение задачи: системе уравнений соответствует химический процесс в системе реакторов. Библ. 12 назв. Н. А. Бразма

8638К. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 7-е. Инс (Integration of ordinary differential equations. 7th ed. rev. Ince Edward Lindsay. Edinburgh — London, Oliver and Boyd; New Yerk, Interscience, 1956, VIII, 146 pp., 7 sh. 6 d. (англ.)

8639Д. Рекурсивные полиномы и полиномы производных двупараметрических решений дифференциальных уравнений второго порядка. Бопп (Rekursions-und Ableitungspolynome für zweiparametrige Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Dargest. an Beisp. d. konfluenten hypergeometr. Funktionen. Bopp Karl. — Disss., Fak. f. Math. und Physik., Techn. Hochsch., Darmstadt, 1955, Olpe i. Westf., 1955, IV. 40 S., Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, **B**, № 5, 350 (нем.)

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

8640. Задача Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Эренпрейс (Cauchy's problem for linear differential equations with constant coefficients. Ehrenpreis Leon), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, **42**, №-9, 642—646 (англ.)

Пусть H — пространство всех целых функций от $t, x_1, \ldots, x_n$, H_0 — подпространство всех целых функций, не зависящих от t, E — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций от $t, x_1, \ldots, x_n$,

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial^m}{\partial t^m} + D_1 \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \ldots +$$

$+ D_m$ — дифференциальный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами (D_j ($j = 1, \ldots, m$) — дифференциальные операторы, не зависящие от t),

Оператор D называется непараболическим, если его порядок равен m.

Задача Коши состоит в определении функции $f(x, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$Df = g(x, t) \tag{1}$$

и условиям

$$\partial^k f/\partial t^k = g_k(x) \qquad (k = 0, \ldots, m-1) \tag{2}$$

Теорема. Если D — непараболический оператор, то задача Коши (1) — (2) — корректно разрешима в H, т. е. для любых функций $g \in H$, $g_j \in H_0$ существует единственное решение в H задачи (1) — (2); это решение непрерывно зависит от g и g_j. Если D — параболический оператор, то можно найти такие функции $g \in H$, $g_j \in H_0$, что задача Коши (1) — (2) не будет иметь решения в H. В любом случае задача Коши (1) — (2) может иметь не более одного решения в H, если $g \in H$ $g_j \in H_0$.

Устанавливается, что для того, чтобы задача Коши, (1) — (2) была корректно разрешима в E, необходимо и достаточно, чтобы оператор D был гиперболическим. Этот результат повторяет известную теорему Гординга (Gårding, Acta, Math., 1951, **85**, 1—62). В. М. Борок

8641. Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывными начальными условиями. Олейник О. А., Тр. Моск. матем. о-ва, 1956, **5**, 433—454

Рассматривается решение задачи Коши для уравнения

$$\partial u/\partial t + \partial \varphi(t, x, u)/\partial x = 0, \qquad \varphi''_{uu} > 0 \tag{1}$$

На отрезке $[a, b]$ задаются начальные значения, которые ограничены и измеримы,

$$u(0, x) = u_0(x) \tag{2}$$

Решение ищется в области G полуплоскости $t \geqslant 0$, ограниченной $[a, b]$ и двумя кривыми, которые являются проекциями характеристик (1), проходящими через a и b, т. е. проекциями решений системы

$$dx/dt = \varphi'_u(t, x, u), \qquad du/dt = -\varphi'_x(t, x, u) \tag{3}$$

с начальными значениями $x = a$, $u = \overline{\lim_{k \to a}} u_0(x)$; $x = b$, $u = \lim_{x \to b} u_0(x)$. Предполагается, что φ дважды непрерывно дифференцируется и что любые 2 точки G можно единственным образом соединить проекцией характеристики (3).

Решением (1), (2) в G называется функция $u(t, x)$, удовлетворяющая условиям:

1) если u непрерывно в точке (t_1, x_1), то характеристика, проходящая через $(t_1, x_1, u(t_1, x_1))$, принадлежит решению при $0 < t \leqslant t_1$;

2) если (t_1, x_1) является точкой разрыва u, то через (t_1, x_1) проходят по крайней мере 2 проекции характеристик (3), все точки которых принадлежат решению при $0 < t < t_1$;

3) для любого контура, образованного проекциями любых 2 характеристик, указанных в 2), и прямой $t = t_0 \geqslant 0$,

$$\int \varphi(t, x, u(t, x))\, dt - u(t, x)dx = 0;$$

4) функция u ограничена в G, измерима по x при фиксированном t; при $[x_1, x_2] \subset [a, b]$

$$\lim_{\delta \to 0} \left| \int_{x_1}^{x_2} (u_0(x) - u(\delta, x))\, dx \right| = 0.$$

Доказывается, что в G существует единственное решение, удовлетворяющее 1)—4). Это решение строится следующим образом.

Пусть $u = U(t, t_1, x_1, \xi)$ есть решение (3), проекция которого на плоскость (t, x) соединяет точки (t_1, x_1) и $(0, \xi)$; $j(t, x, s) = \int_a^s [u_0(\xi) - U(0, t, x, \xi)]\, d\xi$, $(t, x) \in G$.

Пусть $s_+(t, x)$ — верхняя грань множества, на котором $j(t, x, s)$ как функция s принимает наименьшее значение (всегда $s_+ \in (a, b)$. Тогда

$$u(t, x) = U(t, t, x, s_+(t, x)).$$

Изучаются свойства решения u. Показывается, что в каждой точке $(t, x) \in G$ существуют пределы $u(t, x+0)$, $u(t, x-0)$, причем

$$u(t, x-0) \geqslant u(t, x+0).$$

Если $x(t)$ — уравнение линии разрыва u, то

$$\frac{dx(t+0)}{dt} = \frac{\varphi(t, x(t), u(t, x-0)) - \varphi(t, x(t), u(t, x+0))}{u(t, x-0) - u(t, x+0)}$$

Для всякой непрерывно дифференцируемой функции $f(t, x)$, равной 0 вне некоторой подобласти, целиком лежащей в G,

$$\int\int_D \left[\frac{\partial f}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial f}{\partial x} \varphi(t, x, u(t, x)) \right] dx\, dt = 0.$$

При некоторых дополнительных ограничениях на φ определяется решение задачи Коши в полуплоскости $t > 0$.

См. также РЖМат, 1955, 2677, 1957, 3160.

Н. Д. Введенская

8642. О разрывных решениях нелинейных дифференциальных уравнений. Олейник О. А., Докл. АН СССР, 1956, **109**, № 6, 1098—1101

Обобщенным решением задачи Коши

$$\partial u/\partial t + \partial \varphi(t, x, u)/\partial x = 0, \qquad \varphi''_{uu} \geqslant 0 \qquad (1)$$
$$u(0, x) = u_0(x)$$

в полуплоскости $G\{t \geqslant 0\}$ называется ограниченная измеримая функция $u(t, x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) для любой непрерывно дифференцируемой функции $f(t, x)$, равной 0 вне некоторой конечной области

$$\int\int_{t \geqslant 0} \left[\frac{\partial f}{\partial t} u(t, x, u) + \frac{\partial f}{\partial x} \varphi(t, x, u) \right] dx\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(0, x)\, u_0(x)\, dx = 0,$$

2) во всякой конечной области $D \subset G$ существует такая непрерывная при $t > 0$ функция $K_D(t)$, что для (t, x_1), (t, x_2) из D

$$[u(t, x_1) - u(t, x_2)] / (x_1 - x_2) \leqslant K_D(t).$$

Условиям 1), 2) удовлетворяет функция

$$u(t, x) = U(t, t, x, s_+(t, x))$$

(см. реф. 8641).

В настоящей заметке доказана единственность решения. (1). Предположим, что существует 2 решения u и v. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\varphi(t, x, u_h(t, x)) - \varphi(t, x, v_h(t, x))}{u_h(t, x) - v_h(t, x)} \frac{\partial f}{\partial x} = F(t, x), \qquad (2)$$

где u_h и v_h — средние функции для u и v с ядром усреднения радиуса h, F — произвольная гладкая финитная функция, равная 0 при $t < \delta$, $\delta > 0$.

Пусть fh — решение (2), равное 0 при $t = T > 0$. Из 2) вытекает равномерная ограниченность $|dfh/dx|$ при любом $T \geqslant t \geqslant \alpha > 0$ и всех достаточно малых h. Производные $\partial fh/\partial t$ также равномерно ограничены. Выберем при $h \to 0$ из f_h подпоследовательность, сходящуюся к $f(t, x)$ и пусть

$$\Phi_\alpha(t, x) = f(t, x), \quad t \geqslant \alpha; \quad \Phi_\alpha(t, x) = f(\alpha, x), \quad t < \alpha.$$

Тогда при $\alpha < \delta$

$$\int\int_{t \geqslant 0} F(t, x)(u - v)\, dx dt = -\int\int_{0 \leqslant t \leqslant \alpha} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} [\varphi(t, x, u) - \varphi(t, x, v)]\, dx dt.$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x} \right| \partial x = \operatorname{Var} \Phi_\alpha \leqslant C(\delta) \text{ и}$$

поэтому

$$\int\int_{t \geqslant 0} F(u - v)\, dx dt \leqslant \alpha C(\delta) \max |\varphi(t, x u) - \varphi(t, x, v)|$$

откуда следует, что $\int\int_{t \geqslant 0} F(u - v)\, dx\, dt = 0$ для любой функции F и, значит, $u = v$. (См. также реф. 8642).

Н. Д. Введенская

8643. О краевых задачах, допускающих данное решение. Салехов Г. С., Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. н., 1956, вып. 9, 3—12

В n-мерной области $G \supset (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задано уравнение в частных производных, зависящее от конечного числа параметров $\{\alpha_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, M)$:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; u, u_1, u_2, \ldots, u_n; u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{nn}; \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_M) = 0 \qquad (1)$$

где u — неизвестная функция и $u_j = \partial u/\partial x_j$, $u_{jl} = \partial^2 u/\partial x_j \partial x_l$.

Пусть уравнение (1) определено для $\{\alpha_k\}$, принадлежащих области G_α, а функция u в областях $G_i \subset G$ не более, чем $n - 1$ измерений, удовлетворяет краевым условиям:

$$K_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_n; \beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}, \ldots, \beta_{N_i}^{(i)}) = 0 \qquad (2)$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$ и $\{\beta_{s_i}^{(i)}\}$ $(s_i = 1, 2, \ldots, N_i)$ — конечное число параметров, изменяющихся в области $G_\beta^{(i)}$.

Краевая задача, допускающая данное решение (иначе обратная краевая задача), ставится следующим образом.

Требуется определить значения параметров $\{\alpha_k\}$ $\{\beta_{s_i}^{(i)}\}$ соответственно в областях G_α и $G_\beta^{(i)}$ так, чтобы наперед выбранная функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в област

G удовлетворяла в определенном смысле наилучшим образом уравнению (1) и краевым условиям (2).

Предлагается следующий метод решения. Подставляя v в уравнения (1) и (2), получаем известные функции переменных $\{x_j\}$ и параметров $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_{s_i}^{(i)}\}$:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; v, v_1, v_2, \ldots, v_n; v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{nn}; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M) = \varepsilon,$$

$$K_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; v, v_1, v_2, \ldots, v_n; \beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}, \beta_{N_i}^{(i)}) = \varepsilon_i.$$

Затем параметры $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_{s_i}^{(i)}\}$ определяются из условия, чтобы функции ε и ε_i в соответствующих областях G и G_i наименее уклонялись от нуля по какой-либо принятой норме $\|\varepsilon\|$ и $\|\varepsilon_i\|$. Для этого применимы различные методы минимальной погрешности, например, метод наименьших квадратов.

Вводится следующее понятие корректности обратной задачи: задача поставлена коректно,

1) если для указанных областей изменения переменных и параметров соответствующая прямая краевая задача поставлена корректно,

2) если в областях G_α и $G_\beta^{(i)}$ найдется по крайней мере одна система значений $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_{s_i}^{(i)}\}$ такая, что величины $\|\varepsilon\|$ и $\|\varepsilon_i\|$ будут достигать своих минимальных значений $\delta \geqslant 0$ и $\delta_i \geqslant 0$.

Приведены простейшие примеры задач, допускающих данное решение. Практически важной задачей подобного рода является задача управления перемещения контура нефтеносности. В условиях (2) в статье имеется опечатка: в них не должны присутствовать вторые производные u_{jl}. В. Л. Данилов

8644. О решениях уравнения в частных производных с параметром. Сирота (On solutions of a partial differential equation with a parameter. Shirota Taira), Proc. Japan. Acad., 1956, **32**, № 6, 401—405 (англ.).

Пусть $P(\partial/\partial x, \lambda)$ — полином от производных

$$\sum_{|p| \leqslant m} a_p(\lambda) \frac{\partial^p}{\partial x^p}$$

в R^n, где $a_p(\lambda)$ — комплексозначные непрерывные функции в сепарабельном и локально компактном пространстве Λ, а степень полинома $P(\xi, \lambda)$ не зависит от $\lambda \in \Lambda$.

Доказывается теорема: для любой непрерывной функции $T_x(\lambda)$ (со значениями в D_x') существует решение $S_x(\lambda)$ уравнения $P(\partial/\partial x, \lambda)\, S_x(\lambda) = T_x(\lambda)$, где $S_x(\lambda)$ — непрерывная функция $\lambda \in \Lambda$ (со значениями в D_x'), причем $S_x(\lambda) = 0$ при $T_x(\lambda) = 0$.

Здесь D_x'—пространство линейных непрерывных функционалов над пространством финитных бесконечно дифференцируемых функций (с естественной сходимостью).

Доказательство ведется методом Трева (РЖМат, 1957, 3128) и обобщает полученный там результат при $T_x(\lambda) = \delta_x$. В. М. Борок

8645. О линейных дифференциальных операторах, инвариантных относительно группы преобразований. Гестрин (Про лінійні диференціальні оператори, інваріантні відносно групи перетворень. Гестрін Г. М.), Наук. зап. Львівськ. ун-т, 1957, **44**, 95—106 (укр.)

Рассматривается линейный дифференциальный оператор второго порядка:

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + a(x)$$

с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами, который остается инвариантным под действием некоторой группы G преобразований n-мерного пространства аргументов. Приводятся доказательства следующих утверждений:

1. Для инвариантности оператора L относительно группы G необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\left\| \frac{\partial \xi_\alpha^i}{\partial x^j} \right\|_{i,j=1}^n \cdot \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n + \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial \xi_\alpha^i}{\partial x^j} \right\|_{i,j=1}^n = X_\alpha \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n, \quad (1)$$

$$\left\| \frac{\partial \xi_\alpha^i}{\partial x^j} \right\|_{i,j=1}^n \cdot \|a_i\|_{i=1}^n + \left\| \sum_{r,s} a_{rs} \frac{\partial \xi_\alpha^i}{\partial x^r \partial x^s} \right\|_{i=1}^n = X_\alpha \|a_i\|_{i=1}^n, \quad X_\alpha a = 0, \quad (2)$$

где $X_\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^j}$ и ξ_α^i — векторы инфинитезимальных преобразований группы G; эти же условия необходимы и достаточны для коммутативности операторов L и X_α.

2. Если оператор L инвариантен относительно группы G, допускающей единственный абсолютный инвариант L, то уравнение $Lu = 0$ имеет двупараметрическое семейство решений, определяемых из обыкновенного дифференциального уравнения:

$$F_1(I) \frac{d^2U}{dI^2} + F_2(I) \frac{dU}{dI} + aU = 0,$$

где величины

$$F_1 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial I}{\partial x^i} \frac{\partial I}{\partial x^j} \text{ и } F_2 = LI - aI$$

суть также инварианты группы G.

Если матрица $\|a_{ij}\|$ нессобая, то для того чтобы одновременно с оператором L был инвариантным относительно G и сопряженный оператор

$$Lu^* = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a_{ij} u}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i u}{\partial x^j} + au,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} = \text{const} \quad (3)$$

для всех векторов инфинитезимальных преобразований G.

Примечание референта. Матрицу $\|a_{ij}\|$ при старших производных оператора L всегда можно рассматривать как заданный двувалентный контравариантный тензор, систему величин a^{ij} — как свертку тензора $\|a_{ij}\|$ и некоторой аффинной связности

$$\Gamma_{r,s}^i: \quad a^{ij} = \sum_{r,s} a_{r,s} \Gamma_{r,s}^i.$$

В предположении невырожденности матрицы $\|a_{ij}\|$ условие (1) есть результат Киллинга об инвариантности двувалентного тензора относительно группы G (Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований, М., 1947, стр. 251 и 260); условие (2) следует из (1) и условий инвариантности связности Γ_{jk}^i под действием той же группы (см. там же, стр. 279).

И. И. Данилюк

8646. Некоторые советские работы по применению функционального анализа к дифференциальным уравнениям. Соболев С. Л. Чехосл. мат. ж., 1956, **6**, № 3, 289—310 (рез. франц.)

В докладе указывается все возрастающая роль функциональных методов при изучении уравнений математической физики и характеризуются основные напра-

вления развития этих методов. Далее дается формулировка теорем вложения для пространств $\mathring{W}_p^{(l)}$ и приводится схема использования этих теорем (а также полной непрерывности оператора вложения) при изучении вариационными методами задач для полигармонического уравнения. Приводится схема, примененная М. И. Вишиком при исследовании сильно эллиптических систем, и метод априорных оценок О. А. Ладыженской, причем отмечается роль теорем вложения в этих схемах. Излагается сущность метода ортогональных проекций для эллиптических уравнений. Рассматриваются эллиптические уравнения с вырождением и роль соответствующих теорем вложения в вырождающихся метриках.

Формулируются основные результаты, связанные с обобщенной постановкой задачи Коши для волнового уравнения. Приводятся различные постановки смешанной задачи для гиперболических и параболических уравнений, рассмотренные М. И. Вишиком и О. А. Ладыженской, дается набросок применявшихся ими методов, опять-таки использующих теоремы вложения. А. А. Дезин

8647. Методы линейного функционального анализа в математической физике. Фикера (Methods of functional linear analysis in mathematical physics. Fichera Gaetano), Proc. Internat. Congr. Mathematicians, 1954, vol. 3, Groningen — Amsterdam, 1956, 216—228 (англ.)

Пусть D — область в R_n с границей B. Рассматривается граничная задача

$$E(u) = f \text{ в } D, \quad L(u) = g \text{ на } B_1, \quad (B_1 \subset B),$$

где E — линейный дифференциальный оператор в D и L — линейный оператор, который сопоставляет функции u функцию g, определенную на B_1. Пусть S — множество допустимых функций и S' — пространство векторов (f, g). Пусть $T(u) = (E(u), L(u))$. Рассматривается функционал $I(u) = \|u\| / \|T(u)\|$ на всем множестве S, за исключением нулевого элемента ω. Автор уделяет особое внимание вычислению верхней границы функционала $I(u)$ для ряда граничных задач. С этой целью строится класс векторов $\{w\} = \Gamma$ и функционалу $I(u)$ сопоставляется в каждом конкретном случае функционал $F(w)$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) Γ не пуст, если $I(u)$ ограничен; 2) для любого $u \in S - \omega$ и $w \in \Gamma$ выполняется неравенство $I(u) \leqslant F(w)$. Под $\|u\|$ в большинстве случаев понимается $\|u\|_{L_p}$ $(p > 1)$. Указанный метод применяется к ряду задач параболических, эллиптических уравнений и эллиптических систем, в частности, к системе уравнений теории упругости.

Приведем один из результатов для параболических уравнений, характеризующий применение метода. Пусть

$$E(u) = E_0(u) - \partial u / \partial t,$$

где

$$E_0(u) = \sum_{h,\, k=1}^{n} a_{hk}(x,\, t)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_h\, \partial x_k} + \sum_{h=1}^{n} b_h(x,\, t)\, \frac{\partial u}{\partial x_h} + c(x,\, t)\, u$$

эллиптический оператор с гладкими коэффициентами $(c \leqslant 0)$. Область D лежит между плоскостями $t = 0$ и $t = T$ и при любом t_0 $(0 \leqslant t_0 \leqslant T)$ пересечение плоскости $t = t_0$ и D дает гладкую область $D(t_0)$.

Пусть $D(0)$ — основание D и B_1 — оставшаяся часть границы B.

Предполагается, что u непрерывно дифференцируема в $D + B$ и такова, что $\int_D |E(u)|^p\, d\tau < +\infty$. Пусть

a) S — пространство решений однородного уравнения $E(u) = 0$,

b) $$\|u\| = \left(\int_D u^p\, d\tau \right)^{1/p},$$

$$\|Tu\| = \left(\int_{D(0)+B_1} u^p\, d\sigma \right)^{1/p}$$

(p — четное положительное число)

c) Γ — класс функций, удовлетворяющих следующим условиям

$$E^*(w) > 0 \text{ в } D + B, \quad w = 0 \text{ на } B_1$$

$$F(w,\, p) = [(\max_{B_1} |\, \partial w / \partial \nu\,| + \max_{D(0)} |\, w\,|) / \min_{D+B} E^*(w)]^{1/p},$$

где $\partial w / \partial \nu$ — конормальная производная, связанная с $E_0(u)$ и E^* — оператор, сопряженный с E.

Тогда имеет место неравенство

$$\left(\int_D u^p\, d\tau \right)^{1/p} \leqslant F(w,\, p) \left(\int_{D(0)+B_1} u^p\, d\sigma \right)^{1/p},$$

которое при $p \to +\infty$ дает известный принцип максимума.

В библиографии не указан, к сожалению, целый ряд работ советских математиков по рассматриваемому вопросу. А. И. Кошелев

8648. Метод решения некоторых краевых задач. Рид (A method for solving certain boundary value problems. Reid Walter P.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, **3**, № 4, 259—261 (англ.)

Для решения задачи

$$\Delta u(x,\, y) = 0, \quad \sum_{m=0}^{n} a_m\, \frac{\partial^m u(0,\, y)}{\partial x^m} = f(y),$$

$$\sum_{l=0}^{n} b_l\, \frac{\partial^l u(x,\, 0)}{\partial y^l} = g(x),$$

(a_m, b_l = const) предлагается подстановка

$$w = \left(\sum_{m=0}^{n} a_m\, \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \left(\sum_{l=0}^{n} b_l\, \frac{\partial^l}{\partial y^l} \right) u,$$

приводящая к задаче

$$\Delta w = 0, \quad w(0,\, y) = p(y), \quad w(x,\, 0) = q(x),$$

где $p(y)$ и $q(x)$ определяются по $f(y)$ и $g(x)$.

Если w найдено, то u находится последовательным решением 2 обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Г. И. Натансон

8649. О некоторых уравнениях в частных производных для двух неизвестных функций. Митринович (Sur certaines équations aux dérivées partielles à deux fonctions inconnues. Mitrinovitch Dragoslav S.), Весн. Друшт. матем. и физ. Н. Р. Србије, 1956, **8**, № 1—2, 3—6 (франц.; рез. сербо-хорв.)

В работе изучается уравнение

$$(1/u)\, \partial^2 u / dx\, \partial y = (k/v)\, \partial^2 v / \partial x\, \partial y \qquad (k = \text{const}), \quad (1)$$

содержащее две неизвестные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, которое автор, по всей вероятности, имеет в виду называть неопределенным уравнением. Полагая $u = T(v)$, автор приводит уравнение (1) к уравнению с одной неизвестной функцией v:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = \frac{vT''(v)}{kT - vT'}\, \frac{\partial v}{\partial x}\, \frac{\partial v}{\partial y}$$

типа Гурса, откуда определяет неизвестную функцию v в зависимости от вида функции T.

Далее автором рассмотрено неопределенное уравнение вида

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big/ \frac{\partial u}{\partial y} = k\, \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \Big/ \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad (k = \text{const} \neq 0),$$

которое с помощью замены $u = T(v)$ приводится к уравнению Риккати

$$(1-k)\,T'\,(2P^2 + dP/dv) + 3T''P + T''' = 0,$$

где $v' = p = \exp\left(\int P\,dv\right)$.

Затем рассматривается уравнение вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{a'}{a}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\frac{a'}{a} - \frac{a''}{a'}\right)\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

которое посредством замены $f = T(a, y)$ приводится к виду

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k\,\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad (a = \exp\lambda).$$

О. А. Жаутыков

8650. Об одной задаче для системы уравнений в частных производных с данными на характеристиках. Ахундов А. М., Ылмы язгылар. Туркм. унив., Уч. зап. Туркм. ун-та, 1956, вып. 6, 7—17

В работе рассматривается задача для системы типа

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_i} = \sum A_j^{(k)}(x_1, \ldots, x_s)\,U_j$$
$$k = 1, 2, \ldots, N; \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

когда U_i заданы на s пересекающихся гиперплоскостях, параллельных координатным плоскостям.

Задача редуцируется к системе интегральных уравнений, которая решается методом последовательных приближений в классе функций, удовлетворяющих неравенству

$$|U_i| \leqslant \Phi_i (1 + x)^p,$$
$$x = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|), \quad \Phi_i > 0, \quad p > 0.$$

В. Н. Масленникова

8651. Распространение метода Лагранжа—Шарпи на случай двух уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями. Булешев У. Б., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955, вып. 16, 39—44

Для нахождения полного интеграла системы:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z_1, z_2, p_1, q_1, p_2, q_2) &= 0 \\ F_2(x, y, z_1, z_2, p_1, q_1, p_2, q_2) &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (*)$$

где $p_i = \partial z_i/\partial x$, $q_i = \partial z_i/\partial y$, $i = 1, 2$, ищутся два соотношения

$$\Phi_1(x, y, z_1, z_2, p_1, q_1, p_2, q_2) = a_1$$
$$\Phi_2(x, y, z_1, z_2, p_1, q_1, p_2, q_2) = a_2,$$

где a_1 и a_2 — произвольные постоянные, которые вместе с уравнениями $(*)$ образовывали бы вполне интегрируемую систему с якобианом

$$\frac{D(F_1, F_2, \Phi_1, \Phi_2)}{D(p_1, q_1, p_2, q_2)} \neq 0.$$

Формально выписана система двух уравнений для определения Φ_1 и Φ_2. Эта система билинейна относительно частных производных этих функций и весьма громоздка. Никаких исследований возможности решения полученной системы в работе нет. С. А. Гальперн

8652. Геометрические свойства решений нелинейных систем уравнений с частными производными. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Докл. АН СССР, 1957, **112**, № 5, 810—811

Рассматривается нелинейная система уравнений с частными производными

$$F_i(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0 \quad (i = 1, 2). \qquad (1)$$

Она предполагается сильно эллиптичной в смысле, данном в работах М. А. Лаврентьева (Матем. сб., 1947, **21** (63), № 2, 285—320; Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, **12**, 513—554), с тем, однако, обобщением, что от решения $f = u + iv$ системы не требуется однолистности.

Формулируются следующие теоремы, выясняющие новые геометрические свойства решений системы (1):

1. Для любой римановой поверхности гиперболического типа F и для любой сильно эллиптичной системы (1) существует гомеоморфное квазиконформное отображение $w = f(z)$ поверхности F на единичный круг, соответствующее этой системе.

2. Любое дифференцируемое в области D решение $w = f(z)$ сильно эллиптичной системы (1), $u \not\equiv \text{const}$, $v \not\equiv \text{const}$, реализует гомеоморфное отображение D на некоторую риманову поверхность.

3. Любое решение, удовлетворяющее условиям теоремы 2, можно представить в виде суперпозиции аналитической функции и гомеоморфизма области D на себя. И. И. Данилюк

8653. Построение решений систем уравнений с частными производными путем композиции инфинитезимальных преобразований Беклунда. Лёвнер (Generation of solutions of systems of partial differential equations by compositions of infinitesimal Baecklund transformations. Loewner Charles), Итон л'аналиса математит, J. Analyse Math., 1952—1953, **2**, 219—242 (англ.; рез. евр.) Пусть

$$\zeta = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}; \quad h_{ik} = h_{ik}(u, v).$$

Рассмотрим уравнение (систему, записанную в матричной форме):

$$\zeta_u = H\zeta_v, \qquad (1)$$

связанную с описанием стационарного течения сжимаемой жидкости в плоском случае. Тип уравнения зависит от характеристических корней H. Развиваемая теория имеет целью установить связь между решениями систем (1) различного типа. Пусть $\zeta' = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}$ связана с ζ матричной системой уравнений преобразованием Беклунда:

$$\left.\begin{aligned} \zeta'_u &= W\zeta_u + A\zeta + C\zeta' \\ \zeta'_v &= W\zeta_v + B\zeta + D\zeta' \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

с коэффициентами-функциями u и v. При ряде предположений относительно коэффициентов условия интегрируемости для (2) (т. е. условия существования ассоциированной функции ζ' для заданной ζ) запишутся в виде:

$$(-W_v + B + DW)\,\zeta_u + (W_u - A - CW)\,\zeta_u = 0. \qquad (3)$$

Задача состоит в нахождении преобразования Беклунда, переводящего решения (3) в решения заданного уравнения

$$\zeta'_u - H'\zeta'_v = 0. \qquad (4)$$

Даются условия (система пяти обыкновенных уравнений, которой должны удовлетворять коэффициенты (2)), при которых всякое решение уравнения (1) имеет ассоциированную функцию ζ', удовлетворяющую уравнению (4), где

$$\dot{H} = W^{-1}H^{-1}W.$$

Далее вводится зависимость H от дополнительного параметра t, причем

$$H = H(u, v, t_0); \quad H' = H'(u, v, t_1)$$

и строится аппарат для нахождения требуемого преобразования Беклунда (связывающего решения (1) и (4)) путем композиции инфинитезимальных преобразований Беклунда, определяемых в статье. Изучается структура дифференциальных уравнений, описывающих композицию инфинитезимальных преобразований Беклунда. А. А. Дезин

8654. Обзор локальных свойств решений уравнений в частных производных эллиптического типа.

Берс (Survey of local properties of solutions of elliptic partial differential equations. Bers Lipman), Communs Pure and Appl. Math., 1956, 9, № 3, 339—350 (англ.)

Обзорная статья посвящена локальным свойствам решений эллиптических уравнений и систем как линейных, так и нелинейных, с $n \geqslant 2$ независимыми переменными. Рассмотрены: вопрос о гладкости (и аналитичности) решений при соответствующих свойствах коэффициентов уравнений; вопрос однозначной продолжимости решений, вопрос об асимптотическом поведении решения в окрестности нуля конечного порядка, вопрос об устранимых особенностях, фундаментальные решения и решения с более высокой изолированной особенностью. Обсуждается также вопрос нахождения так называемых дифференциаторов, т. е. операторов, с помощью которых можно было бы определить процесс бесконечного дифференцирования решения уравнений эллиптического типа, аналогичный определенному автором процессу бесконечного дифференцирования псевдоаналитических функций (РЖМат, 1957, 390К). Для отдельных классов уравнений рассмотрен вопрос об асимптотических и равномерно сходящихся разложениях произвольных решений по частным решениям и вопрос о точках ветвления. По перечисленным вопросам излагаются результаты целого ряда авторов, в том числе и автора статьи, в основном опубликованные ранее. Из новых результатов в добавлении анонсируется результат Ароншайна о невозможности существования нуля бесконечного порядка у решений эллиптического уравнения второго порядка с главными коэффициентами класса C_4 и результаты автора о разложении решений в ряды для уравнений второго порядка эллиптического типа на плоскости. Граничные задачи не рассматриваются. Автор неоднократно подчеркивает важность и актуальность изучения качественных свойств решений уравнений эллиптического типа, из которых важнейшие перечислены выше. В ходе изложения ставится целый ряд интересных нерешенных проблем.

Библ. 45 назв. Б. Боярский

8655. Об одной задаче для уравнения второго порядка эллиптического типа. Стампаккья (Su un problema relativo alle equazioni di tipo ellittico del secondo ordine. Stampacchia Guido), Ricerche mat., 1956, 5, № 1, 3—24 (итал.)

Пусть D — ограниченная область n-мерного пространства с границей FD, направляющие косинусы нормали которой удовлетворяют условию Липшица на FD. Пусть некоторое $n-1$ мерное регулярное многообразие Σ разбивает область D на две подобласти D_1 и D_2. Пусть, далее, граница $FD = F_1D + F_2D$, F_1D и F_2D регулярные многообразия. В каждой из областей D_1, D_2 предполагается заданным оператор

$$E_s(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(x) \frac{du}{\partial x_j}, \quad a_{ij}^{(s)} = a_{ji}^{(s)}, \quad s = 1, 2,$$

и функции $f_s(x)$ и $c_s(x)$; пусть еще $\alpha(P)$, некоторая функция заданная на F_1D и $\varphi(P)$, $\beta(P)$ — две функции точки $P \in F_2D$. Ищется решение уравнений, (*) $E_s(u) - c_s(x)u = f_0(x)$ в $D_s - FD_s$, $s = 1, 2$ $u = u_1$ в D_1 и $u = u_2$ в D_2, удовлетворяющее условиям $u_s = \alpha(P)$ на $F_1D \cdot FD_s$, $du_s/d\nu_s = \varphi(P)u_s + \beta(P)$ на $F_2D \cdot FD_s$ $u_1 = u_2$ и $du_1/d\nu_1 = -du_2/d\nu_2$ на Σ. Здесь

$$\frac{du}{d\nu} = \sum a_{ij}(x) \cos(nx_j) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

n — внутренняя нормаль. Кроме условия

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(x) \lambda_i \lambda_j > \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2, \quad \mu > 0, \quad x \in D_s,$$

предполагается трехкратная непрерывная дифференцируемость $a_{ij}^{(s)}$ внутри некоторой области, содержащей $F_2D : FD_s$ и однократная дифференцируемость в D_s. $c_s(x)$, $f_s(x)$, $\alpha(P)$, $\varphi(P)$ и $\beta(P)$ предполагаются лишь суммируемыми с квадратом или ограниченными в соответствующих областях. Для решения граничной задачи рассматривается функционал

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_D \left\{ \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x) p_i p_j + c(x) u^2 + 2f(x) u \right\} dx + \int_{F_2D} \left\{ \frac{\varphi(P)}{2} u^2 + \beta(P) u \right\} d\sigma$$

$\left(a_{ij}(x) = a_{ij}^{(s)}(x) \text{ для } x \in D_s\right)$ на подмножестве H функций класса A_2^*, $A_2 \subset W_2^1$, для которых $I(u)$ конечен и $\lim u(x) = \alpha(P)$, $x \to P$, почти всюду на F_1D (стремление по нормали). Добавочно предполагается, что H не пустое. Пусть

$$q = \sup[-c(x)] \text{ в } D \text{ и } \nu = \inf \varphi(P) \text{ на } F_2D.$$

При условиях $\nu > 0$, $q < \lambda \min[\mu, \nu]$ или $\nu = 0$, $q < \lambda_1 \mu_1$, λ, λ_1 — некоторые положительные постоянные, зависящие от области D и многообразия F_2D, доказано существование и единственность в H функции u_0, для которой $I(u)$ достигает минимума на H. u_0 есть обобщенное решение рассматриваемой граничной задачи. Оно почти всюду в D_s удовлетворяет уравнениям (*), почти всюду непрерывно на Σ и почти всюду удовлетворяет граничным условиям на F_1D и F_2D. Второе условие на Σ удовлетворяется в следующем обобщенном смысле

$$\lim_{\rho \to 0} \left\{ \int_{S_1} \frac{du_1}{d\nu_1} d\sigma + \int_{S_2} \frac{du_2}{d\nu_2} d\sigma \right\} = 0,$$

$$S_i = S(x_0, \rho) D_i, \quad i = 1, 2,$$

$S(x_0, \rho)$ семейство гомотетических относительно центра x_0 регулярных гиперповерхностей, при $\rho \to 0$, стягивающихся к точке x_0; x_0 — точка Σ, лежащая внутри D. В заключительной части работы показывается, что при увеличении требований гладкости на коэффициенты уравнений получаемые решения непрерывно дифференцируемы внутри D_s, $s = 1, 2$ и во внутренних точках Σ условия согласования решений u_1 и u_2 удовлетворяются в классическом смысле.

Примечание референта. Определение и свойства функций класса A_2, которые используются в реферируемой работе, изучены автором ранее (Ricerche mat., 1952, 1,27—54). Б. Боярский

8656. Исследования по линейным граничным задачам для линейных и квазилинейных систем уравнений эллиптического типа. I, II. Ниче (Untersuchungen über die linearer Randwertprobleme linearer und quasilinearer elliptischer Differentialgleichungs systeme. I. II. Nitsche Johannes), Math. Nachr., 1955, 14, № 2, 75—127; № 3, 157—182 (нем.)

Пусть на границе L односвязной области T, класса Ah по Лихтенштейну, заданы две действительные функции $\sigma(s)$ и $\tau(s)$, такие что $n = [\sigma(s_0 + L_0) - \sigma(s_0)]/2\pi$, $n = [\tau(s_0 + L_0) - \tau(s_0)]/2\pi$, L_0 — длина L, s_0 — некоторая точка L, и $e^{-i\sigma(s)}$ и $e^{-i\tau(s)}$ непрерывны по Гёльдеру на L, σ и τ непрерывны слева на L, $\sigma \not\equiv \tau$. Пусть, далее $h_0, h_1, \ldots, h_{2n}$ действительные функции, непрерывные по Гёльдеру на L и удовлетворяющие условию: для любого множества E $2m$ различных точек контура L, $m \leqslant n$ существует линейная комбинация $\mu_0 h_0 + \mu_1 h_1 + \ldots + \mu_{2n} h_{2n}$, которая меняет знак при переходе через точки E и только там. В первой части работы рассматривается задача Римана — Гильберта для системы

$$w_{\bar{z}} + Aw + B\bar{w} = F(z), \qquad (*)$$

A, B, F, непрерывны и ограничены в T, $w = u + iv$, $w_{\bar z} = (w_x + iw_y)/2$, в следующей постановке: при $n \geqslant 0$ (задача $+$, обозначение референта) определить решение уравнения $(*)$ по граничным условиям

$$R^{\sigma}(w) \equiv Re\{e^{-i\sigma(s)} w(z(s))\} = h(s),$$

$$\int_L h_j(s) R^{\tau}(w)\, ds = x_j,$$

$j = 0, 1, \ldots, 2n$, где $h(s)$ — функция, заданная на L и непрерывная по Гельдеру, а x_j, $j = 0, 1, \ldots, 2n$, заданные постоянные; при $n < 0$ (задача —) определить постоянные x_j $j = 0, 1, \ldots, 2(|n| - 1)$ таким образом, чтобы задача $R^{\sigma}(w) = \tilde h(s)$, $\tilde h(s) \equiv h(s) - \sum_{j=0}^{2(|n|-1)} x_j h_j(s)$ для уравнения $(*)$ была разрешима. Доказывается, что задачи $+$ и $-$ всегда однозначно разрешимы. Далее для задач $+$ и $-$ строятся функции Грина и при их помощи даны представления решений этих задач (для $n \geqslant 0$):

$$w(z) = \iint_T \left\{K^1(z, \zeta) F(\zeta) + K^2(z, \zeta) \overline{F(\zeta)}\right\} d\zeta\, d\eta +$$

$$+ \int_L H(z, s) h(s)\, ds + \sum_{j=0}^{2n} x_j w_j(z),$$

где $w_j(z)$, решения задачи

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} w_j - A w_j - B \bar w_j = 0, \quad R^{-(\sigma+\gamma)}(w_j) = 0,$$

γ — угол наклона касательной к L к оси x,

$$\int_L h_L R^{-(\sigma+\gamma)}(w_j)\, ds = \delta_{ji},$$

и для $n < 0$,

$$w(z) = \iint_T \left\{K^1(z, \zeta) F(\zeta) + K^2(z, \zeta) \overline{F(\zeta)}\right\} d\zeta\, d\eta +$$

$$+ \int_L H(z, s) h(s)\, ds,$$

где $K^1(z, \zeta)$, $K^2(z, \zeta)$ и $H(z, s)$ — некоторые ядра. Их свойства подробно изучены. Доказано существование и единственность функции Грина. В своих исследованиях автор использует результаты работы И. Н. Векуа (Матем. сб. 1952, 31 (73), 217—314). При рассмотрении задач $+$ и $-$ автор устанавливает подробные оценки для показателей Гёльдера решений и их производных в зависимости от показателей Гёльдера коэффициентов уравнения, граничного условия и их правых частей. Эти результаты применяются во второй части работы при решении линейной граничной задачи вида $+$ и $-$ для нелинейного уравнения вида

$$w_{\bar z} - Aw - B\bar w = F(z, w). \qquad (**)$$

В предположении непрерывной дифференцируемости F по z и w устанавливается теорема единственности для задач $+$ и $-$ для уравнения $(**)$. Существование решения этих задач получается при существенном ограничении $F(z, w) = o(|w|)$ при $|u| \to \infty$. Метод доказательства существования основан на использовании полученных оценок показателей Гёльдера и применении принципа неподвижной точки Шаудера. Для уравнения $\Delta\varphi = f(x, y, \varphi_x, \varphi_y)$ рассмотрена задача $\varphi_x{}^{\alpha} + \varphi_y{}^{\beta} = h$ при ограничении $f(x, y, \varphi_x, \varphi_y) = o\left(\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}\right)$. В последней шестой главе работы рассматриваются главным образом задачи $+$ и $-$ для системы

$$u_x = (-F(x, y; u, v) v_x + E(x, y; u, v) v_y)/\sqrt{EG - F^2},$$

$$u_y = -(Gv_x - Fv_y)/\sqrt{EG - F^2}. \qquad (***)$$

При соответствующей гладкости коэффициентов уравнений $(***)$ доказана единственность решения задач $+$ и $-$. Существование решений установлено при предположениях равномерной эллиптичности системы $(***)$: $E + G \leqslant M\sqrt{EG - F^2}$ для всех u, v; постоянная $M < +\infty$. Б. Боярский

8657. Об одной теореме типа Штурма и применение ее к задаче разделения нулей собственных функций оператора Δ. Бобоц (Asupra unei teoreme de tip Sturm şi aplicaţii la problema separării zerourilor funcţiilor proprii ale operatorului Δ. Boboc N.), Bul. ştiint. Acad. R. P. Pomîne, Sec. mat. şi fiz., 1955, 7, № 3, 723—729 (рум.; рез. русск., франц.)

Исходя из задачи, предложенной И. Г. Петровским (РЖМат, 1955, 3217К), устанавливается теорема типа Штурма для уравнения $\Delta u + Au = 0$. Здесь $A = A(x, y, \lambda) > 0$ — монотонно возрастающая функция от λ, непрерывная по x и y в области Ω со спрямляемой границей Γ; $u \in C^2$ и $u|_{\Gamma} = 0$. Доказывается, что функция u не имеет изолированных нулей в Ω и каждая связная компонента множества нулей функции u разделяет область Ω на несвязные части.

Пусть $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$ — последовательность собственных значений, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ — соответствующая последовательность собственных функций рассматриваемого уравнения; $\{M_i^n\}$ — множество связных компонент нулей собственной функции φ_i, а $\{K_i^n\}$ — множество тех областей, на которые разбивается область Ω нулями $\{M_i^n\}$ функции φ_i. Говорят, что множество $\{M_i^n\}$ разделяется (C) множеством $\{M_j^n\}$, если для каждой области $D_i \in \{K_i^n\}$ существует связная компонента M_j^n, которая разделяет D_i.

Доказываются две теоремы разделения:

Теорема 1. Нули собственной функции φ_k разделяют (C) нули собственной функции φ_s, если $s < k$.

Теорема 2. Любые две собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению λ, имеют нули, взаимно разделяющиеся (C). В. М. Борок

8658. Свойства роста решений нелинейных уравнений эллиптического типа. Финн (Growth properties of solutions of non-linear elliptic equations. Finn Robert), Communs Pure and Appl. Math., 1956, 9, № 3, 415—423 (англ.)

Статья посвящена обзору результатов серии работ автора по нелинейным уравнениям в частных производных второго порядка эллиптического типа на плоскости. Главным образом изучаются уравнения вида

$$a\varphi_{xx} + 2b\varphi_{xy} + c\varphi_{yy} = d, \qquad (1)$$

где a, b, c и d — функции переменных x, y, φ, φ_x, φ_y, φ — неизвестная. Изучаемые уравнения, для которых типичными являются уравнение минимальных поверхностей, уравнение поверхностей постоянной средней кривизны и уравнение политропического течения идеального газа образуют более общий класс, чем равномерно эллиптические уравнения. В рассмотрение вводятся разного рода римановы метрики, индуцируемые решениями уравнения (1) в области, где задано уравнение, например, $ds_1^2 = c\,dx^2 - 2b\,dx\,dy + a\,dy^2$ и др. Главным образом в предположениях различных соот-

ношений квазиконформности между такими метриками устанавливаются априорные оценки для решений уравнения (1), для градиента решений и для площади поверхности, определяемой решением. Приводится обобщение теоремы С. Н. Бернштейна и для отдельных классов уравнений рассматривается задача Дирихле. В частности, приведен пример уравнения вида $[A(p)]_x + [B(q)]_y = 0$, $p = \varphi_x$, $q = \varphi_y$, A, B, N-раз непрерывно дифференцируемы и ограничены, N любое, для которого задача Дирихле в единичном круге не при всяких непрерывных данных на границе круга имеет решение. Большинство результатов доказано в предыдущих работах автора. Новым является аналог леммы Шварца для уравнений вида

$$[A(x, y, \varphi, p, q)]_x + [B(x, y, \varphi, p, q)]_y = 0,$$

который здесь анонсируется впервые. Доказательств нет. Литература 20 названий. Б. Боярский

8659. О дифференцируемости решений эллиптических дифференциальных уравнений. Кошелев А. И., Докл. АН СССР, 1957, 112, № 5, 806—809

Рассматривается первая краевая задача для эллиптического дифференциального уравнения

$$L(u) = \sum_{i,\,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x) \qquad (1)$$

в n-мерной области Ω, ограниченной дважды непрерывно дифференцируемой поверхностью Γ. Доказывается.

Теорема. Если $a_{ik}(x)$ непрерывно дифференцируемы в $\bar{\Omega}$ и $f \in L_p(\Omega)$ $(p > n/2)$, то существует обобщенное решение $u(x)$ первой краевой задачи для уравнения (1), удовлетворяющее неравенству

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_p(\Omega)}, \qquad (2)$$

где C — постоянная, не зависящая от u, f.

Теорема доказывается с помощью лемм, устанавливающих для любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$ соответственно внутренней и опирающейся на Γ, априорную оценку

$$\int_{\Omega'} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\right|^p d\Omega \leqslant C\int_{\Omega} |f|^p\, d\Omega. \qquad (3)$$

Без ограничения общности можно считать Ω' прямоугольным параллелепипедом. При выводе неравенства (3) функция $u(x)$ представляется в виде суммы $u = v + w$, где $v(x)$ есть решение задачи $L(v) = 0$, $v|_{T_0} = u$ (T_0 — граница области Ω'), а $w(x)$ — решение задачи $Lw = f$, $w|_{T_0} = 0$.

Оценка вида (3) устанавливается для функции $w(x)$ с помощью леммы, гарантирующей аналогичную оценку в случае постоянных коэффициентов a_{ik}.

Функция же $v(x)$ допускает оценку

$$\int_{\Omega'} \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_k}\right|^p d\Omega \leqslant G \max_{x\in\Omega} |u(x)|. \qquad (4)$$

Из представления

$$u(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

где $\Gamma(x, \xi)$ — функция Грина рассматриваемой задачи, дует (лемма 2) неравенство

$$\max |u(x)| \leqslant A\|f\|_{L_p(\Omega)} \quad (p > n/2), \qquad (5)$$

в котором постоянная A не зависит от u, f.

Неравенства (4), (5) дают нужную оценку вида (3) для $v(x)$. О. В. Гусева

8660. Линейные аспекты теории потенциала. Теорема двойственности и приложения. Шоке, Дени (Aspects linéaires de la théorie du potentiel. Théorème de dualité et applications. Choquet Gustave, Deny Jacques), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 10, 764—767 (франц.)

Рассматривается пространство непрерывных действительных функций C и мер Радона $\mathfrak{M}$ на X. Через $C_k\mathfrak{M}_k$ обозначены подмножества функций и мер с компактным носителем. Между C_k и $\mathfrak{M}$ (или C и $\mathfrak{M}_k$) устанавливается дуальное соответствие соотношением $\langle f, \mu\rangle = \int f\, d\mu$. Ядром распространения называется линейное отображение T $\mathfrak{M}_k$ в $\mathfrak{M}$, обладающее определенными свойствами. (Сравни с оператором $\int \frac{1}{r}\, d\ldots$). Мера $T\mu$ называется потенциалом, порожденным μ. Двойственная операция называется транспонированным ядром распространения.

Теорема: чтобы ядро распространения удовлетворяло принципу выметания, необходимо и достаточно, чтобы транспонированное ядро удовлетворяло принципу подчинения (определение указанных принципов нами опущено).

Всякая мера $\varkappa$ на локально компактной абелевой группе определяет ядро распространения $T_\varkappa\mu = \varkappa * \mu$ ($*$ — свертка). Рассматриваются свойства получаемых таким образом ядер (в связи с принципами „выметания„ и „подчинения“). А. А. Дезин

8661. „Функции“ Грина граничных задач для волнового уравнения. Гарнир („Fonctions“ de Green pour les problèmes aux limites de l'équation des ondes. Garnir H. G.), 2-me colloq. équations aux dérivées partielles, CBRM, Bruxelles, 1954, Paris, 1955, 83—94 (франц.)

Рассматривается оператор

$$E \equiv -\Delta + a\partial^2/\partial t^2 + b\partial/\partial t + c; \quad a > 0$$

с постоянными коэффициентами, в области $\Omega \subset R^n$ пространственных переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, на границе которой заданы условия Дирихле — Неймана. После преобразования Лапласа по t E переходит в $E^{(p)}$ (p—операционное переменное). Для $E^{(p)}$ известна функция Грина: $K^{(p)}(x_0, x)$, тогда функция Грина исходного оператора E может быть формально определена как

$$F(x, x_0, t) = L^{-1}K^{(p)}(x_0, x), \qquad (1)$$

где L^{-1} — обратное преобразование Лапласа. Проводится обоснование формального соотношения (1) на основе теории преобразования Лапласа для обобщенных функций (ср. Лион, РЖМат, 1957, 1414) (F является обобщенной функцией по t). В качестве примера рассматривается функция Грина задачи Коши ($\Omega = R^n$). Указывается, что аналогично удается построить функцию Грина оператора E для некоторых полиэдральных областей и областей-углов при задании условий Дирихле—Неймана на границе. А. А. Дезин

8662. О принципе Гюйгенса и гипотезе Адамара. Асгейрссон (Some hints on Huygens principle and Hadamard's conjecture. Àsgeirsson Leifur), Communs Pure and Appl. Math., 1956, 9, № 3, 307—326 (англ.)

Дается обзор результатов по принципу Гюйгенса, полученных автором за последние двадцать лет. В статье также кратко излагаются некоторые, относящиеся к этому вопросу, известные результаты Адамара, Матиссона и других исследователей.

Приводится доказанная автором теорема о том, что для гиперболического уравнения

$$Lu = f(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}), \qquad (1)$$

для которого верен принцип Гюйгенса, существует линейный дифференциальный оператор R порядка

$m-2$ и $2m-1$ линейных дифференциальных операторов $A_1, A_2, \ldots, A_{2m-1}$ порядка не более $m-1$ таких, что на характеристическом полуконусе тождественно удовлетворяется уравнение

$$RLu = \sum_{i=1}^{2m-1} \frac{\partial A_i[u]}{\partial \xi_i}. \qquad (2)$$

Решение задачи Коши для (1) может быть получено с помощью интегрирования (2) по характеристическому конусу, ограниченному поверхностью, где заданы начальные данные. В. Н. Масленникова

8663. Смешанные задачи для некоторых параболических систем. Дезин А. А., Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 4, 503—506

Рассматривается смешанная задача для систем первого порядка в $n+1$-мерном кубе с некоторыми начальными и граничными условиями. Основные определения и принципы постановки задач даны в двух предыдущих заметках автора (РЖМат, 1957, 1451; РЖМат, 1957, 7882). В данной работе указывается, что смешанная задача, рассмотренная ранее автором для гиперболических систем, может быть решена и в случае, названном T-параболическим, когда матрица производных по t вырождается определенным образом. Затем рассматриваются так называемые H-параболические системы, имеющие вид:

$$Eu + G\bar{v} = f; \quad G^*u = 0,$$

где E и G некоторые дифференциальные операторы (оператор G, вообще говоря, аналогичен оператору градиента). Указывается, что для проекции оператора E в некоторое подпространство справедливо „энергетическое неравенство". В качестве примера приведены уравнения Максвелла. В. Н. Масленникова

8664. К первой краевой задаче для уравнения теплопроводности. Монтальдо (Sul primo problema di valori al contorno per l'equazione del calore. Montaldo Oscar), Rend. Seminar Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1955, **25**, № 1-2, 1—14 (итал.)

Работа содержит обобщение на m-мерный случай результатов Е. Пини (РЖМат, 1956, 444), относящихся к построению обобщенного (в смысле Винера) решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Метод состоит в доказательстве теоремы о среднем для решения однородного уравнения и в построении функции Грина, связанной с уравнением, в некоторой специальной (прямоугольной) области.

А. А. Дезин

8665. Первая краевая задача и задача Коши для квазилинейных уравнений параболического типа. Олейник О. А., Вентцель Т. Д., Матем. сб., 1957, **41**, № 1, 105—128

Работа посвящена подробному изложению результатов, полученных авторами в 1954 г. (РЖМат, 1955, 2204) и некоторых обобщений. Рассматривается уравнение

$$\partial^2 u/\partial x^2 = A(x,t;u)\,\partial u/\partial t + B(x,t;u)\,\partial u/\partial x + F(x,t;u). \quad (*)$$

Даются достаточные условия разрешимости и единственности первой краевой задачи для уравнения $(*)$ в любом прямоугольнике $R\{0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ и условие разрешимости задачи Коши в любой полосе $S\{-\infty < x < +\infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$. В частности, для первой краевой задачи доказывается следующая теорема: В R существует единственное решение $(*)$, непрерывное вместе с производными, входящими в $(*)$, удовлетворяющее условиям $u(x,0) = u_0(x)$, $u(0,t) = u_1(t)$, $u(x,t) = u_2(t)$, если выполнено следующее:

1) В R и для всех u $A \geqslant a > 0$, $F'_u \geqslant c$, $|F(x,t,0)| \leqslant M$, где a, c, M — постоянные.

2) В $Q = [R \times \{|u| \leqslant M_1\}]$, где M_1 определяется данными задачами и постоянными предыдущего условия, коэффициенты $(*)$ достаточно гладкие.

3) Начальные и граничные значения соответственно имеют третьи и вторые производные, удовлетворяющие условию Липшица.

4) Выполнены условия согласования.

Для доказательства рассматриваются последовательные приближения $\{u_n(x,t)\}$, которые равномерно сходятся к решению $u(x,t)$.

Доказывается, что последовательности $\{\partial u_n/\partial t\}$, $\{\partial u_n/\partial x\}$ и $\{\partial^2 u_n/\partial x^2\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Для получения необходимых априорных оценок используются обобщенный принцип максимума и метод вспомогательных функций для параболических уравнений. Отмечается, что аналогичные приемы могут быть применены в случае многих пространственных переменных.

В заключение приводятся аналогичные теоремы для первой краевой задачи и задачи Коши для некоторых систем квазилинейных параболических уравнений, доказательства которых получены Л. А. Чиликовой.

А. И. Кошелев

8666. Эпидермический эффект для дифференциальных неравенств в частных производных первого порядка. Мляк (The epidermic effect for partial differential inequalities of the first order. Mlak W.), Ann. polon. math., 1956, **3**, № 1, 157—164 (англ.)

Рассматриваются условия, при которых для решения v уравнения

$$\partial z/\partial x = f(x, y_1, \ldots, y_n, z, \partial z/\partial y_1, \ldots, \partial z/\partial y_n),$$
$$v(x^0, y_1, \ldots, y_n) \equiv \omega(y_1, \ldots, y_n)$$

и заданной функции $u(x, y_1, \ldots, y_n)$ выполняется неравенство

$$u(x, y_1, \ldots, y_n) \leqslant v(x, y_1, \ldots, y_n). \qquad (1)$$

Доказана следующая теорема. Пусть выполнено „эпидермическое условие": если в некоторой точке $P = P(x, y_1, \ldots, y_n)$ справедливы неравенства

$$v(P) < u(P) < v(P) + \varepsilon(P), \qquad (2)$$

где функция $\varepsilon(x, y_1, \ldots, y_n)$ непрерывна и положительна, то в этой точке

$$\partial u/\partial x \leqslant f(x, y_1, \ldots, y_n, \partial u/\partial y_1, \ldots, \partial u/\partial y_n).$$

Тогда, при некоторых предположениях гладкости функций f, u и ω справедливо неравенство (1).

Отмечается, что аналогичное утверждение справедливо для систем вида

$$\partial u_\mu/\partial x_\alpha = f^\mu_\alpha(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_k,$$
$$\partial u_\mu/\partial y_1, \ldots, \partial u_\mu/\partial y_n)$$
$$(\mu = 1, \ldots, k;\ \alpha = 1, \ldots, s).$$

Работа продолжает исследования Шарского (РЖМат, 1956, 427) и соприкасается с результатами референтов, посвященных „задаче Чаплыгина" (см., например РЖМат, 1956, 9110).

На стр. 158, 3 строка снизу, вместо x следует читать x^0, а в уравнении (2.3) вместо $\partial z_k/\partial y_1$ должно быть $\partial z_\mu/\partial y_1$.

Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк.

8667. Новый результат в теории краевых задач для нелинейных параболических уравнений с двумя переменными. Чилиберто (Nuovi contributi alla teoria dei problemi al contorno per le equazioni paraboliche non lineari in due variabili. Ciliberto Carlo), Ricerhce mat., 1956, **5**, № 2, 206—225 (итал.)

В области $T \equiv [0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant y \leqslant Y]$ рассматривается краевая задача для уравнения

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, \alpha) = 0,$$

где α — параметр, при условиях $z(x, 0) = z(0, y) = z(X, y) = 0$. При этом функция $F(x, y, z, p, q, r, \alpha)$ определена в области S: $(x, y) \in T$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $|z|, |p|, |q|, |r| < +\infty$, и имеет непрерывные производные первых трех порядков по всем переменным. Предполагается, что в S $F_q F_r < 0$. Кроме того, если $y = z = p = q = r = 0$, $x = 0$ или $x = X$, то $F = F_x = F_y = F_{xx} = 0$.

Теорема. Пусть существует такое значение параметра α, при котором задача имеет одно и только одно решение. Пусть, кроме того, при изменении α множество всех существующих решений, их производных первого порядка и производных второго порядка по x ограничено по модулю. Тогда при любом $\alpha \in [0, 1]$ задача имеет одно и только одно решение.

Далее рассматривается задача для уравнения $z_{xx} = f(x, y, z, z_x, z_y)$ при тех же краевых условиях. Функция $f(x, y, z, p, q)$ определена в S_1: $(x, y) \in T$, $|z|, |p|, |q| < +\infty$, и является трижды непрерывно дифференцируемой. Кроме того, в S_1 $f_q > m > 0$, где m — постоянная. При $y = z = p = q = 0$, $x = 0$ или $x = X$ имеет место $f = f_x = f_y = f_{xx} = 0$. Доказывается теорема существования и единственности в следующих предположениях:

а) Существуют такие числа $z_0 \geqslant 0$ и $z_1 \leqslant 0$, что в S_1 для $z > z_0$ $f(x, y, z, 0, 0) > 0$, а для $z < z_0$ $f(x, y, z, 0, 0) < 0$.

б) Существуют такие числа $q_0 \geqslant 0$ и $q_1 \leqslant 0$, что в S_1 для $q > q_0$ $f_y + q f_z > 0$, для $q < q_1$ $f_y + q f_z < 0$.

в) Существуют такие функции $f_1(x, y, z, q)$ и $f_2(x, y, z, q)$, непрерывные и неотрицательные в S_1, и функция $\omega(\sigma)$, непрерывная и неотрицательная при $\sigma \geqslant 0$ и удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma}{1 + \omega(\sigma)} = \infty,$$

что в S_1 имеет место $|f| \leqslant f_1 \omega(|p|) + f_2$.

При этом условие б) может быть заменено условием ограниченности по модулю функции f_y и ограниченности снизу функции f_z. В конце работы доказана теорема того же типа для уравнения $z_y = g(x, y, z, z_x, z_{xx})$.

Д. М. Эйдус

8668. О квазилинейных уравнениях параболического типа с двумя переменными. Чилиберто (Sulle equazioni quasi-lineari di tipo parabolico in due variabili. Ciliberto Carlo), Ricerche mat., 1956, **5**, № 1, 97—125 (итал.)

В области $T \equiv [0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant y \leqslant Y]$ рассматривается краевая задача для уравнения

$$z_{xx} + a(x, y, z, z_x, \alpha) z_y = f(x, y, z, z_x, \alpha)$$

(α — параметр) при условиях $z(x, 0) = z(0, y) = z(X, y) = 0$. При этом функции $a(x, y, z, p, \alpha)$ и $f(x, y, z, p, \alpha)$ определены в области S:

$$(x, y) \in T,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,\ |z|, |p| < +\infty$$

и имеют в S производные первого порядка по y, z, p, α и производные второго порядка по x. Все эти производные удовлетворяют условию Липшица. Пусть в S $a < 0$ и пусть, кроме того, выполняются следующие условия согласования:

$$f(0, 0, 0, 0, \alpha) = f(X, 0, 0, 0, \alpha) = 0$$

$$v_{xx}(0, \alpha) - f_p(0, 0, 0, 0, \alpha) v_x(0, \alpha) = f_y(0, 0, 0, 0, \alpha)$$

$$v_{xx}(X, \alpha) - f_p(X, 0, 0, 0, \alpha) v_x(X, \alpha) = f_y(X, 0, 0, 0, \alpha),$$

где $v(x, \alpha) = f(x, 0, 0, 0, \alpha)/a(x, 0, 0, 0, \alpha)$.

Теорема. Пусть существует такое значение параметра α, при котором задача имеет одно и только одно решение. Пусть, кроме того, при изменении α множество всех существующих решений и их первых производных ограничено по модулю. Тогда при любом $\alpha \in [0, 1]$ задача имеет одно и только одно решение.

Далее рассматривается уравнение

$$z_{xx} + a(x, y, z_x) z_y = f(x, y, z, z_x),$$

где функции $a(x, y, p)$ и $f(x, y, z, p)$ определены в области S_1: $(x, y) \in T$, $|z|, |p| < +\infty$ и удовлетворяют некоторым условиям гладкости.

Теорема. Пусть в S_1 $a(x, y, p) < -m$, где $m > 0$ — постоянная. Пусть при $y = z = p = 0$ и $x = 0$ или $x = X$ $f = f_x = f_y = f_{xx} = 0$. Предположим, что функции a_x, f и f_x ограничены по модулю в S_1, а f_z ограничена снизу. Тогда краевая задача имеет одно и только одно решение.

Далее доказывается теорема того же типа для уравнения

$$z_{xx} + a(x, y, z, z_x) z_y = f(x, y, z, z_x)$$

в предположении, что в S_1 $a_p \neq 0$. Д. М. Эйдус

8669. Заметка о решениях уравнения теплопроводности при установившемся процессе. Фулкс (A note on the steady state solutions of the heat equation. Fulks W.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 5, 766—771 (англ.)

Ограниченная область в n-мерном пространстве называется регулярной для уравнения теплопроводности, если задача Коши—Дирихле этого уравнения имеет единственное решение при непрерывных начальных и граничных условиях.

А. Н. Тихоновым (Бюлл. МГУ, 1938, **1**, вып. 8, 1—25) была доказана следующая теорема: если какая-нибудь область является регулярной для уравнения теплопроводности, то она также является регулярной для уравнения Лапласа. Доказательство Тихонова основано на том, им же установленном положении, что в определенных условиях решение уравнения теплопроводности при бесконечном возрастании времени стремится к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

В заметке дается доказательство теоремы Тихонова, основанное на построении вспомогательной супергармонической функции (барьера), обеспечивающей регулярность всех граничных точек.

Далее, пользуясь другой теоремой А. Н. Тихонова (о представимости решения уравнения теплопроводности с помощью функции Грина) автор показал, что если начальное значение тождественно равно нулю, а граничное значение неотрицательно, непрерывно, не убывает по времени и стремится к определенному пределу при бесконечном возрастании времени, то тогда решение уравнения теплопроводности положительно, ограничено, не убывает по времени и равномерно стремится к решению уравнения Лапласа, граничным значением которого является упомянутый предел.

В заметку вкрались опечатки. Например, на стр. 768 вместо $u(x + t, h)$ следует читать $u(x, t + h)$; на стр. 770 вместо $u(x, t)$ $x \in R$, $t > 0$ следует читать $u(x, t)$, $x \in R$, $t > 0$. П. К. Зераги

8670. Смешанная задача для систем дифференциально-функциональных уравнений с частными производными и операторами типа Вольтерра. Мышкис А. Д., Шлопак А. С., Матем. сб., 1957, **41**, № 2, 239—256

Исследуется вопрос о непрерывной зависимости от начальных данных и правых частей решения смешанной задачи для системы

$$L_s[t, u] + T_s[t, u] = h_s; \qquad (s = 1, 2) \qquad (1$$

где L_s — дифференциальные операторы первого порядка

$$L_1[i, u] \equiv A_1 \frac{\partial i}{\partial t} + B_1 \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial x} + D_1 i + F_1 u = h_1$$

$$L_2[i, u] \equiv A_2 \frac{\partial u}{\partial t} + B_2 \frac{\partial u}{\partial x} + C^* \frac{\partial i}{\partial x} + D_2 u + F_2 i = h_2$$

T_s — операторы типа Вольтерра; i, u — неизвестные вектор-функции порядка $m \geqslant 1$, $A_1, \ldots, F_1$ — матрицы того же порядка, заданные в области $(x, t) \in \Pi = [0, l] \times [0, T]$, при однородных краевых условиях (C^*L^* — транспонированные матрицы)

$$\left[(C - L_1) u + M_1 i + N_1 \frac{\partial i}{\partial t} + P_1 \int_0^1 i \, d\tau\right]_{x=0} = 0; \quad L_1^* i|_{x=0} = 0$$

$$\left[(C - L_2) u - M_2 i - N_2 \frac{\partial i}{\partial t} - P_2 \int_0^1 i \, d\tau\right]_{x=l} = 0; \quad L_2^* i|_{x=l} = 0$$

и при начальных условиях $i|_{t=0} = \varphi(x)$; $u|_{t=0} = \psi(x)$; $(0 \leqslant x \leqslant l)$. Частным случаем системы (1) является обобщенная система телеграфных уравнений, изученная одним из авторов ранее.

При различных условиях, наложенных на коэффициенты системы и граничных условий, даются оценки отклонения решений $\Delta i = i - i'$, $\Delta u = u - u'$ и их производных через соответствующие отклонения правых частей и начальных данных; получены также оценки о зависимости решения от коэффициентов системы в смысле среднего квадратичного уклонения.

В конце работы рассматриваются телеграфные системы с последействием при простейших краевых условиях, для которых исследуются вопросы существования и единственности решений и их дифференциальные свойства. В. Н. Масленникова

8671. Решение смешанной задачи для нестационарного движения вращающейся вязкой жидкости и исследование дифференциальных свойств этого решения. Масленникова В. Н., Докл. АН СССР, 1956, **109**, № 4, 697—700

Для системы уравнений

$$Lv = \frac{\partial v}{\partial t} - [v \times \omega] - \mu \Delta v + \operatorname{grad} p = F(x, t)$$

$$\operatorname{div} v = 0,$$

где неизвестными являются p и вектор-функция v с составляющими v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, доказывается существование и единственность обобщенного решения следующей задачи:

В цилиндрической области $Q = \Omega \times (0 \leqslant t \leqslant l)$, где Ω область в пространстве (x_1, x_2, x_3) с границей S, ищется обобщенное решение системы, удовлетворяющее условиям $v(x, t)|_{t=0} = 0$, $v(x, t)|_s = 0$ при $t \in [0, l]$.

Обобщенное решение определяется как решение, удовлетворяющее соответствующему интегральному тождеству при любой вектор-функции из некоторого подходящего класса.

Показано, что при некоторых предположениях гладкости решение, в силу теоремы вложения С. Л. Соболева, будет классическим. С. А. Гальперн

8672. Примеры решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа. Шабат Б. В., Докл. АН СССР, 1957, **112**, № 3, 386—389

В статье устанавливаются следующие теоремы:

1. Пусть D_1 — луночка, ограниченная отрезком [0, 1] оси x и кривой L: $y = -y(x)$, где $y(x)$ — дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям:

$$y(x) > 0 \text{ для } 0 < x < 1, \; y(0) = y(1) = 0, \; |y'(x)| \leqslant 1. \tag{1}$$

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — дважды дифференцируемые функции, заданные на отрезке [0, 1] и L соответственно, $F_1(0) = F_2(0)$, $F_1(1) = F_2(1)$. Задача Дирихле для волнового уравнения $u_{xx} - u_{yy} = 0$ в D_1 в этих предположениях имеет континуальное множество решений, которые, вообще, не имеют предела при $(x, y) \to (0, 0)$; существование такого предела выделяет единственное решение задачи.

2. Пусть $D = D_1 + D_2$, где D_2 — верхний полукруг с диаметром [0, 1]. Если $y(x)$, кроме (1), удовлетворяет условию $y'(x) \leqslant y(x)/(x - x^2 + y^2(x))$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, с равенством в изолированных точках, то задача Дирихле для уравнения М. А. Лаврентьева $u_{xx} + \operatorname{sign} y u_{yy} = 0$ в области D в классе функций, непрерывных в D, непрерывно дифференцируемых в D и дважды непрерывно дифференцируемых при $y \neq 0$, не может иметь более одного решения. Если $|y'(x)| \leqslant q < 1$, то эта задача всегда разрешима.

3. В круге $\rho < h$ рассматривается уравнение:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \operatorname{sign}(1 - \rho) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

(ρ, t — полярные координаты), и на окружности $\rho = h$ задаются граничные значения. Существует всюду плотное множество значений $h > 1$, для которых задача Дирихле для уравнения (2) имеет единственное решение при любых (дважды дифференцируемых) граничных значениях, а также всюду плотное множество значений h, для которых эта задача либо неразрешима, либо имеет континуальное множество решений.

4) Аналогичный результат установлен для уравнения М. А. Лаврентьева в случае полуплоскости $y > -h$, $(h > 0)$. И. И. Данилюк

8673. Об устойчивости приближенного решения смешанной задачи для некоторых дифференциальных уравнений. Коваль П. И. (Про стійкість наближенного розв'язку мішаної задачі для деяких диференціальних рівнянь. Коваль Л. Й.), Наук. зап. Київськ. держ. пед. ін-т, 1956, **19**, 31—41 (укр.)

Методом разделения переменных исследуется устойчивость решений разностных уравнений, аппроксимирующих дифференциальные уравнения $\partial u/\partial t = Lu$ и $\partial^2 u/\partial t^2 = Lu$, где

$$Lu = \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + c_k u + d_k\right).$$

Производная $\partial u/\partial t$ заменяется разностью

$$\frac{u(t + l, x_1, \ldots, x_N) - u(t, x_1, \ldots, x_N)}{l},$$

а $\partial^2 u/\partial t^2$ и все производные по x_k заменяются симметрическими разностями.

Доказывается, что для асимптотической устойчивости решения полученного разностного уравнения (т. е. для того, чтобы это решение стремилось к нулю при $t \to \infty$) в случае граничных условий

$$u|_{x_k = 0} = 0, \; u|_{x_k = H_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

достаточно, чтобы

$$1) \quad \sum_{k=1}^{N} \left[a_k \left(\frac{\pi}{H_k}\right)^2 + \frac{b_k^2}{4a_k} - c_k\right] > 0,$$

2) шаги h_k по осям x_k таковы, что $2a_k - c_k h_k^2 - P_k > 0$, где

$$P_k = \sqrt{4a_k^2 - b_k h_k^2}\cos(\pi h_k / H_k),$$

3) шаг l по оси t таков, что $l\bar{\lambda} < 2$, где

$$\bar{\lambda} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{h_k^2}(2a_k - c_k h_k^2 + P_k),$$

для уравнения $du/dt = Lu$ и $l^2\bar{\lambda} < 4$ для уравнения $\partial^2 u/\partial t^2 = Lu$.

Левая часть неравенства в условии 1) отличается лишь знаком от первого собственного значения дифференциального оператора Lu при граничном условии $u|_\Gamma = 0$. Если условие 1) выполнено, то всегда можно подобрать h_k и l, удовлетворяющие условиям 2) и 3).

А. Ф. Филлипов

8674. Смешанная задача для одного типа уравнений в частных производных. Быховский Э. Б., Вестн. Ленингр. ун-та № 19, 1956, 55—65

В статье рассматривается задача: для уравнения

$$(\partial/\partial x + a_1\partial/\partial t)\ldots(\partial/\partial x + a_m\partial/\partial t)(\partial/\partial x - b_1\partial/\partial t)\ldots$$
$$\ldots(\partial/\partial x - b_n\partial/\partial t)u(x, t) = 0$$

найти в полосе $0 \leqslant x \leqslant 1$ $m+n$ раз непрерывно дифференцируемое решение, если $u, \ldots, u_t^{(m+n-1)}{}_{m+n-1}$ заданы при $t = 0$, $u, \ldots, u_{x^{n-1}}^{(n-1)}$ — при $x = 1$, $u, \ldots, u_{x^{m-1}}^{(m-1)}$ при $x = 0$; $a_k > 0$, $b_s > 0$, $a_k \neq a_{k'}$, $b_s \neq b_{s'}$; $k, k' = 1, \ldots, m$; $s, s' = 1, \ldots, n$; $k \neq k'$, $s \neq s'$.

Доказывается, что

1) если каждая функция, заданная на $t = 0$, $x = 0$, $x = 1$, представляющая k-ю производную искомого решения, непрерывно дифференцируема $m+n-k$ раз вдоль той части контура, на котором она задана, то существует единственное решение задачи,

2) если среди a_k или b_s есть совпадающие, то для существования решения в $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$ необходимо, вообще говоря, требовать от граничных и начальных функций наличия $N(T)$ производных, причем $N(T) \to \infty$ при $T \to \infty$. В статье рассматривается также задача, когда при $x = 0$ и $x = 1$ заданы некоторые линейные комбинации искомой функции и ее производных.

В. П. Михайлов

8675. Решение расщепляемой матричной системы телеграфных уравнений в случае включенных синусоидальных напряжений. Риекстыньш Э. Я., Zinātniskie raksti. Latv. univ., Уч. зап. Латв. ун-та, 1956, **8**, № 2, 21—38 (рез. лат.)

Рассматривается смешанная задача матричной системы телеграфных уравнений

$$du/dx + L\,di/dt + Ri = 0, \quad di/dx + C\,du/dt + Gu = 0 \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами в области $0 < x < l$, $0 < t < T$ при условиях вида

$$u(x, 0) = i(x, 0) = 0 \quad (0 < x \leqslant l)$$

и

$$u(0, t) = \begin{Vmatrix} v_1^{(1)}\sin\delta_1 t + v_1^{(2)}\cos\delta_1 t \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n^{(1)}\sin\delta_n t + v_n^{(2)}\cos\delta_n t \end{Vmatrix}, \quad u(l, t) = 0 \ (t > 0).$$

чадача формально решается методом преобразования Лапласа, причем используется схема, изложенная автором ранее (Прикл. матем. и механика, 1952, **16**, № 3, 375—381). В частности, обратное преобразование Лапласа реализуется при помощи специальных функций

$$cb_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon) \quad \text{и} \quad sb_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon),$$

введенных автором (РЖМат, 1953, 309); при этом дополнительно предполагается расщепляемость системы (1), что заключается в условии возможности одновременного приведения матриц LC, RC, LG и RG к диагональному виду при помощи одной и той же матрицы. Указывается также предельный случай задачи при $l \to \infty$.

Далее рассматриваются обобщенные решения системы (1). Потребность в таковых возникает ввиду наличия разрывов первого рода на характеристиках у вышеуказанных решений системы (1). Эти разрывы характеризуются равенствами вида $L\,\Delta i = \Delta u\,dt/dx$, $C\,\Delta u = \Delta i\,dt/dx$. Доказывается, что вышеуказанные решения являются обобщенными решениями как по С. Л. Соболеву, так и по А. Н. Тихонову и А. А. Самарскому (РЖМат, 1956, 2213).

Наконец, рассматриваются асимптотические представления полученных решений. Библ. 12 назв.

Н. А. Бразма

8676. О некоторых возможностях решения системы телеграфных уравнений преобразованием Лапласа в случае сложного провода. Риекстыньш Э. Я., Zinātniskie raksti. Latv. univ., Уч. зап. Латв. ун-т, 1956, **8**, № 2, 49—53 (рез. лат.)

Рассматривается система телеграфных уравнений

$$-\partial u_1/\partial x = R_1 i_1 + L_1\,\partial i_1/\partial t, \quad -\partial i_1/\partial x = G_1 u_1 + C_1\,\partial u_1/\partial t \quad (0 < x < l_1,\ t > 0)$$

$$-\partial u_2/\partial x = R_2 i_2 + L_2\,\partial i_2/\partial t, \quad -\partial i_2/\partial x = G_2 u_2 + C_2\,\partial u_2/\partial t \quad (l_1 < x < l,\ t > 0)$$

при условиях вида

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = i_1(x, 0) = i_2(x, 0) = 0 \quad (x > 0),$$
$$u_1(0, t) = v(t), \quad Q_1(d/dt)\,u_2(l, t) = Q_2(d/dt)\,i_2(l, t) \quad (t > 0),$$
$$u_1(l_1, t) = u_2(l_1, t), \quad i_1(l_1, t) = i_2(l_1, t),$$

где Q_1 и Q_2 — многочлены. Задача соответствует процессу в сложном проводе. Формальное решение получено методом преобразования Лапласа (реф. 8675). Решение имеет смысл наложения бегущих волн.

Ставится вопрос: нельзя ли заменить с малой погрешностью сложный провод таким простым проводом, параметры которого являются взвешенными средними значениями данных параметров. Ответ, и притом положительный, дается на этот вопрос лишь на конкретном примере.

Н. А. Бразма

8677. Проблема периодичности для псевдоаналитических функций. Проттер (The periodicity problem for pseudoanalytic function. Protter M. H.), Ann. Math., 1956, **64**, № 1, 154—174 (англ.)

Класс решений системы $w_{\bar{z}} - Aw - B\bar{w} = 0$, $w = u + iv$, $w_{\bar{z}} = (w_x + iw_y)/2$ обозначается через $\mathfrak{Q}(A, B)$. Для функции $w \in \mathfrak{Q}(A, B)$. Берсом была предложена операция дифференцирования (Bers., L. РЖМат, 1957, 390К), которая приводит к некоторой функции w класса $\mathfrak{Q}(A_1, B_1)$. Пара (A_1, B_1) называется последователем пары (A, B), а класс $\mathfrak{Q}(A_1, B_1)$ — классом производных класса $\mathfrak{Q}(A, B)$. Это дифференцирование может быть продолжено до бесконечности, приводя на n-ом шаге к классу $\mathfrak{Q}(A_n, B_n)$. Проблема периодичности состоит в следующем: будет ли $\mathfrak{Q}(A_n, B_n) = \mathfrak{Q}(A, B)$ при некотором конечном n? Наименьшее такое n называется минимальным периодом класса $\mathfrak{Q}(A, B)$; его обозначаем через $N = N(\mathfrak{Q}(A, B))$. В работе показано, что существует такая аналитическая функция b (в действительной области), определенная в некоторой окрестности начала координат, что $N(\mathfrak{Q}(0, b)) = \infty$. Далее показано, что для любого $n > 0$ существует такая ана-

литическая функция b (в действительной области) в некоторой окрестности начала, что $N(\Omega(0, b)) = n$. Для доказательства автор сначала выводит необходимое и достаточное условие того, чтобы $N(\Omega(A, B)) = n$. Потом показывается, что можно так подобрать коэффициенты разложения b в степенной ряд в окрестности начала, чтобы полученные условия удовлетворялись при данном n или не удовлетворялись ни при каком конечном $n > 0$ соответственно. Метод доказательства элементарен, но рассуждения вообще говоря, приходится делать достаточно сложные. В заключение ставятся две нерешенные задачи. Так как понятие периодичности эквивалентно понятию включения системы уравнений эллиптического типа в цикл по Маркушевичу (см. И. Г. Петровский, Успехи матем. наук, 1946, 1, вып. 3—4, 44—70), то результаты являются одновременно ответом на некоторые вопросы, поставленные в названной работе И. Г. Петровского. Б. Боярский

8678. Формальные степени и степенные ряды. **Берс** (Formal powers and power series. Bers Lipman), Communs Pure and Appl. Math., 1956, 9, № 4, 693—711 (англ.)

В предположении, что порождающая пара F, G класса (F, G)-псевдоаналитических функций (РЖМат, 1957, 390К) удовлетворяет условию Гельдера, построены так называемые формальные положительные и отрицательные степени $Z_n(a, z, \zeta)$ $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ т. е. (F, G)-псевдоаналитические функции переменного z, удовлетворяющие условиям $Z_n(a, z, \zeta) \sim a(z-\zeta)^n$ при $z \to \zeta$

$$Z_n(a, z, \zeta) = O(|z|^n), \quad \text{когда} \quad |z| \to \infty.$$

Показано, что (F, G) — псевдоаналитическая функция $w(z)$, определенная в круге $|z-\zeta| < R$, допускает единственное разложение в ряд вида $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(a_n, z, \zeta)$, равномерно сходящийся внутри круга $|z-\zeta| < \theta R$, при некотором $\theta > 0$. Число θ зависит от свойств последовательности предшествующих и последующих пар пары F, G, по которым определяется интегрирование и дифференцирование (F, G) — псевдоаналитических функций. Указаны некоторые достаточные условия для того, чтобы $\theta = 1$. При более сильных ограничениях на порождающую пару F, G теорема о разложении имеется в более ранних работах самого автора и И. Н. Векуа (если производные порождающей пары $\in L_p$, $p > 2$). Здесь существенно, что предполагается лишь, что (F, G) удовлетворяют условию Гёльдера. Как следствие получена следующая теорема: Пусть в уравнении

$$a_{11}\Phi_{xx} + 2a_{12}\Phi_{xy} + a_{22}\Phi_{yy} + a_1\Phi_x + a_2\Phi_y + a_0\Phi = 0, \qquad (*)$$

эллиптического типа, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, коэффициенты a_{ij} непрерывны по Гёльдеру и a_i принадлежат L_p, $p > 2$, в круге K: $x^2 + y^2 < R$. Тогда для достаточно малых R уравнение $(*)$ обладает фундаментальной системой решений в K. Последовательность Φ_n решений уравнения $(*)$ называется фундаментальной в K, если в каждом круге

$$K_0(x_0, y_0; r) \subset K, \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2 < r^2,$$

любое решение уравнения $(*)$ допускает разложение в ряд вида

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sum_{k=0}^{(n)} \beta_{nk}\Phi_k = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \sum_{k=0}^{(n)} \beta_{nk}\Phi_k, \qquad (**)$$

где (n) — наименьшее четное число $\geqslant n$, коэффициенты β_{nk} зависят лишь от x_0, y_0 и $\Phi(z) - S_N = O(\rho^{N+1})$ при $\rho \to 0$; ряд $(**)$ сходится равномерно для $\rho < \lambda$ при некотором $\lambda > 0$. Б. Боярский

8679. Касательные преобразования. Рашайский (О трансформаци j ама додира. Рашајски Боривоје), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1953, 5, № 3—4, 79—90 (серб.; рез. франц.)

Автор в некотором смысле полемизирует с Курантом и Гильбертом. Как известно, в § 6 книги Куранта и Гильберта „Методы математической физики", т. II, М. — Л., 1951, стр. 34—39, посвященном преобразованию Лежандра, приведен ряд примеров вида

$$pq = 1, \quad F(p, q) = 0; \quad xp + yq - z = f(p, q),$$

для которых неприменимо преобразование Лежандра.

Автор, опираясь на работу Ермакова об интегрировании уравнений в частных производных первого порядка с одной неизвестной функцией, путем применения касательных преобразований строит полные интегралы вышеприведенных уравнений. В связи с этим автор подчеркивает неудовлетворительность объяснений Куранта и Гильберта о причинах неприменимости преобразования Лежандра к вышеприведенным уравнениям. Для подтверждения этого автор рассматривает уравнение вида

$$(z - yq)\, p/y = 1$$

и из него делает вывод о том, что исчезновение выражения $rt - s^2 = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2$, приведенного в книге Куранта и Гильберта, не имеет существенного значения для преобразования, переводящего исходное уравнение в функциональное уравнение, не зависящее от производных новой функции.

Автор ставит и решает следующие задачи:

1. Найти общую форму дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, которое преобразуется в функциональное уравнение, не зависящее от производных новой функции.

2. Когда данное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка допускает касательные преобразования, переводящие его в функциональное уравнение, не зависящее от производных новой функции.

3. Изучить связь, которая существует между свойствами касательных преобразований и канонических свойств интегралов характеристик, которые могут быть получены путем применения теоремы Якоби.

О. А. Жаутыков

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

8680. Дифференциальные уравнения задач гидродинамики. Митринович (Sur l'équation différentielle d'un problème d'hydrodynamique. Mitrinovitch Dragoslav S.), C. R. Acad. Sci. Paris, 1955, 241, 1708—1710 (франц.)

В работе дается метод решения уравнения с двумя неизвестными функциями $w(z)$ и $v(z)$

$$w^{-1}\, d^2w/dz^2 = h_3 v^{-1}\, d^2v/dz^2 + h_2/v^2 + h_1,$$

h_3, h_2, h_1 — постоянные, а $w = T(v)$ — неизвестная функция. Дан также вид решения для случая $h_3 = 1$, $h_2 = 0$.

G. C. Mc Vittie

Перевод из Math. Revs., 1956, 17, № 6, 618

8681. О приближенном решении задач одномерной нестационарной фильтрации в пористой среде. Баренблатт Г. И., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, вып. 3, 351—370

См. РЖМех, 1955, 6204.

8682. Один общий случай интегрируемости уравнений Кирхгофа. Харламов П. В., Тр. Донецк. индустр. ин-та, 1957, **20**, 5—9

Рассматриваются уравнения Кирхгофа для движения твердого тела в идеальной, однородной, несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности и не имеющей завихрений. Автор подбирает такое выражение кинетической энергии всей системы (жидкость и тело) и налагает такое условие на радиус-вектор, проведенный из центра тяжести вытесненного телом объема жидкости в центр тяжести самого тела, что в результате получается четвертый интеграл уравнений движения, необходимый для интегрирования уравнений движения в квадратурах. Найденный четвертый интеграл является некоторым обобщением четвертого интеграла, указанного А. М. Ляпуновым. Для одного еще более частного вида найденного интеграла автор вкратце описывает ход вычислений, приводящих к квадратурам.

В. В. Добронравов

8683. О дифференциальных уравнениях для функций напряжений анизотропного упругого тела. Аржаных И. С., Бондаренко Б. А., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 18, 35—41

Составлены 6 дифференциальных уравнений движения упругого анизотропного континуума, которые содержат 15 произвольных функций.

Выбирая эти произвольные функции, можно образовать различные модификации дифференциальных уравнений движения. Компоненты вектора смещения выражаются через производные 15 функций, а 6 функций вообще в них не входят.

Конкретных данных о применении полученных дифференциальных уравнений не приводится.

Л. Н. Тер-Мкртичьян

8684. Установившиеся колебания в системах, имеющих произвольные восстанавливающие и произвольные тормозящие силы. Клоттер (Steady state vibrations in systems having arbitrary restoring and arbitrary damping forces. Klotter K.), Sympos. Nonlinear Circuit Analysis, New York, 1953, Brooklyn, N. Y., Polytechn. Inst., 1953, 234—257 (англ.)

Приводятся некоторые новые результаты применения метода Ритца — Галеркина для изучения вынужденных колебаний нелинейных систем.

Дается несколько графиков интегральных кривых для различных случаев и необходимый список литературы.

C. E. Langenhop

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 591

8685. К теории оптимальных процессов. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С., Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 1, 7—10

В работе впервые дается общий подход к изучению так называемых оптимальных процессов регулирования, получивших в последнее время большую важность. Найдены необходимые условия оптимальности управления и достаточные условия в малом в предположении, что оптимальный вектор лежит строго внутри допустимой области. В общем случае высказывается принцип, проверенный, как пишут авторы, на ряде частных случаев. Вопрос о существовании в рассматриваемом классе функций оптимального управления остался открытым.

Ю. И. Неймарк

8686. Свертывание вихревой пелены. Стерн (The rolling-up of a vortex sheet. Stern Marvin), Z. angew. Math. und Phys., 1956, **7**, № 4, 326—342 (англ.; рез. нем.)

Рассматривается нестационарная автомодельная задача о свертывании полубесконечной вихревой пелены при плоскопараллельном течении идеальной несжимаемой жидкости.

За комплексный потенциал в начальный момент времени берется потенциал обтекания полубесконечной пластинки.

После введения новых (безразмерных) переменных вида $\xi_1 = x/at^n$, $\xi_2 = y/at^n$ (где a, n — некоторые постоянные) в силу автомодельности время t исключается из уравнения и граничных условий. Задача сводится к нахождению аналитической функции (комплексного потенциала) со скачком на кривой, дающей форму вихревой поверхности. Вид вихревой кривой не известен, и его также следует определить. Известно, что при $\xi_1 \to \infty$ вихревая кривая асимптотически приближается к прямой $\xi_2 = 0$. На этой вихревой кривой заданы два граничных условия для потенциала, которые следуют из условия непрерывности давления при переходе через вихревую поверхность и условия скольжения, т. е. вектор скорости частиц жидкости в любой момент времени лежит в касательной плоскости к вихревой поверхности.

Задача является нелинейной в силу нелинейности граничных условий. В работе дается приближенное аналитическое представление вихревой кривой, имеющей в окрестности начала координат форму спирали.

В. П. Коробейников

8687. Случайные интегралы уравнения диффузии. Кампе-де-Ферье (Intégrales aléatoires de l'équation de la diffusion. Kampé de Fériet Joseph), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 14, 929—932 (франц.)

Уравнение $\partial s/\partial t - \partial^2 s/\partial x^2 = -\partial(us)/\partial x$ описывает диффузию в жидкости при ламинарном течении (t — время, x — абсцисса слоя, $u(x, t)$ — скорость, $s(x, t)$ — концентрация диффундирующей материи). Если $u = \text{const}$, то s (при соответствующих начальных данных) выражается явной формулой. Если же u — случайное переменное с заданной функцией распределения, то s определяется как некоторая случайная концентрация. Выясняется, что условия, обеспечивающие существование s, не обеспечивают существование $\overline{s}$ (среднее значение) по всей области течения. Указываются условия, обеспечивающие существование $\overline{s}$.

А. А. Дезин

8688. Об одной теореме единственности для уравнения Максвелла-Минковского. Манарини (Un teorema di unicità per le equazioni di Maxwell-Minkowski. Manarini Anna Marisa), Bol. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 3, 440—444 (итал.)

Для системы уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -c^{-1}\partial \mathbf{B}/\partial t$$
$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = c^{-1}\partial \mathbf{D}/\partial t + \mathbf{I}c^{-1}$$
$$\mathbf{D} + c^{-1}[\mathbf{vH}] = \varepsilon(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{vB}])$$
$$\mathbf{B} - c^{-1}[\mathbf{vE}] = \mu(\mathbf{H} - c^{-1}[\mathbf{vD}])$$
$$\mathbf{I} - \rho\mathbf{v} = \frac{\gamma}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}] - \frac{1}{c}(\mathbf{vE})\frac{\mathbf{v}}{c}\right)$$

($\beta = v/c$) доказана теорема единственности смешанной задачи при условии, что $v < c/n$ ($n^2 = \varepsilon\mu$).

И. С. Аржаных

8689. Об использовании полиоператоров. Борнеяс, Креммер (Asupra utilizării polioperatorilor. Borneas M., Kremmer J.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR. Baza Timişoara Ser. 1, 1955, **2**, № 1—4, 51—58 (рум.; рез. русск., франц.)

Авторы замечают, что релятивистские уравнения квантовой механики Дирака и Паули допускают представление в виде

$$A\psi = 0,$$

где A — матрица, состоящая из соответствующих операторов дифференцирования первого порядка, ψ — матрица-столбец.

И. С. Аржаных

8690. О цепных системах мезонного поля. Аржаных И. С., Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 3, 351—354

Для уравнений мезонного поля, приводящихся к уравнениям вида

$$\Delta\psi_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2} - k^2 \sum_{p=1}^{N} a_{ip}\psi_p = F_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

и др., даются формулы, выражающие значения решений в точках области, при помощи значений некоторых комбинаций искомых функций и их производных — на границе области. В. Д. Купрадзе

См. также: 8431, 8599, 8718, 8721, 8729, 8763, 8760, 8843, 8863, 8864, 8904

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

8691. Числа Стирлинга как многочлены. Паркер (Stirling's numbers as polinomials. Parker R. V.), Tohoku Math. J., 1956, **8**, № 2, 181—182 (англ.)

Вводятся числа $C_{s,m}$, определяемые реккурентной формулой: $C_{s,m} = (2m-s-1)\,C_{s-1,m-1} + (s+1)\,C_{s,m-1}$ при этом, $C_{s,m} = 0$, если $s \geqslant m$; $C_{0,m} = 1$. При помощи чисел $C_{s,m}$ легко вычисляются, по данным в статье формулам, числа Стирлинга и 1-го и 2-го рода.

В. А. Голубев

8692. Условия, при которых сходимость последовательности вытекает из сходимости возмущенной последовательности. Танци-Каттабьянки (Criteri di inversione per la convergenza delle successioni dalla convergenza delle successioni perturbate. Tanzi Cattabianchi Luigi), Riv. mat. Univ. Parma, 1955, **6**, № 3—5, 375—388 (итал.)

Наряду с последовательностью вещественных чисел $\{x_n\}$ и последовательностью их средних арифметических $\{X_n\}$ рассматривается „возмущенная" последовательность чисел $v_n = x_n + \beta_n X_n$, где $\{\beta_n\}$ есть также данная последовательность вещественных чисел. Из $v_n \to 0$ вообще не вытекает $x_n \to 0$. Однако, при дополнительных условиях такое заключение сделать можно. Например,

I. (Мерсер). Из $v_n \to 0$ и $\beta_n = \beta > -1$ следует $x_n \to 0$.

II. (Виджарайягхаван). Из $v_n \to 0$ и $-1 < \underline{\lim}\,\beta_n \leqslant \overline{\lim}\,\beta_n < +\infty$ следует $x_n \to 0$.

Вопросами этого же рода занимались многие ученые (Харди, Карамата, сам автор и др.). В работе устанавливается 13 подобных теорем. Содержащиеся в них условия весьма разнородны: они налагают ограничения то на числа β_n (как в теоремах I и II), то на числа v_n и даже на сами x_n. Г. М. Фихтенгольц

8693. Присоединенные рекуррентные последовательности. Цеккендорф (Les suites récurrentes adjointes. Zeckendorf E.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1956, **25**, № 12, 636—646 (франц.)

Выводятся соотношения для последовательностей $\{t_x\}$, удовлетворяющих уравнению вида $mt_x + nt_{x+1} = t_{x+2}$ при различных начальных условиях. Все эти соотношения не новы; так, если λ и μ — корни уравнения $m + nz = z^2$, то при $\lambda \neq \mu$ тождества (5) и (6), выражающие, по автору, „новые общие свойства рекуррентных последовательностей", немедленно следуют из тождеств: $(n^2 + 4m)^s = (\lambda - \mu)^{2s} = (2\lambda - n)^{2s}$.

А. И. Маркушевич

8694. О расширении назад положительно определенных последовательностей моментов Гамбургера. Райт (On the backward extension of positive definite Hamburger moment sequences. Wright Fred M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 3, 413—422 (англ.)

Рассматривается положительно-определенная последовательность моментов Гамбургера $\{\mu_n\}$ (n=0, 1, 2, ...), и находятся условия, когда к последовательности можно прибавить в начале два члена, т. е. когда последовательность

$$\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 (= \mu_0), \lambda_3 (= \mu_1), \ldots\}$$

также будет последовательностью моментов. Условия находятся как для определенной последовательности моментов Гамбургера, т. е. когда они определяют однозначно весовую функцию, так и для неопределенной последовательности, когда весовая функция определяется неоднозначно, и выражаются в некоторых условиях налагаемых на

$$X_p(z) = \frac{A_p(z)}{a_0 a_1 \ldots a_p}$$

и

$$Y_p(z) = \frac{B_p(z)}{a_0 a_1 \ldots a_p} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $A_p(z)$ и $B_p(z)$ — числитель и знаменатель p-й подходящей дроби разложения в непрерывную дробь

$$\frac{a_0^2}{z+b_1} - \frac{a_1^2}{z+b_2} - \frac{a_2^2}{z+b_3} \ldots$$

формального степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{z^{n+1}}$$

(Стилтьес, Исследования о непрерывных дробях, Харьков, 1936).

Теорема 2.1 является обобщением основного результата Уолла (Wall H. S., Trans. Amer. Math. Soc., 1929, **11**, 91—116). Б. М. Гагаев

8695. Матрицы преобразования последовательности в ряд, сохраняющие сходимость. Геррин (Conservative sequence-to-series transformation matrices. Gerrish F.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 1, 60—72; Indagationes math., 1957, **19**, № 1, 60—72 (англ.)

Автор называет бесконечную матрицу $H = (h_{nk})$ φ-матрицей (η-матрицей), если преобразование $v_n = \sum_k h_{nk} s_k$ переводит каждую сходящуюся (к пределу s) последовательность $\{s_k\}$ в сходящийся (к сумме s) ряд $\sum v_n$. Изучается класс произведений матриц, сомножителями которых служат φ-или η-матрицы, а также матрицы, сохраняющие сходимость при преобразовании последовательности в последовательность, или ряда в последовательность, или ряда в ряд. Кроме того, для тех же классов матриц изучается справедливость закона ассоциативности умножения в том случае, когда соответствующие произведения всегда существуют.

Результаты автора частью покрываются, частью дополняются результатами Рамануджана (РЖМат, 1957, 6449). Г. Ф. Кангро

8696. Пересечение максимальных матричных колец Кёте — Тёплица. Аллен (The intersection of

the Köthe-Toeplitz maximal matrix rings. Allen H. S), Quart. J. Math., 1956, 7, № 28, 277—279 (англ.)

Пространство последовательностей α называется совершенным, если α совпадает со своим вторым дуальным пространством α^{**} (РЖМат, 1957 4931). Известно, что кольцо $\sum(\alpha)$ всех матриц, преобразующих совершенное пространство α в себя, является максимальным (Cooke R. G., Linear Operators, Macmillan and Co., London, 1953, 315; РЖМат, 1955, 5169 К). Доказывается, что $A \in \bigcap \sum(\alpha)$ (α пробегает множество всех совершенных пространств последовательностей) тогда и только тогда, когда $A = B + D$, где B — матрица с ограниченными строками и столбцами, а D — диагональная матрица с ограниченным множеством диагональных элементов.

Пусть $G(\alpha)$ — множество тех матриц кольца $\sum(\alpha)$, которые обладают двусторонней обратной в $\sum(\alpha)$. Как показал автор (Proc. London Math. Soc., 1952, **54**, 111—134), пересечение $\bigcap G(\alpha)$ представляет собой группу относительно умножения матриц. В реферируемой статье устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы $A \in \bigcap G(\alpha)$. Г. Ф. Кангро

8697. Некоторое обобщение теоремы Тейлора. Гудстейн (A generalisation of Taylor's theorem. Goodstein R. L.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 336, 133—134 (англ.)

Доказана следущая теорема: Если $f(t)$ дифференцируема $n+r+1$ раз на $a \leqslant t \leqslant x$, тогда существует ξ, лежащее между a и x такое, что

$$\frac{d^r}{dx^r}\left\{\left[f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)-\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)-\ldots-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)\right]\Big/(x-a)^n\right\}=\frac{r!}{(n+r)!}f^{(n+r)}(\xi).$$

В. К. Захаров

8698. Представление функции Дирака и теорема аппроксимации Вейерштрасса. Кастольди (Una rappresentazione della funzione di Dirac e il teorema di approssimazione di Weierstrass. Castoldi Luigi), Atti Accad. Ligure, 1952, **9**, 314—318 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 1, 942.

8699. Замечание относительно формулы $v.p.\frac{1}{x}\delta = -\frac{1}{2}\delta'$. Гонсалес-Домингес, Скарфьельо (Nota sobre la formula

$$v.p.\frac{1}{x}\cdot\delta=-\frac{1}{2}\delta'.$$

González Domínguez A., Scarfiello R.), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, **17**, 53—67 (исп.)

Пусть $g_n(x)$ — некоторое сингулярное ядро:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g_n(x)\,dx=1,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}|g_n(x)|\,dx<M;$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_I|g_n(x)|\,dx=0 \quad \text{и} \quad h_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_n(x)\,dx}{x-y},$$

где интервал I не содержит начала координат.

Рассматривается последовательность $K_n(x)=g_n(x)\times h_n(x)$.

Теорема. Для каждой ограниченной функции $f(x)$, определенной на $(-\infty, +\infty)$ и непрерывной в начале координат, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xK_n(x)f(x)\,dx=\frac{1}{2}f(0).$$

Если дополнительно считать, что $f(x)$ имеет непрерывную производную в начале координат, то имеет место также равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)K_n(x)\,dx=\frac{1}{2}f'(0).$$

Теорема. Если функция $f(x)$ интегрируема на $(-\infty, +\infty)$, непрерывна и с ограниченным изменением в окрестности начала координат, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\sin nx}{x}(1-\cos nx)\,dx=\frac{1}{2}f(0).$$

Если потребовать, дополнительно, что $f(x)$ имеет непрерывную производную с ограниченным изменением в окрестности начала координат, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\sin nx}{x}\cdot\frac{1-\cos nx}{x}\,dx=\frac{1}{2}f'(0).$$

Далее приводятся некоторые обобщения этих формул.

В. В. Немыцкий

8700. Остаток в тауберовых теоремах. II. Литкенс (The remainder in Tauberian theorems. II. Lyttkens Sonja), Arkiv mat., 1957, **3**, № 4, 315—349 (англ.)

Работа является продолжением и развитием работы под тем же заглавием (РЖМат, 1955, 4508), в которой выяснялись условия для того, чтобы из соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x-u)\,dF(u)=O(e^{-\gamma x}) \quad (x\to+\infty,\ \gamma>0), \quad (1)$$

где $\Phi(x)$ — ограниченная функция и $F(x)$ — функция с ограниченной вариацией, следовало соотношение

$$\Phi(x)=O(e^{-\theta\gamma x}). \quad (2)$$

Реферируемая статья состоит из трех глав. В первой главе результат (1) — (2) обобщается на функции, убывающие медленнее экспоненциальных. Одновременно показывается, что можно ослабить ограничения на представление Фурье — Стилтьеса $f(\xi)$ функции $F(x)$.

Во второй главе собраны результаты, относящиеся к условиям существования соотношения (1).

В третьей главе предполагается, что условие (2) выполнено и получен аналог результата Винера.

Основная часть работы посвящена изучению условий, необходимых для доказательства соотношения (2). Основным требованием является аналитичность функции $1/f(\xi)$. Это требование уже встречалось во всех теоремах, говорящих о достаточных условиях. Если $F(x)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{1/2+\delta}\,|dF(x)|<\infty$$

для некоторого $\delta>0$, то для справедливости (2) необходимо, чтобы $1/f(\xi)$ была аналитической в некоторой полосе, расположенной под действительной ссью.

В конце работы показывается на примере, что полученная в первой части работы оценка константы θ не может быть улучшена. Б. М. Левитан

8701. Полнота стационарных состояний рассеяния. I. Кампен (Completeness of stationary scattering states. I. Kampen van N. G.), Physica, 1955, **21**, 127—136 (англ.)

Пусть $\varphi(r) \in L^2(0, \infty)$ и пусть $\eta(k)$ — заданная функция на $0 < k < \infty$. Для того чтобы для любой функции φ существовала функция $C(k)$ такая, что

$$\varphi(r) = \int_0^\infty C(k) \sin(kr + \eta(k))\, dk \qquad (0 < r < \infty)$$

достаточно, чтобы $S(x) = \exp(2i\eta(x))$ имела голоморфное и ограниченное аналитическое продолжение в верхней половине комплексной плоскости z. Автор показывает, что это условие не является необходимым (опровергая, таким образом, более раннее утверждение Гейзенберга (Heisenberg, Z. Naturf, 1946, **1**, 608) и Ху (Hu, Phys. Rev., 1948, **74**, 131), и дает необходимые и достаточные условия. Он замечает, однако, что сформулированнсе выше условие является необходимым, если постулируется каузальное условие. N. Levinson

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 10, 1018.

8702. Полнота стационарных состояний рассеяния. II. Кампен (Completeness of stationary scattering states. II. Kampen van N. G.), Physica, 1955, **21**, 579—588 (англ.)

В первой части (реф. 8071) рассматривалась полнота $\sin(kr + \eta(k))$ в $L^2(0, \infty)$. В этой заметке автор устанавливает, что для полноты достаточно, чтобы $S(x) = e^{2i\eta(x)}$ можно было записать в виде $p_+(x)/p_-(x)$, где $p_+(x)$ — граничное значение функции $p_+(z)$, голоморфной в верхней комплексной полуплоскости, а $p_-(x)$ — то же самое в нижней полуплоскости. Более частный случай рассматривается подробнее. N. Levinson

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 477.

8703. Применение теории конечных разностей к вычислению полиномов. Грейфф-Браво (Aplicacion de la teoria de diferencias finitas al calculo de polinomios. Greiff Bravo Luis de), Rev. mat. elementales, 1955, **4**, № 1, 1—12 (исп.)

Для всякой последовательности $\{u_i\}$ действительных чисел положим

$$\Delta_1 u_i = u_{i+1} - u_i, \quad \Delta_n u_i = \Delta_{n-1} u_{i+1} - \Delta_{n-1} u_i.$$

Пусть $f(x) = a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + \ldots + a_{s-1} x + a_s$. Для действительных x_0 и h положим $f_p = f(x_0 + ph)$. Используя соотношение $\Delta_{s+1} f_p = 0$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, автор устанавливает формулу

$$f_{p+1} = \binom{p+1}{1} f_p - \binom{p+1}{2} f_{p-1} + \binom{p+1}{3} f_{p-2} - \ldots + (-1)^p f_0,$$

которая дает простой способ вычисления значений полинома $f(x)$. Дается несколько числовых примеров. S. Marcus

8704. Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений. Ацель Я., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 3, 3—68

Работа состоит из предисловия и двух глав. В предисловии дается краткий перечень известных результатов о решениях различных функциональных уравнений. В первой главе даются некоторые методы нахождения решений и теоремы общего характера о существовании решений следующих функциональных уравнений:

$$f(x+y) = G[f(x), f(y)],$$
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = G[f(x), f(y)],$$
$$f(ax+by+c) = G[f(x), f(y)],$$
$$f[F(x, y)] = G[f(x), f(y)],$$
$$f(x+y) = G[f(x), y],$$
$$H[f(x+y), f(x-y), f(x), x, y] = 0,$$
$$H[f(x+y), f(x-y), f(x), f(y)\ x, y] = 0.$$

Намечаются методы решения более общих уравнений:

$$f(ax+by+c) = G[f(x), f(y), x, y]$$

и

$$f[F(x, y)] = G[f(x), x, y].$$

Вторая глава посвящена различным применениям функциональных уравнений. Излагается решение с помощью функциональных уравнений шести задач из разных областей математики (геометрическая теория групп, векторная алгебра, неевклидова геометрия и теория вероятностей). При этом применяемые уравнения одного и многих переменных являются уравнениями типа, рассмотренного в первой главе, и непосредственно обобщают эти уравнения. Э. А. Чернышенко

8705. Метод функционалов в приложении к полиномам Н. И. Ахиезера. Вороновская Е. В., Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 5, 727—730

Исследуются полиномы паспорта $[n, n-1, 0]$ (РЖМат, 1956, 2119). Приводится система дифференциальных уравнений, интегралами которой являются коэффициенты этих полиномов, зависящие от двух переменных параметров. Устанавливается связь между полиномами автора и рассмотренными Н. И. Ахиезером (Изв. Физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те, 1928, **3**, 1—69) полиномами n-й степени с тремя заданными старшими коэффициентами, наименее уклоняющимися от нуля на сегменте $[-1,1]$. Доказательства не приводятся. С. И. Зуховицкий

8706. Задача о крайней точке пересечения оси с многогранником и некоторые ее приложения. Рубинштейн Г. Ш., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 4, 206—207

Излагаются результаты статьи автора (РЖМат, 1955, 5874). Дополнительно приводится обобщение теоремы Хаара, данное автором (РЖМат, 1957, 6469), и указывается, что задача рационального раскроя (Канторович Л. В., Математические методы в организации и планировании производства, Ленингр. ун-т, 1939) и некоторые задачи теории игр (Neumann J., Morgenstern O., Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, 1947) сводятся к задаче о крайней точке. Доказательства не приводятся. С. И. Зуховицкий

8707 К. Математический анализ. Современный подход. Гамильтон, Гамильтон (Mathematical analysis. A modern approach. Hamilton W. T., Hamilton J. R. New York, Harper and Brothers, Publischers, 1956, 379 S.) (англ.)

Книга является пособием по элементарной математике и элементарному введению в аналитическую геометрию и анализ, рассчитанным на разнообразные круги обучающихся. Содержание книги: Логика и математика. Действительные числа. Числа в алгебре. Линейные уравнения. Степени и корни. Нелинейные уравнения. Последовательности и ряды. Логарифмы. Постоянные, переменные и функции. Уравнения, таблицы и графики. Геометрические места. Поведение функций. Дифференцирование алгебраических выражений. Интегрирование алгебраических выражений. Круговые функции. Алгебра круговых функций. Полярные координаты. Комплексные числа. О современной математике.

Изложение сопровождается примерами для упражнений, в конце книги помещены числовые таблицы и алфавитный указатель терминов. П. И. Романовский

8708 К. Линейная алгебра и линейный анализ. Лихнерович (Lineare Algebra und lineare Analysis. Lichnerowicz André. Übers. aus dem Franz. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1956, 303 S.) (нем.)

Реферируемая книга состоит из двух частей: Линейная алгебра и Линейный анализ. В первой части рассматриваются линейные уравнения, евклидово и эрмитово пространства, матричное исчисление и алгебра форм, тензорное исчисление и внешняя алгебра.

Во второй части рассматриваются внешние дифференциальные формы и кратные интегралы, разложение в ряд произвольных функций, линейные функциональные операторы, интегральное исчисление. В. К. Захаров

8709 К. Курс высшей математики. Том 2. Интегральное исчисление. Гермэнеску (Curs de matematici superioare. Vol. 2. Calculul integral. Gheorm̆ănescu M. Ministerul Invăţămîntului. Bucureşti, 1956, 339 p., 12, 50 lei), Bul. bibliogr., 1956, А, № 24, 929 (рум.)

8710 К. Практикум интегрирования элементарных функций. (Неопределенные интегралы). Учебн. пособие для студ.—заочн. физ.-матем. фак. пед. ин-тов. Иваненко В. В. (Практикум інтегрування елементарних функцій. (Неозначені інтеграли). Навч. посібник для студ.-заочн. фіз.-матем. фак. пед. ін-тів. Іваненко В. В. (М-во освіти УРСР. Наук.-метод. кабінет заочн. навчання вчителів). Київ. „Рад. школа", 1956, 186 стор., безпл.) (укр.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

8711. О суммировании некоторых числовых рядов. Фомин Н. М., Тр., Куйбышевск. инж.-строит. ин-та, 1957, вып. 4, 165—172

Предложен простой способ вычисления значений функции, представленной рядом

$$\theta(c) = l_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} l_{k+1},$$

где

$$l_k = \int_1^{\infty} (\eta - 1)^{-1/2} (\eta + 1)^{k-3/2} (\eta + c)^{-k} \, d\eta,$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad c > 1.$$

Приведена таблица частных значений функции $\theta(c)$ и построен ее график. В статье имеются опечатки. М. П. Щеглов

8712. Замечание об одной задаче Перрона. Паше (Bemerkung zu einem Desideratum von Perron. Paasche Ivan), Math. Z., 1956, 66, № 1, 117—120 (нем.)

Дается решение задачи, поставленной Перроном (РЖМат, 1956, 8585), которая касается одного весьма частного вопроса определения коэффициентов некоторых степенных рядов. В. В. Немыцкий

8713. Две теоремы относительно степенных рядов над произвольным полем. Такэути (Two theorems related power series over a field. Takeuchi Yoshio), 山形大學紀要（自然科學）, Ямагата дайгаку киё (сидзэн кагаку), 1956, 3, № 4, 191—197 (англ.; рез. японск.)

Рассматриваются степенные ряды, коэффициентами которых являются элементы произвольного поля. Дается обобщение на этот случай теоремы о круговой группе (Бохнер — Мартин, функции многих комплексных переменных, Изд-во ин. лит., 1951, стр. 19) и теоремы единственности А. Картана (там же, стр. 31). Б. А. Фукс

8714. Замечание о множителях сходимости. Уолш (A note on convergence factors. Walsh C. E.). Proc. Edinburgh Math. Soc., 1956, 9, № 3, 154—156 (англ.)

Пусть $u_n \geqslant u_{n+1}$ для $n = 1, 2, \ldots$ и пусть $e_1, e_2, \ldots$ таковы, что ряд $\sum e_n u_n$ сходится. Пусть $\sum_{r=1}^{n} a_r = A_n$, где все a положительны, $\sum a_n$ расходится и $A_{n+1} = O(A_n)$. Определим E_n с помощью равенства $A_n E_n = \sum_1^n e_r$. Фукс (Fuchs, Proc. Edinburgh Math. Soc., 1942, 7, № 2, 27—30) и Карамата (Karamata J., J. London Math Soc., 1946, 21, 162—166) показали, что в случае $a_n = 1$, при некоторых дополнительных условиях, $E_n = o(1)$. В заметке приводятся дальнейшие результаты в этом направлении.

Пусть $S_n = \sum_1^{n-1} e_r u_r = S + \theta_n k_n$, где $k_n > 0$, $S_1 = 0$. Тогда, так как $e_n u_n = S_{n+1} - S_n$, то

$$E_n = \frac{1}{A_n} \sum_1^{n-1} \left(\frac{1}{u_r} - \frac{1}{u_{r+1}} \right) k_{r+1} \theta_{r+1} + \frac{k_{n+1} \theta_{n+1}}{A_n u_n}.$$

Следовательно, из теоремы Шура — Теплица получаем: Пусть $k_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда для того, чтобы для каждой последовательности (e_n), для которой $\theta_n = o(1)$ (или $O(1)$) имело место $E_n = o(1)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{A} \sum_1^{n-1} \left(\frac{1}{u_{r+1}} - \frac{1}{u_r} \right) k_{r+1} + \frac{k_{n+1}}{A_n u_n} = O(1) \quad (\text{или } o(1)).$$

Отсюда непосредственно следует, что если

$$\gamma_n = \frac{k_n}{A_n} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}} \right) \leqslant B_n - \frac{A_{n-1}}{A_n} B_{n-1}, \qquad (1)$$

где $0 < B_n < \infty$ и, если сверх этого

$$\frac{k_{n+1}}{A_n u_n} = O(1), \qquad (2)$$

то $E_n = o(1)$. Так как $A_{n+1} = O(A_n)$, то (2) выполняется, если

$$\frac{k_n}{A_n u_n} = O(1). \qquad (3)$$

Указываются три выбора k_n, при которых выполняется (1) и (3). Б. М. Левитан

8715. Об одном обобщении метода А. В. Лотоцкого суммирования расходящихся рядов. Соколин А. С. В сб.: 15-я научн. конференция Ленингр. инж.-строит. ин-та, Л., 1957, 452—456

Обобщается p-метод суммирования, предложенный А. В. Лотоцким (РЖМат, 1955, 2733). Последовательность $\{S_\nu\}$ автор называет суммируемой методом (J, k) к значению S, если

$$\Gamma(k+1)/\Gamma(n+k+1) \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu^{(n)} k^\nu s_\nu \to S \qquad (n \to \infty)$$

$(k > 0)$, числа $C_\nu^{(n)}$ определяются соотношениями:

$$\Gamma(n+x+1)/\Gamma(x+1) = \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu^{(n)} x^\nu \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

В работе сформулированы следующие теоремы:

1. Метод (J, k) регулярен.

2. Ряд, суммируемый методом Эйлера (E, q), суммируем $(J, 1/q)$ к той же сумме.

3. При любом $k>0$ метод (J, k) суммирует ряд $\sum z^n$ (в статье опечатка: пропущен показатель n) в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z<1$.

4. Метод $(J, 1/q)$ сильнее метода (E, q).

5. При любом a утверждение $s_0, s_1, s_2, \ldots, \to S(J, k)$ влечет за собой $a, s_0, s_1, s_2, \ldots \to S(J, k)$. Обратное неверно.

6. Ряд, суммируемый (J, k), суммируем $(J, k/2)$ к той же сумме. Приведено доказательство теоремы 6.

М. П. Щеглов

8716. Замечание об асимптотических рядах. Дейвис (A note on asymptotic series. Davis Harry F.), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 1, 90—95 (англ.)

Заметка посвящена некоторым вопросам алгебраической теории асимптотических рядов.

Пусть C — множество функций, являющихся асимптотическими суммами формальных степенных рядов

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \qquad (x>0),$$

и пусть L — некоторый линейный функционал в C. Назовем этот функционал асимптотически непрерывным, если из условия

$$h(x)=o(x^n) \quad \text{при } x\to 0+ \quad . \quad (h(x)\in C)$$

следует, что

$$h^*(t)=L(h(xt))=o(t^n) \quad \text{при } t\to 0+,$$

при этом не требуется, чтобы $h^*(t)$ было бы элементом C.

Автор исследует свойства асимптотически непрерывных функционалов на подпространстве $H\subset C$, которое является минимальным пространством, содержащим функции x^m $(m=0, 1, 2, \ldots)$ и e^{-xt} $(t\geqslant 0)$.

Доказывается теорема: Линейный функционал L является асимптотически непрерывным тогда и только тогда, когда

$$L_2(t)\sim\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^mL_1(m)\,t^m}{m!},$$

где $L_1(m)=L(x^m)$, $\quad L_2(t)=L(e^{-xt})$.

Д. П. Костомаров

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

8717. Нули производной видоизмененной бесселевой функции второго рода. Иидзума, Кавараба-яси (第種變形 Bessel 函數の導函數の零点について. 飯島泰蔵, 河原林京子), 電氣試驗所彙報, Дэнки сикэнсё ихо, Bull. Electrotechn. Lab., 1957, **21**, № 1, 38—42, 68 (японск.; рез. англ.)

Качественно изучаются нули производной функции $K_\nu(z)$ — модифицированной бесселевой функции второго рода, когда ν — данное положительное число (включая нуль) и z лежит в области, в которой $|\arg z|\leqslant\pi$. Показывается, что $K'_\nu(z)$ не имеет нулей, у которых $\arg z|\leqslant\pi/2$, и что общее количество нулей в паре квадрантов, в которых $\mathrm{Re}(z)$ — отрицательна, есть четное число, ближайшее к $\nu+1/2$, если $\nu+1/2$ не есть целое число; в противном случае количество нулей $\nu+1/2$.

Из резюме автора

8718. О функциях Эрмита и функциях параболического цилиндра. Риекстыньш Э. Я., Zinātniskie raksti Latv. univ., Уч. зап. Латв. ун-та, 1956, **8**, № 2, 67—72 (рез. лат.)

Предлагается частное решение уравнения Эрмита $G_\nu(z)$, являющееся обобщением функции Эрмита второго рода (при целом положительном ν) для любого значения индекса. Рассматривается также уравнение Вебера, соответствующее функции $G_\nu(z)$, которое называется автором функцией параболического цилиндра второго рода и обозначается $\mathrm{Di}_\nu(z)$. Устанавливаются некоторые свойства функций $G_\nu(z)$ и $\mathrm{Di}_\nu(z)$ и, в частности, линейная независимость функций Эрмита первого рода $H_\nu(z)$ и функции $G_\nu(z)$, а также функции параболического цилиндра $D_\nu(z)$ и функции $\mathrm{Di}_\nu(z)$ при всех значениях ν, рекуррентные соотношения для функции $G_\nu(z)$ и $\mathrm{Di}_\nu(z)$ и ряд других формул. В заключение функции Эрмита и функции параболического цилиндра исследуются при $\nu=\pm n-1/2$ и устанавливается их связь при этих значениях индекса с цилиндрическими функциями.

Примечание референта. Функция $G_\nu(z)$, введенная автором при целом положительном $\nu=n$, отличается от функции Эрмита второго рода множителем $2^n\cdot n!$, что приводит к рекуррентному соотношению и соотношению между $G'_\nu(z)$ и $G_{\nu-1}(z)$, отличным при $\nu=n$ от соответствующих соотношений, известных для функции Эрмита 2-го рода. Библ. 9 назв.

Э. Л. Блох

8719. Разложение эллиптических интегралов в ряды по полиномам Лежандра. Гонсалес (Elliptic integrals in terms of Legendre polynomials. González M. O.), Proc. Glasgow. Math. Assoc., 1954, **2**, № 2, 97—99 (англ.)

Получены формулы

$$K=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}P_n(\lambda), \qquad K'=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}P_n(\lambda),$$

$$E=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}P_n(\lambda),$$

$$E'=-4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}P_n(\lambda),$$

где $\lambda=k'^2-k^2$, а также соответствующие разложения более общего вида для неполных эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода.

Н. Н. Лебедев

8720. Предельные свойства функции Матьё. Джасуон (Limiting properties of Mathieu functions. Jaswon M. A.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, **53**, № 1, 111—114 (англ.)

Уравнение

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)y=(a+\alpha^2r^2+\beta^2r^{-2})\,y$$

подстановкой $r=(\beta/\alpha)^{1/2}e^z$ приводится к уравнению Матьё

$$\frac{d^2y}{dz^2}=(a+2q\,\mathrm{ch}\,2z)\,y,$$

где $q=\alpha\beta$. Изучается поведение периодических решений при $q\to 0$. В частности, найдены характеристические числа $a_{2n}=4n^2+O(q^2)$ $(n=1, 2, \ldots)$. Для соответствующих им и определенным образом нормированных решений типа ce_{2n} (Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа. Т. 2, ГТТИ, 1934, гл. 19) будет

$$y\to\begin{cases} I_{2n}(\alpha r) & \text{при } \beta\to 0\\ I_{2n}(\beta/r) & \text{при } \alpha\to 0\end{cases}$$

И. П. Натансон

8721. О связи функций Матьё с решениями уравнения Лапласа в параболоидальных координатах. Рабинович В. С., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 18, 139—141

В. В. Степанов заметил (Матем. сб., 1942, **11**, № 3), что если в трехмерном уравнении Лапласа перейти

к параболоидальным координатам и разделить переменные, то получившиеся обыкновенные дифференциальные уравнения будут уравнениями Матьё.

В данной заметке соответствующие выкладки проводятся более подробно. Г. И. Натансон

8722. О характеристике некоторых ортогональных функций. Аль-Салам (On a characterization of some orthogonal functions. Al-Salam W. A.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 1, 29—32 (англ.)

Наньюндиа (Nanjundiah T. S. Half-Yearly J. Mysore Univ. Sect. B, 1950, **11**) доказал, что для многочленов Лежандра $P_n(x)$ справедливо соотношение

$$(1-x^2)\,D_n(P) = n(n+1)\,\Delta_n(P),$$

где $D_n(f) = f_n'^2(x) - f'_{n+1}(x)\,f'_{n-1}(x)$,

$$\Delta_n(f) = f_n^2(x) - f_{n+1}(x)\,f_{n-1}(x).$$

Карлиц (РЖМат, 1955, 5906) показал, что это соотношение действительно характеризует многочлены Лежандра. Находятся аналогичные характеристики для некоторых ортогональных функций:

1. Если $f_n(x)$ — многочлены степени n, причем $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ и $D_n(f) = \Delta_n(f) + n(n-1)\,\Delta_{n-1}(f)$, то $f_n(x)$ — многочлены Эрмита $H_n(x)$.

2. Если $f_n(x)$ — многочлены степени n, причем $f_0(x) = 2$, $f_1(x) = x$ и $\Delta_n(f) = 2^{-2(n-1)}(1-x^2)$, то при $n > 0$, $f_n(x)$ — многочлены Чебышева $T_n(x)$, равные $2^{-(n-1)}\cos(n\cos^{-1}x)$.

3. Если $f_n(x)$ — такая система функций, что $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = 2x$ и $\Delta_n(f) = 1$, то $f_n(x)$ — многочлены Чебышева второго рода

$$Q_n(x) = \sin[(n+1)\cos^{-1}x]/(1-x^2)^{1/2}.$$

4. Если $f_n(x)$ — такие дифференцируемые функции, что $D_n(f) = x^2\Delta_{n-1}(f)$, $f_n(0) = 0$ $(n > 1)$, то

a) $f_n(x) = x^n J_n(x)$, если $f_0(x) = J_0(x)$, $f_1(x) = xJ_1(x)$, $f_2(x) = x^2 J_2(x)$.

b) $f_n(x) = x^n I_n(x)$, если $f_0(x) = I_0(x)$, $f_1(x) = xI_1(x)$, $f_2(x) = x^2 I_2(x)$,

где $J_n(x)$ и $I_n(x)$ — соответственно функции Бесселя первого рода и модифицированные функции Бесселя первого рода.

В утверждениях 2) и 4) имеются неточности в формулировках, исправленные в реферате. Б. М. Гагаев

8723. О некоторых интегралах, содержащих функции Лежандра, присоединенные функции Лежандра и полиномы Якоби. Бхонсле, Варма (On some integrals involving Legendre function, associated Legendre function and Jacobi Polynomials. Bhonsle B. R., Varma C. B. L.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1956, **48**, № 2, 103—108 (англ.)

Даются значения около 10 определенных интегралов, содержащих, кроме указанных в заглавии функций, еще множители вида x^p, $(1+x)^m$ и т. п. Например,

$$\int_{-1}^{1}(1+x)^p(1-x^2)^{-m/2}P_n^m(x)\,dx = (-1)^{m/2}\times$$
$$\times 2^{p-m+1}\Gamma(p+1)\,\Gamma(p-m+1)/[\Gamma(p+n-m+2)\times$$
$$\times\Gamma(p-m-n+1)],$$

где $p > m-1$. Основной метод исследования — используется разложение подинтегральной функции в ряд, который интегрируется почленно. Часть результатов была получена раньше другими методами. Попутно находятся также суммы некоторых рядов, содержащих указанные функции. К. Г. Энгелис

8724. Еще одно замечание о полиномах Эрмита. Дрейзин (Another note on Hermite polynomials. Drazin M. P.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 2, 89—91 (англ.)

8725. Формула для произведения двух полиномов Эрмита. Карлиц (A formula for the product of two Hermite polynomials. Carlitz L.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 1, 94—97 (англ.)

С помощью соотношения

$$u^n H_n\left(\frac{y}{u}\right) = \sum_{2r\leqslant n}\frac{n!}{r!\,(n-2r)!}(1-u^2)^r H_{n-2r}(y)$$

использованного, как указывает автор, в работе Бейли (Bailey W. N., J. Jondon Math. Soc., 1938, **13**, 202—203) доказывается равенство

$$H_m(x)\,H_n(x) =$$
$$= \frac{2^{(m+n)/2}\,m!\,n!}{(m+n)!}\,\frac{1}{t}\sum_{v=0}^{t-1}H_{m+n}\left\{x\left(1+\sec\frac{2v\pi}{t}\right)^{1/2}\right\}\times$$
$$\times\cos^{(m+n)/2}\frac{2v\pi}{t}\cos(m-n)\frac{v\pi}{t},$$

которое в дальнейшем применяется для преобразования сумм, содержащих произведения полиномов Эрмита.

Библ. 4 назв. Э. Л. Блох

8726. Об одном обобщении полиномов Лагерра. Тоскано (Una generalizzazione dei polinomi di Laguerre. Toscano Letterio), Giorn. mat. Battaglini, 1956, **84**, № 1, 123—138 (итал.)

Исследуются полиномы, определяемые при помощи формул

$$L_n^{(\alpha,\nu)}(x) = \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+n\nu+1)}{n!\,x^\alpha}\,\Delta_\nu^n\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},\quad \alpha > -1,$$

$$\Delta_\nu f(\alpha) = f(\alpha+\nu) - f(\alpha),\quad \Delta_\nu^n f(\alpha) = \Delta_\nu\left[\Delta_\nu^{n-1}f(\alpha)\right],$$

являющиеся обобщением полиномов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x) \equiv L_n^{(\alpha,1)}(x)$.

Устанавливается ряд свойств рассматриваемых полиномов (разложения по степеням переменного x, различные рекуррентные соотношения, представление через производную функцию и т. д.). Приведены некоторые разложения по обобщенным гипергеометрическим функциям. Н. Н. Лебедев

8727. Об ортогональном подмножестве полиномов Аппеля. Сингх (On the orthogonal sub-set of Appell polynomials. Singh Vikramaditya), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1956, **A22**, № 1, 26—31 (англ.)

Полиномы Аппеля $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ определяются как коэффициенты разложения

$$A(t)\,e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty}t^n P_n(x),$$

где $A(t)$ — заданная функция, регулярная в окрестности $t = 0$. К рассматриваемой совокупности полиномов принадлежат, в частности, полиномы Эрмита, Бернулли, Эйлера и др., соответствующие тому или иному специальному выбору производящей функции $A(t)$.

Дано новое доказательство известной теоремы, утверждающей, что среди множества полиномов Аппеля единственный класс ортогональных полиномов образуют полиномы Эрмита. Доказательство основывается на полученных ранее автором интегральных представлениях полиномов Аппеля (РЖМат, 1955, 5911), которые исполь-

зуются также для суммирования некоторых рядов.
Н. Н. Лебедев

8728. О некоторых рекуррентных соотношениях для полиномов Аппеля и Кампе де Ферье. Мунши. (Sur quelques relations de récurrence entre certains polynômes d'Appell et Kampé de Fériet Munschy Gilbert), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 10, 767—770 (франц.)

Рассматриваются полиномы

$$F_{mn}(\xi, \eta) = \sum_{ij} \frac{(-m-n, i+j)\,(m+1, i)\,(n+1, j)}{(1, i)\,(1, j)\,(1, i)\,(1, j)}\,\xi^i\eta^j,$$

$$E_{mn}(\xi, \eta) = \sum_{ij} \frac{(m+n+2, i+j)\,(-m, i)\,(-n, j)}{(1, i)\,(1, j)\,(1, i)\,(1, j)}\,\xi^i\eta^j,$$

$$(\gamma, 0) = 1,\ (\gamma, i) = \gamma(\gamma+1)\ \ldots\ (\gamma+i-1),$$

образующие биортогональную систему на треугольнике τ [$\xi \geqslant 0,\ \eta \geqslant 0,\ \xi+\eta \leqslant 1$]. Вводятся самосопряженные операторы $\mathfrak{A}_i = \partial_\xi A_i \partial_\xi + \partial_\xi B_i \partial_\eta + \partial_\eta B_i \partial_\xi + \partial_\eta C_i \partial_\eta + F_i$, регулярные в τ (степени r по отношению к переменным ξ и η).

Указывается способ вычисления коэффициентов разложения

$$\mathfrak{A}_i F_{mn}(\xi, \eta) = \sum_{m'n'} (a_i)^{m'n'}_{mn} F_{m'n'}(\xi, \eta), \qquad (1)$$

$$\mathfrak{A}_i E_{m'n'}(\xi, \eta) = \sum_{mn} (\alpha_i)^{mn}_{m'n'} E_{mn}(\xi, \eta).$$

Для операторов степени 0 и 1 устанавливаются соотношения, которые позволяют найти явные формулы (1), и указывается, что композиции этих операторов дают весьма общий класс операторов, для которых решается проблема разложения. В частности, в этот класс входят операторы, встречающиеся при рассмотрении уравнения Шредингера для атома с двумя электронами.
И. Г. Соколов

8729. О полиномах Ламе. Арскотт (On Lamé polynomials. Arscott F. M.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 1, 37—48 (англ.)

В начале работы предлагаются новые обозначения для полиномов Ламе и обсуждаются достоинства этих обозначений. Затем уравнение Ламе

$$\frac{d^2W}{du^2} + [h - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 u]\,W = 0$$

заменой $\operatorname{sn} u = z$ приводится к виду

$$(1-z^2)(1-k^2z^2)\frac{d^2W}{dz^2} - z(1+k^2-2k^2z^2)\frac{dW}{dz} + [h - n(n+1)k^2z^2]\,W = 0,$$

решение которого представляется в виде ряда по решениям более простого уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - (2p+1)\,z\frac{dy}{dz} + (m^2-p^2)\,y = 0. \qquad (1)$$

Предварительно рассматриваются некоторые свойства этих решений и необходимые рекуррентные соотношения, после чего подробно разбирается вопрос об определении коэффициентов ряда для полиномов Ламе 1-го рода и менее подробно для полиномов Ламе других типов.

В рассматриваемых случаях решения уравнения (1) пропорциональны полиномам Гегенбауэра, а соответствующие ряды этих полиномов, определяющие полиномы Ламе, превращаются в конечные суммы. В заключение рассматриваются специальные случаи, когда полиномы Ламе выражаются через полиномы Лежандра и Чебышева.

Библ. 6 назв.
Э. Л. Блох

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

8730. Формула для изображения произведения оригиналов. Натанзон В. Я., Прикл. матем. и механика, 1956, **20**, № 5, 671—672

Без применения теоремы обращения выводится формула для изображения произведения двух, трех и большего числа оригиналов.
А. П. Прудников

8731. Некоторые теоремы о преобразованиях Фурье и о коэффициентах типично действительных функций. Артемиадис (Quelques théorèmes sur les transformées de Fourier et sur les coefficients des fonctions typiquement réelles. Artémiadis Nicolas K.), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 5, 544—547 (франц.)

Частично без доказательств приводятся некоторые оценки функции $f(x) \in L_1$ по поведению ее преобразования Фурье

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\alpha x}\,dx$$

в комплексной плоскости. В частности, если $\operatorname{Re}\varphi(\alpha) \geqslant 0$ и существует комплексное число c с $\operatorname{Re} c > 0$, при котором

$$\int_0^1 \{|f(t) + f(-t) - c|/t\}\,dt < \infty,$$

то имеет место оценка
$|f(x)| + |f(-x)| \cos\{\arg f(x) + \arg f(-x)\} \leqslant 2\operatorname{Re} f(0)$
почти всюду. Приводится оценка также для $|xf(x)|$.

Далее доказываются некоторые неравенства, удовлетворяемые коэффициентами разложения

$$F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

функции, „типично действительной“ на единичном круге $|z| < 1$. В частности, существует неравенство

$$2 + a_2 - a_{\nu-1} - a_{\nu+1} + (a_{\nu-2} - a_{\nu+2})/2 \geqslant 0.$$

Н. А. Бразма

8732. О преобразовании Фурье-Стилтьеса. Кавата (On Fourier-Stieltjes transform. Kawata Tatsuo), Yokohama Math. J., 1954, **2**, № 1, 73—79 (англ.)

Пусть F — ограниченная неубывающая абсолютно непрерывная функция в $(-\infty, \infty)$ и, кроме того,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log F'(x)\,(1+x^2)^{-1}\,dx < \infty.$$

Пусть K — функция, определенная в $(0, \infty)$, ограниченной вариации в любом конечном интервале, $K(0) = 0$ и существует $k(x) \in L_2(F)$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^A e^{-ix\theta}\,dK(\theta) - k(x) \right|^2 dF(x) \to 0 \qquad (A \to \infty).$$

Тогда

$$k(x) = \underset{A\to\infty}{\overset{L_2(F)}{\text{l. i. m.}}} \int_0^A e^{-ix\theta}\,dK(\theta).$$

Основное содержание статьи состоит в доказательстве формулы обращения для определенного таким образом преобразования Фурье-Стилтьеса.
А. П. Прудников

8733. О законах коммутативности некоторых интегральных преобразований. Штейнберг (Sur les lois de commutation de certaines transformations intégrales. Steinberg Jacob), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1956, **10**, № 1—2, 25—33 (франц.)

Рассматривается интегральное преобразование

$$Kf(t) = \int_a^b K(s, t) f(t)\, dt,$$

в котором ядро $K(s, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными $\Phi_s K = \Psi_t K$, где Φ и Ψ — линейные дифференциальные операторы, действующие относительно переменных, указанных индексами. Пусть Δ и ξ — линейные дифференциальные операторы, D — оператор дифференцирования, x — оператор умножения на независимую переменную. Тогда имеют место свойства

$$DK \to K\Delta, \qquad xK \to K\xi$$

в том смысле, что выражение слева равно выражению справа с точностью до билинейной формы Лагранжа, зависящей от производных функции $f(x)$ и ядра $K(s, t)$. В частности, если K — интегральное преобразование Лапласа, то $\Delta = -x$, $\xi = D$. Для того чтобы невырожденный интегральный оператор K обладал двумя вышеупомянутыми свойствами, необходимо и достаточно, чтобы оператор ξ имел по крайней мере порядок 1 и $\Delta\xi - \xi\Delta \equiv 1$. В конце статьи приводятся матрицы коммутативности для интегральных преобразований Лапласа, Фурье и Гаусса. А. П. Прудников.

8734. Обоснование некоторых формул преобразования Эфроса. Карклиньш И. В., Zinātniskie raksti. Latv. univ., Уч. зап. Латв. ун-та, 1956, 8, № 2, 81—91 (рез. латв.)

Пусть $F(t)$ $(t \geqslant 0)$ и $f(p)$ удовлетворяют соотношению

$$f(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} F(t)\, dt, \qquad (1)$$

т. е. $f(p) \doteqdot F(t)$. Кроме того, пусть

$$\Psi(x, t) \doteqdot e^{-xq(p)} q(p) u(p). \qquad (2)$$

Если функции $F(t)$, $q(p)$, $u(p)$ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, то из (1) и (2) следует

$$u(p) f[q(p)] \doteqdot \int_0^\infty \Psi(x, t) F(x)\, dx. \qquad (3)$$

Выражение $p \int_0^\infty e^{-pt}\, dt \int_0^\infty \Psi(x, t) F(x)\, dx$ называется преобразованием Эфроса функции $F(x)$.

В статье дается обоснование некоторых формально полученных формул преобразования Эфроса, когда функции $u(p)$, $q(p)$, $F(t)$ не удовлетворяют условиям, гарантирующим справедливость соотношения (3). А. П. Прудников

8735. Обобщенный ряд Тейлора и теорема умножения изображений. Темкин А. Г., Сб. науч. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1956, вып. 6, кн. 2, 255—264

Дается разложение свертки двух функций в ряд по интегралам одной и производным другой свертываемой функции. Приводится несколько примеров, в том числе один из области теплотехники. А. П. Прудников

8736. Преобразование Мейера для функции двух переменных. Мехра (On Meijer transform of two variables. Mehra A. N.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1956, **48**, № 2, 83—94 (англ.)

Преобразованием Мейера называется преобразование

$$\varphi(p) = p \int_0^\infty e^{-1/2\, px} W_{n+1/2,\, m}(px)\, (px)^{-k-1/2} f(x)\, dx,$$

кратко обозначаемое $f(x) \xrightarrow{k+1/2,\ m} \varphi(p)$. Здесь $W_{k,m}(z)$ — функция Уиттекера. Преобразованием Мейера для функций двух переменных называется преобразование

$$\varphi(p, q) = pq \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-1/2\, px}\, e^{-1/2\, qy}\, W_{k+1/2,\, m}(px) \times$$
$$\times W_{k_1+1/2,\, m_1}(qy)\, (px)^{-k-1/2}\, (qy)^{-k_1-1/2} \times$$
$$\times f(x, y)\, dx\, dy;$$

краткое обозначение $f(x, y) \xrightarrow{k+1/2,\ k_1+1/2 \atop m,\ m_1} \varphi(p, q)$.

При $k = \pm m$, $k_1 = \pm m_1$ преобразование Мейера сводится к преобразованию Лапласа функции двух переменных. При

$$k = \frac{1}{2} n + l, \quad m = \pm\frac{1}{2} n, \quad k_1 = \frac{1}{2} n_1 + l_1, \quad m = \pm\frac{1}{2} n_1$$

преобразование Мейера имеет вид

$$\varphi(p, q) = (-1)^{l+l_1} l! l_1! \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}\, (px)^{-l}\, (qy)^{-l_1} \times$$
$$\times L_l^n(px)\, L_{l_1}^{n_1}(qy) f(x, y)\, dx\, dy,$$

где L_l^n, $L_{l_1}^{n_1}$ — обобщенные полиномы Лагерра. Последнее преобразование записывается также в виде

$$\varphi(p, q) = L_l^n\, L_{l_1}^{n_1} f(x, y).$$

Указываются простейшие свойства преобразований Мейера; находятся изображения некоторых функций и устанавливается ряд соотношений, как например:

Если $\varphi_{n-r,\ n-r}(p, q)$ есть $L_{n-r}^{\alpha+2r} L_{n-r}^{\alpha+2r} f(x, y)$, то

$$pq \int_0^\infty\int_0^\infty (pq\, xy)^{-n}\, e^{-xp-qy} L_n^\alpha(px + qy) f(x, y)\, dx dy =$$
$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r (\alpha + 2r)\Gamma(\alpha + 2r)}{(n-r)!\, r!\, \Gamma(\alpha + n + r + 1)} \varphi_{n-r,\ n-r}(p, q),$$

а также ряд других соотношений. Л. Я. Цлаф

8737 Д. Некоторые задачи теории упругости, разрешимые с помощью интегральных преобразований. Уфлянд Я. С. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Ленингр. политехн. ин-т, Л., 1957

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

8738. О возможной интерпретации рядов теории возмущений в квантовой теории поля. Огиевецкий В. И., Докл. АН СССР, 1956, **109**, № 5, 919—922

Показано, что суммирование методом Бореля расходящихся рядов теории возмущений в квантовой теории

поля может привести в ряде случаев к правильным результатам. В качестве примера автор рассматривает величину

$$L' = -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-m^2 s}\left\{esH\operatorname{cth}(esH) - 1 - \frac{1}{3}(esH)^2\right\}. \quad (1)$$

L' есть добавка к плотности лагранжиана, получающаяся вследствие поляризации вакуума постоянным магнитным полем H. Выражение (1) было получено Швингером без использования теории возмущений (см. сб. статей Новейшее развитие квантовой электродинамики, М., Изд-во ин. лит., 1954, статья VIII). Для той же самой величины Б. Л. Иоффе (РЖФиз., 1954, 8379) получил с помощью теории возмущений выражение

$$L' = -\frac{1}{8\pi^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!}{(2n)!}2^{2n}B_{2n}H^{2n}m^{-4n+4}e^{2n}, \quad (2)$$

где B_{2n} — числа Бернулли. Ряд (2) расходится при всех значениях e, кроме $e=0$. Автор статьи предлагает суммировать этот ряд методом Бореля: каждый член умножается на величину

$$\frac{m^{4n-4}}{(2n-3)!}\int_0^\infty e^{-m^2 s}\, s^{2n-3}\, ds = 1,$$

после чего меняется порядок суммирования и интегрирования. В результате получается выражение (1). Кроме указанного примера, в реферируемой работе указан общий прием для применения метода Бореля к суммированию рядов квантовой теории поля, а также выводится разложение матрицы рассеяния по обратным степеням константы связи. Ф. А. Березин

8739. Анализ линейных цепей, зависящих от времени, Бродин (Analysis of time-dependent linear networks. Brodin J.), IRE Trans. Circuit Theory, 1955, CT-2, № 1, 12—16 (англ.)

Рассматриваются некоторые вопросы теории линейных цепей с точки зрения теории операторов. Оператор здесь переводит включенный сигнал в характеристику на выходе. Для этих операторов определяются понятия больше и меньше, сходимость ряда операторов и устойчивость оператора, причем все эти понятия вводятся и для матриц, состоящих из операторов. В конце исследуется устойчивость некоторых электрических или механических систем. Э. Я. Риекстыньш

8740. Резонансная аналогия, свойства и механизация процесса вычисления преобразований Фурье. Дядьков Сергей, Acta techn. (Československ.), 1956, 1, № 6, 413—463 (рез. англ.)

Рассматриваются функции вида

$$F(t,\omega) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau, \quad (1)$$

$$F_d(t,\omega) = \frac{1}{j\omega}\int_{-\infty}^{t} f'(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau, \quad (2)$$

$$D(t,\omega) = j\omega F_d(t,\omega), \quad (3)$$

среди которых (1) и (3) выражают в пределе при $t\to\infty$ преобразование Фурье (т. е. спектральную плотность) функции $f(t)$, соответственно ее производной $f'(t)$. Особое внимание уделяется случаю, когда $f(t)\neq 0$ лишь на конечном промежутке $0<t<\tau_k$.

Устанавливаются аналогии между функциями (2) и (3) и выражениями амплитуд тока и напряжения в незатухающем колебательном контуре. В частности, значение функции (2) равно соответствующему мгновенному значению амплитуды тока в назатухающем колебательном контуре с индуктивностью $L=1$, настроенном на частоту ω, если на контур действует напряжение $u=f(t)$. Отсюда следует, что спектральная плотность импульса $f(t)$ численно равна амплитуде тока, установившегося в незатухающем контуре после окончания этого импульса.

Вышеуказанные аналогии непосредственно следуют из интеграла Дюамеля после подстановки в этот интеграл выражений соответствующих переходных функций колебательного контура.

Основываясь на этих аналогиях, автор рассматривает способ вычисления посредством механизма преобразования Фурье производной $f'(t)$, а также и интеграла Дюамеля для незатухающего и затухающего контуров. Для осуществления этого способа предлагается конструкция соответствующего прибора, который является своего рода анализатором. Опытный образец такого анализатора был изготовлен Институтом радиотехники и электроники в Праге в 1955 г.

При помощи этого анализатора были начерчены кривые функций вида (3) для различных $f(t)$ и при этом были обнаружены некоторые основные соотношения между формами графиков функций $f(t)$ и кривыми (2) и (3) в комплексной плоскости. Эти соотношения были впоследствии доказаны аналитически. В частности, доказывается, что импульсу $f(t)$ синусоидальной формы соответствуют циклоидальные кривые (3) в комплексной плоскости.

Содержание статьи иллюстрируется 43 чертежами и графиками. Н. А. Бразма

8741. Учет шума. Часть I. Характеристические величины шума. Боссе (Das Rechnen mit Rauschspannungen. I. Teil: Die Kenngrößen des Rauschens. Bosse G.), Frequenz, 1955, **9**, № 8, 258—264 (нем.)

Исследуется влияние шума в электрических цепях, возникающего при тепловом движении частиц. Автор вводит характеристические величины для напряжения шума, имеющие статистический характер. Принимается, что напряжение шума распределяется по нормальному закону. Вводятся также эффективное значение напряжения, спектральная функция для мощности и функция автокорреляции. Последние 2 функции взаимно связаны преобразованием Фурье. Выводится формула, связывающая функцию автокорреляции с напряжением шума. В качестве примера эта функция вычисляется в случае низкочастотных и полосовых фильтров.

Э. Я. Риекстыньш

8742. Переходная функция цепи в виде членов, зависящих от значений при мнимых частотах. Папулис (Network response in terms of behavior at imaginary frequencies. Papoulis A.), Proc. Sympos. Mod. Network Synthesis. 5, New York, 1955, Brooklin, 1956, 403—424 (англ.)

Рассматривается метод нахождения функции-оригинала по значениям ее лапласова изображения в точках $p_n=(2n+1)\sigma$ ($n=0,1,\ldots$, σ — произвольное положительное число).

После замены переменных $e^{-\sigma t}=\cos\theta$ и введения обозначения $r(t)=r\left(-\frac{1}{\sigma}\ln\cos\theta\right)=r^*(\theta)$, из преобразования Лапласа $R(p)=L\{r(t)\}$ следует интегральное преобразование, которое в точках $p=(2n+1)\sigma$ ($n=0,1,\ldots$) приобретает вид

$$\sigma R[(2n+1)\sigma] = \int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2n}\sin\theta\, r^*(\theta)\, d\theta. \quad (1)$$

Разложение функции $r^*(\theta)$, имеющей смысл в промежутке $(0, \pi/2)$, ищется в виде

$$r^*(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin(2k+1)\theta, \qquad (2)$$

причем предполагается $r^*(0) = 0$, что не ограничивает общности. Пользуясь равенством

$$2^{2n}(\cos\theta)^{2n}\sin\theta = \sin(2n+1)\theta + \ldots + \left[\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1}\right]\sin\left[2(n-k)+1\right]\theta + \ldots + \left[\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}\right]\sin\theta$$

и ортогональностью функций $\sin(2k+1)\theta$ в промежутке $(0, \pi/2)$, из равенства (1) следует

$$\sigma R[(2n+1)\sigma] = 2^{-2n}\frac{\pi}{4}\left\{\left[\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}\right]C_0 + \ldots + \left[\binom{2n}{k} + \binom{2n}{k-1}\right]C_{n-k} + \ldots + C_n\right\},$$

что при $n = 0,1, \ldots$ дает возможность постепенного определения коэффициентов $C_0, C_1, \ldots$. Для получения приближенных решений задачи предлагается заменить бесконечный ряд (2) конечной суммой.

Аналогичным образом получаются вместо (2) разложения по полиномам Чебышева, Лежандра и Лагерра.

Для синтеза электрической цепи по заданной импульсной характеристике $h(t)$ предлагается вместо (2) приближенное разложение в виде конечной суммы по функциям $\cos 2k\theta$, которому соответствует приближенное представление функции $H(p) = L\{h(t)\}$ в виде рациональной дроби. Последней же соответствует электрическая цепь, реализуемая посредством лишь элементов R и C.

Рассматривается синтез цепи также по заданным входной функции общего вида и соответствующей выходной функции, причем применяются после введения переменной θ разложения этих функций, а также и функции $h(t)$ в ряды вида (2).

Приводятся некоторые необходимые условия монотонного возрастания функции $r(t)$. Доказывается необходимое и достаточное условие того же свойства, что заключается в требовании неравенств

$$(-1)^n \Delta^n A(m\sigma) > 0 \quad (m, n = 1, 2, \ldots),$$

где $A(p)$ является лапласовым изображением функции $a(t) = dr/dt$. Приводятся примеры, сопровождающиеся графиками. Н. А. Бразма

8743 К. Основы преобразования Лапласа применительно к задачам рудничной автоматики. Савастеев В. Г. М., Моск. горн. ин-т., 1957, 34 стр., беспл.

8744 Д. Аналитическое исследование теплопроводности в твердых телах методами операционного исчисления нескольких переменных. Иванов А. В. Автореф. дисс. докт. техн. н., АН БССР Минск, 1957

См. также: 8365, 8377, 8531, 8562, 8569, 8610, 8611, 8637, 8673, 8678, 8745, 8747, 8922

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

7845. Линейные и билинейные функции с областью определения, содержащейся в действительном счетномерном пространстве. Хенсток (Linear and bilinear functions with domain contained in a real countably infinite dimensional space. Henstock R.), Proc. London Math. Soc., 1956, **6**, № 24, 481—500 (англ.)

В предыдущей работе автора (РЖМат, 1956, 7453) рассматривались линейные функции, определенные в пространстве Q_ω, где Q_ω — множество всех таких действительных последовательностей $\{x_n\}$, что $|x_n| \leqslant 1/2$ для всех n. В пространстве вводилась мера.

Результаты, полученные в указанной выше статье для линейных функций одного переменного $J(\xi)$ $(\xi \in Q_\omega)$, распространяются в реферируемой статье на билинейные симметрические функции двух переменных $A(\xi, \eta)$ $(\xi \in Q_\omega, \eta \in Q_\omega)$. При этом функция $A(\xi, \eta)$ называется билинейной симметрической, если 1) $A(\xi, \eta) = A(\eta, \xi)$, 2) $A(\xi, \eta + g\zeta) = A(\xi, \eta) + gA(\xi, \zeta)$ (g — вещественное число), 3) $A(\lambda+\nu, \lambda-\nu) = A(\lambda, \lambda) - A(\nu, \nu)$. Если, кроме того, для всех ξ имеет место неравенство $A(\xi, \xi) \geqslant 0$ (соответственно $A(\xi, \xi) > 0$), то функция $A(\xi, \eta)$ называется положительно полуспределенной (соответственно положительно определенной).

Основная теорема дает общий вид билинейной симметрической функции $A(\xi, \zeta)$ и некоторые предельные соотношения для такой функции.

Пусть $A(\xi, \zeta)$ — билинейная симметрическая положительно полуспределенная функция, заданная на некотором множестве $m \subset Q_\omega$ $(\xi \in m, \zeta \in m)$. Пусть η — фиксированный элемент из m. Если $A(\xi+\eta, \xi+\eta)$ — измеримая функция от ξ, заданная на множестве E_2 $(E_2 \subset Q_\omega)$, причем мера множества $E_2 > 0$, то: 1) функции $A(\xi+\eta, \xi+\eta)$ и $A(\xi, \eta)$ существуют для почти всех $\xi \in Q_\omega$; 2) если ввести обозначения: $a_{np} = A(\varphi^n, \varphi^p)$, $a_n(\eta) = A(\varphi^n, \eta)$ (где $\varphi^n = \{x_i\}$, причем $x_i = 0$ для $i \neq n$, $x_n = 1$), то a_{np} и $a_n(\eta)$ существуют для всех натуральных чисел n и p; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nn} < \infty$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(\eta) < \infty$; 5) $\lim_{n\to\infty} A(\xi_n', \xi_n'') = 0$ для почти всех $\xi \in Q_\omega$ (здесь принято следующее сбозначение если

$$\xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots\},$$

то

$$\xi_n' = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots\},$$

$$\xi_n'' = \{0, 0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\});$$

6) существует такое постоянное число $B \geqslant 0$, что для почти всех $\xi \in Q_\omega$ имеет место равенство $\lim_{n\to\infty}(\xi_n'' + \eta, \xi_n'' + \eta) = B$.

Далее, при выполнении всех этих условий, можно записать общий вид билинейной симметрической функции:

$$A(\xi, \eta) = \sum_{n,\,p}^{\infty} a_{np} x_n x_p + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\eta)\, x_n + B,$$

где $\xi = \{x_n\}$, а B — число, фигурирующее в условии 6) (при фиксированном η). Доказывается, что существуют такие билинейные симметрические функции, для которых $B > 0$.

Из основной теоремы вытекает, в частности, следующий результат:

Пусть двойная последовательность чисел $\{a_{np}\}$ такова, что $a_{nn} \geqslant 0$, $a_{np}^2 \leqslant a_{nn}\, a_{pp}$, $a_{np} = a_{pn}$ (для всех натуральных n и p). Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nn}$

сходился, необходимо и достаточно, чтобы для почти всех $\xi \in Q_\omega (\xi = \{x_n\})$ сходился двойной ряд $\sum_{n,\,p} a_{np} x_n x_p$, причем сходимость последнего ряда понимается как существование предела при $N \to \infty$ следующей суммы: $\sum_{p=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} a_{np} x_n x_p$.

Ю. С. Очан

8746. Линейные непрерывные функционалы на подпространствах $\mathfrak{L}^p$ и $\mathfrak{C}$. Рогозинский (Continuous linear functionals on subspaces of $\mathfrak{L}^p$ and $\mathfrak{C}$. Rogosinski W. W.), Proc. London Math. Soc., 1956, **6**, № 22, 175—190 (англ.)

Исследуется зависимость между минимальными (РЖМат, 1956, 7454) ядрами линейного функционала $\underline{B}$, определенного на замкнутом подпространстве $\mathfrak{G}$ комплексного пространства $\mathfrak{L}^p$ $(p \geqslant 1)$ или $\mathfrak{C}$, и максимальными элементами (РЖМат, 1956, 7454) этого подпространства.

Теорема 1. Если $\mathfrak{G}$ — замкнутое подпространство пространства $\mathfrak{L}^p$ $(1 < p < \infty)$, то существует единственная функция $\Gamma(P) \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющая условиям:

$$1)\ \underline{B}(g) = \int_E g \operatorname{sign} \overline{\Gamma}\, |\Gamma|^{p-1}\, dP,\quad 2)\ \|\underline{B}\| = \|\Gamma\|_p^{p-1};$$

при этом $\Gamma(P) = \|\underline{B}\|^{1/(p-1)} G$.

Теорема 4. Для того чтобы элемент $G \in \mathfrak{G} \subset \mathfrak{L}$, $\|G\| = 1$ был максимальным для $\underline{B}$, $\|\underline{B}\| > 0$, необходимо, чтобы каждое минимальное ядро $\underline{\mu}$ функционала $\underline{B}$ удовлетворяло условию: $\underline{\mu}(P) \equiv \operatorname{sign} \overline{G}(P)$. $\|B\|$ для всех $P \in E_1 = \{P : G(P) \neq 0\} \subset E$. Это условие достаточно, если оно выполнено хотя бы для одного ядра $\underline{\mu}$.

Теорема 5. Если $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{L}$ и для $\underline{B}$, $\|\underline{B}\| > 0$, существует максимальный элемент, то найдутся такое подмножество положительной меры $U \subset E$ и такая функция $\eta(P)$, $|\eta(P)| = \|\underline{B}\|$, определенная на U, что каждое минимальное ядро $\underline{\mu}$ функционала $\underline{B}$ при всех $P \in U$ будет равно $\eta(P)$.

Теорема 7. Пусть $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{L}$. Тогда для того чтобы для $\underline{B}$, $\|\underline{B}\| > 0$ существовал максимальный элемент $G \in \mathfrak{G}$, необходимо, чтобы множества

$$E^*_{\underline{\mu}} = \{P : |\underline{\mu}(P)| = \|\underline{\mu}\|_\infty\}$$

имели положительную меру для каждого минимального ядра $\underline{\mu}$ функционала $\underline{B}$ и, наоборот, если $E^*_{\underline{\mu}}$ имеет положительную меру хотя бы для одного ядра $\underline{\mu}$, то в точности те функции $G \in \mathfrak{G}$, $\|G\| = 1$ являются максимальными, для которых: 1) $G = 0$ или же $\operatorname{sign} G = \operatorname{sign} \underline{\mu}$ в точках множества $E^*_{\underline{\mu}}$ и 2) $G \equiv 0$ в точках множества $E - E^*_{\underline{\mu}}$.

По определению функция $\underline{\mu}(\xi)$ (вообще говоря, комплексная) является направленной в точке ξ и имеет направление $\varphi(\xi)$, если

$$\arg\{\underline{\mu}(x) - \underline{\mu}(\xi)\} \to \begin{cases} \varphi(\xi) & \text{при } x \to \xi + 0,\quad \underline{\mu}(x) \neq \underline{\mu}(\xi), \\ \varphi(\xi) + \pi & \text{при } x \to \xi - 0,\quad \underline{\mu}(x) \neq \underline{\mu}(\xi). \end{cases}$$

Ядро $\underline{\mu}(\xi)$ называется непрерывно направленным, если функция $\varphi(\xi)$ непрерывна.

Теорема 12. Для того чтобы элемент $G \in \mathfrak{G} \subset \mathfrak{C}$, $\|G\| = 1$ был максимальным для $\underline{B}$, $\|\underline{B}\| > 0$, необходимо, чтобы каждое минимальное ядро $\underline{\mu}$ функционала $\underline{B}$ было непрерывно направленным и чтобы для всех ξ, для которых $|G(\xi)| = 1$, выполнялось условие $\arg d\underline{\mu}(\xi) = \arg \overline{G}(\xi)$. Это условие достаточно, если оно выполняется хотя бы для одного ядра $\underline{\mu}$.

Полученные результаты применяются к действительным функциям, к аналитическим подпространствам (подпространство $\mathfrak{G} = \{g\}$ называется аналитическим, если из равенства нулю функции g на произвольном множестве положительной меры вытекает, что $g \equiv 0$) и т. д.

Даются также различные применения приведенных теорем к проблеме моментов.

Примечание референта. Для действительного случая теорема 12 получена С. И. Зуховицким (РЖМат, 1957, 1583, 4181). В. К. Дзядык

8747. О теореме представления посредством преобразования Лапласа вектор-функций. Миядера (On the representation theorem by the Laplace transformation of vectorvalued functions. Miyadera Isao), Tôhoku Math. J., 1956, **8**, № 2, 170—180 (англ).

Изучается вопрос о представлении функции $f(t)$ в виде преобразования Лапласа функции $\varphi(s) \in B_{\boldsymbol{p}}([0, \infty); X)$ (X — рефлексивное пространство Банаха, B_p — класс функций, интегрируемых с p-й степенью по Бохнеру). Этот вопрос изучался в работе Руни (РЖМат, 1956, 6702). Автор применяет метод Руни для вывода других формул представления. Сформулируем одну из теорем, доказанных в работе:

Для того чтобы имело место представление

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi(t)\, dt \qquad (s > 0),$$

где $\varphi(t) \in B_p([0, \infty); X)$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) $f(s)$ имеет сильные производные всех порядков для $0 < s < \infty$ и $f(\infty) = 0$, 2) существует такая константа M, что

$$\left(\int_0^\infty \|L_{k,\,t}[f]\|^p\, dt \right)^{1/p} < M,$$

где

$$L_{k,\,t}[f] = \frac{(-1)^k}{k!} f^k(k/t)\,(k/t)^{k+1}.$$

Аналогичные теоремы доказываются также для $p = \infty$ и $p = 1$. Б. М. Левитан

8748. Инвариантные функционалы. Сивин, Юд (Invariant functionals. Civin Paul, Yood Bertram), Pacif. J. Math., 1956, **6**, № 2, 231—237 (англ.)

Пусть G — разрешимая группа ограниченных линейных операторов в пространстве Банаха E. Через $G^{(i)}$ обозначим i-ю производную подгруппу группы G. Элемент $x \in E$ называется „стабильным“ относительно $G_1^{(i)}$, где $G_1^{(i)}$ есть выпуклая оболочка подгруппы $G^{(i)}$, если для некоторого числа $r > 0$, зависящего от x, и для всех элементов y вида $U(x)$, $U \in G_1^{(i)}$ выполняется условие

$$\inf_{\substack{T \in G_1^{(i)} \\ \|T\| \leqslant r}} \|T(y)\| \leqslant r. \inf_{T \in G_1^{(i)}} \|T(y)\|. \qquad (1)$$

Если правая часть в (1) заменяется нулем, то x называется нульстабильным. Доказывается теорема:

Если имеется непустое открытое подмножество σ множества Q элементов E, стабильных относительно каждого $G_1^{(i)}$, так что $(T - I)\sigma \subset Q$ для каждого T из G и, кроме того, имеется хотя бы один элемент E, не

нульстабильный относительно G_1, то существует нетривиальный инвариантный относительно G линейный функционал в E.

Полугруппа G линейных операторов в E называется леворазрешимой, если имеется такая конечная последовательность подполугрупп $G=G^{(0)}\supset G^{(1)}\supset\ldots\supset G^{(n)}=\{I\}$, что для любых данных элементов $T\in G^{(i)}$, $U\in G^{(i)}$, $i=0, 1, \ldots, n-1$, имеется элемент $V\in G^{(i+1)}$, для которого $TU=VUT$.

Доказывается теорема: Пусть K — конус в E с внутренней точкой x_0 и пусть леворазрешимая полугруппа G инвариантна в K, т. е. $TK\subset K$ при $T\in G$. Пусть выполняются условия: а) для некоторого $\lambda>0$, $T(x_0)\geqslant\lambda x_0$ при $T\in G$, б) для некоторого $r>0$ и любого данного элемента $U\in G_1^{(i)}$ имеется такой элемент $T\in G_1^{(i)}$, что $T(x_0)\leqslant rx_0$, $TU(x_0)\leqslant rx_0$, $i=0, 1, \ldots, n-1$.

Тогда имеется линейный функционал x^* в E, инвариантный относительно G и положительный на внутренних точках конуса K.

Последняя теорема, как замечает автор, является обобщением теоремы 3.1 статьи М. Г. Крейна и М. А. Рутмана (Успехи матем. наук, 1948, **3**, 3—95).

Д. П. Мильман

8749. Автоморфизмы и эндоморфизмы групповой алгебры единичной окружности. Рудин (The automorphisms and the endomorphisms of the group algebra of the unit circle. Rudin Walter), Acta math., 1956, **95**, № 1—2, 39—55 (англ.)

Пусть $M(C)$ — совокупность всех счетноаддитивных ограниченных комплексных функций (мер), определенных для борелевских подмножеств единичной окружности C. Если принять обычное определение линейных операций и определить умножение как свертывание, а норму как полную вариацию, то $M(C)$ станет коммутативной банаховой алгеброй. Абсолютно непрерывные меры образуют в $M(C)$ замкнутый идеал $L(C)$, канонически изоморфный алгебре всех комплексных функций на C, интегрируемых по Лебегу (со свертыванием в качестве умножения). Главный результат работы состоит в описании эндоморфизмов и автоморфизмов алгебры $L(C)$. Изучаются также гомоморфизмы алгебры $L(C)$ в алгебру $M(C)$ и автоморфизмы алгебры $M(C)$.

Пусть J — аддитивная группа целых чисел. Всякая часть множества J, лишь конечным числом членов отличающаяся от бесконечной в обе стороны арифметической прогрессии, называется P-множеством. Отображение t множества $N\subset J$ в J называется переводящим $L(C)$ в $L(C)$, если

$$\sum_{n\in N} a(t(n))\,z^n \qquad (1)$$

($|z|=1$) есть ряд Фурье — Лебега всякий раз, когда

$$\sum_{n\in J} a(n)\,z^n \qquad (2)$$

есть ряд Фурье — Лебега. Если (1) есть ряд Фурье — Стилтьеса всякий раз, когда (2) есть ряд Фурье — Лебега, то t называется переводящим $L(C)$ в $M(C)$. Если (1) есть ряд Фурье — Стилтьеса всякий раз, когда (2) есть ряд Фурье — Стилтьеса, то t называется переводящим $M(C)$ в $M(C)$.

I. Отображение $t: N\to J$ ($N\subset J$) в том и только в том случае переводит $L(C)$ в $L(C)$, если: А) N есть P-множество; В) существуют такое отображение $s: J\to J$ и такое натуральное q, что $B_1)$ $t(n)=s(n)$ для всех $n\in N$, за возможным исключением конечного их числа, $B_2)$ $s(n+q)+s(n-q)=2s(n)$ для всякого $n\in J$ и $B_3)$ $s(n+q)\neq s(n)$ для всякого $n\in J$.

II. Для отображения $t: N\to J$ ($N\subset J$) нижеследующие три свойства эквивалентны: $\alpha)$ t переводит $L(C)$ в $M(C)$; $\beta)$ выполнены условия А) и В) без B_3); $\gamma)$ t переводит $M(C)$ в $M(C)$.

III. Всякий эндоморфизм алгебры $L(C)$ имеет вид

$$\sum_{n\in J} a(n)\,z^n\to\sum_{n\in N} a(t(n))\,z^n, \qquad (3)$$

где N и t удовлетворяют условиям А) и В).

IV. Всякий гомоморфизм алгебры $L(C)$ в алгебру $M(C)$ имеет вид (3), где N и t удовлетворяют условиям А) и В) без B_3). Всякий такой гомоморфизм может быть продолжен в эндоморфизм алгебры $M(C)$. Это продолжение единственно в том и только в том случае, если $N=J$.

V. Если $N=J$ и отображение t взаимно однозначно и удовлетворяет условию В), то (3) есть автоморфизм алгебры $L(C)$ (и $M(C)$), и всякий автоморфизм алгебры $L(C)$ (и $M(C)$) может быть получен этим путем.

В. А. Рохлин

8750. О внешней степени линейного пространства. Вала (Sur la puissance extérieure d'un espace linéaire. Vala Klaus), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1956, Sar. A I, № 233, 36 p. (франц.)

Пусть L — линейное пространство над полем комплексных чисел. Через L^p обозначается совокупность всех упорядоченных групп $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ по p элементов из L, а через F — линейная оболочка всех элементов множества L^p.

Если M — любое другое линейное пространство, а f — какое-нибудь отображение множества L^p в M, то через $\bar f$ обозначим единственным образом определяемое расширение отображения f до линейного отображения всего пространства F в M.

Если f — полилинейное знакопеременное отображение, т. е.

$$f(x_1, \ldots, x_i+x_i', \ldots, x_p)-f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p)-$$
$$-f(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_p)=0,$$
$$f(x_1, \ldots, ax_i, \ldots, x_p)-af(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p)=0$$
$$(i=1, 2, \ldots, p),$$
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p)=0 \quad\text{при}\quad x_i=x_j \quad (i\neq j),$$

то порождаемое отображением f линейное отображение $\bar f$ аннулируется на линейной оболочке $A\subset F$ элементов вида

$$(x_1, \ldots, x_i+x_i', \ldots, x_p)-(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p)-$$
$$-(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_p),$$
$$(x_1, \ldots, ax_i, \ldots, x_p)-a(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$$
$$(i=1, 2, \ldots, p),$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) \quad\text{при}\quad x_i=x_j \quad (i\neq j).$$

Фактор-пространство F/A называется внешней p-й степенью пространства L и обозначается через $\overset{p}{\bigwedge} L$. Элементы пространства $\overset{p}{\bigwedge} L$ называются p-векторами над L.

Пусть γ — отображение пространства L^p в F, относящее каждому элементу $(x_1, x_2, \ldots, x_p)\in L^p$ тот же элемент из F. Через φ обозначим линейное отображение пространства F на F/A. Тогда $\psi=\varphi\gamma$ есть полилинейное знакопеременное отображение пространства L^p в F/A.

Элементы из $\overset{p}{\bigwedge} L$, являющиеся образами элементов из L^p в отображении ψ, будем обозначать следующим образом:

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_p)=[x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_p],$$

называя их разложимыми p-векторами. Каждый вектор из $\bigwedge^p L$ можно представить в виде суммы конечного числа разложимых p-векторов.

Пусть теперь $f(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_p) = f(y_1, \ldots, y_p; x_1, \ldots, x_p)$ — такая определенная на L^{2p} комплекснозначная функция, что каждая из функций

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) \to f(x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots, y_p),$$

$$(y_1, y_2, \ldots, y_p) \to \overline{f(x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots, y_p)}$$

является полилинейной и знакопеременной.

С помощью f для всех пар разложимых p-векторов вводится функция

$$Q([x_1 \wedge \ldots \wedge x_p], [y_1 \wedge \ldots \wedge y_p]) = f(x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_p),$$

которая затем продолжается до билинейной формы, определенной на всем пространстве $\bigwedge^p L \times \bigwedge^p L$ и, следовательно, задающей метрику в $\bigwedge^p L$. Оказывается, что положительная определенность этой метрики на всех разложимых p-векторах еще не гарантирует ее положительной определенности на всем пространстве $\bigwedge^p L$.

В случае, когда $L = H$ — гильбертово пространство, метрика $D([x_1 \wedge \ldots \wedge x_p], [y_1 \wedge \ldots \wedge y_p]) = \det = (x_i, y_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, p)$ оказывается положительно определенной на всем пространстве $\bigwedge^p H$.

Для этого случая устанавливается ряд результатов, опубликованных автором ранее без доказательств (РЖМат, 1957, 2492).

Примечание референта. Автору, по-видимому, остались неизвестными работы М. А. Наймарка (Изв. АН СССР, сер. матем., 1939, № 1, № 3; 1940, № 1 и особенно Матем. сб., 1941, **9**, № 3), в которых исследованы прямые произведения и прямые полиномы от операторов в гильбертовых пространствах их расширения и т. п. и получены результаты гораздо более общие, чем в реферируемой работе. И. С. Иохвидов

8751. Об общем разложении Фурье. Одзаки, Касиваги, Цубой (On the general Fourier expansion. Ozaki Shigeo, Kashiwagi Sadao, Tsuboi Teruo), Sci. Rept Tokyo Kyokiku Daigaku, 1954, **A4**, 299—308 (англ.).

Излагаются начала теории комплексных гильбертовых пространств для некоторого класса абелевых групп L и кольца R всех (по-видимому, эндоморфных) операторов на L. Здесь L — основное пространство и R берется в качестве поля скаляров. Налагаются аксиомы, достаточные для получения неравенства Шварца и разложения по ортонормальным системам. Изложение неясно референту и, видимо, содержит мало нового. E. Hewitt

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 597.

8752. О вложениях сфер в гильбертово пространство. Ранкин (On packings of spheres in Hilbert space. Rankin R. A.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1955, **2**, № 3, 145—146 (англ.)

Пусть $S_a(y)$ есть сфера радиуса a с центром в точке y вещественного гильбертова пространства, т. е. $x \in S_a(y)$, если $\|x - y\| \leqslant a$, и пусть $S_1(0) = S$ — единичная сфера. Опираясь на свой предыдущий результат (РЖМат, 1957, 7377), автор устанавливает теорему: Для того чтобы в S можно было поместить бесконечное множество неперекрывающихся сфер $S_a(y)$, необходимо и достаточно, чтобы $a \leqslant \sqrt{2} - 1$. Если $\sqrt{2} - 1 < a \leqslant 1$, то максимальное число неперекрывающихся сфер, которое можно поместить в S, равно $[2a^2/(a^2 + 2a - 1)]$ (квадратными скобками обозначена целая часть).

И. С. Иохвидов

8753. Гильбертова норма некоторой бесконечной матрицы. Хилл (The Hilbert bound of a certain doubly-infinite matrix. Hill C. K.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 1, 7—17 (англ.)

Показывается, что матрица $A(\lambda) = \left(\frac{1}{m+n+\lambda}\right)$ $(m, n = \ldots -1, 0, 1 \ldots; \lambda$ — действительное нецелое) определяет ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве H^2 бесконечных последовательностей $(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$, причем норма этого оператора равна $\pi |\operatorname{cosec} \pi\lambda|$ и достигается. Числа $\pm \pi \operatorname{cosec} \pi\lambda$ являются собственными значениями матрицы $A(\lambda)$ с бесконечномерными собственными подпространствами, для которых дается полная аналитическая характеристика. Аналогичные вопросы рассматриваются и для матрицы $A_0^\infty(\lambda) = \left(\frac{1}{m+n+\lambda}\right)$ $(m, n = 0, 1, 2 \ldots)$; при этом существенно уточняется ряд результатов Ингама (Ingham A. E., J. London Math. Soc., 1936, **11**, 237—240).

Б. И. Коренблюм

8754. Унитарные расширения операторов. Шрейбер (Unitary dilations of operators. Schreiber M.), Duke Math. J., 1956, **23**, № 4, 579—594 (англ.)

В гильбертовом пространстве H рассматриваются ограниченные линейные операторы. Оператор A, подчиненный условию $\|A\| \leqslant 1$ (или $\|A\| < 1$), называется сжатием (соответственно собственным сжатием). На единичной окружности C вводится лебегова мера m, нормированная условием $m(C) = 1$.

Функция F, относящая каждому множеству борелевской системы в комплексной плоскости положительный оператор в H, называется операторной мерой в H, если F вполне аддитивна в сильной операторной топологии и удовлетворяет следующим двум условиям: 1) $\Lambda(F) \subseteq C$; 2) $F(\Lambda(F)) = I$, где $\Lambda(F)$ — „база“ функции F, т. е. дополнение к объединению всех открытых множеств, на которых F исчезает.

Если f — комплекснозначная функция на Λ, ограниченная и B-измеримая, то с помощью операторной меры F определяется (интеграл) оператор $\int_\Lambda f(u)\, dF(u)$.

Для любого оператора T через $T^{(n)}$ (n — целое) обозначается оператор T^n при $n \geqslant 0$ и $T^{*|n|}$ при $n < 0$.

Операторная мера F называется сильной, если

$$\int u^n\, dF(u) = \left[\int u\, dF(u)\right]^{(n)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Каждое сжатие A определяет единственную сильную операторную меру F, для которой $A^{(n)} = \int u^n\, dF(u)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, и каждая сильная операторная мера порождается таким образом. Первую часть этой теоремы установил ранее С.-Надь (РЖМат, 1954, 2626).

Под расширениями операторов понимаются расширения с выходом в более широкое пространство.

Если A — сжатие с сильной операторной мерой F в гильбертовом пространстве H, то по теореме М. А. Наймарка существуют такое гильбертово пространство $K \supseteq H$ и такая спектральная мера E в K, что $F(\sigma) = PE(\sigma)P$ для каждого борелевского множества σ, причем P есть оператор проектирования из K на H. При естественном требовании минимальности пространства K и E определяются единственным образом и называются соответственно минимально расширенным пространством для A (или F) и минимальным расширением меры F. Унитарный оператор $U = \int u\, dE(u)$ называется сильным минимальным унитарным расшире-

нием оператора A. Основным свойством оператора U является: $A^{(n)} = PU^nP$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Для построения расширения U_A произвольного собственного сжатия A в сепарабельном гильбертовом пространстве H рассматривается множество $\mathfrak{S}$ всех определенных на C вектор-функций f со значениями в H, для которых конечен интеграл $\int_C \|f(u)\|^2\, dm(u)$.

С помощью заданной на C оператор-функции $K_A(u) \doteq \sum_{-\infty}^{\infty} u^{-n}A^{(n)}$, где A — собственное сжатие, вводится скалярное произведение

$$[f, g]_A = \int_C (K_A(u) f(u),\ g(u))\, dm(u),$$

превращающее $\mathfrak{S}$ в гильбертово пространство $L_2(A)$.

Основные результаты: Унитарный оператор U умножения на независимую переменную u в $L_2(A)$ является расширением собственного сжатия A, действующего на подпространстве функций-констант.

Унитарные расширения всяких двух собственных сжатий унитарно эквивалентны. Если α — размерность пространства H $(\alpha \leqslant \aleph_0)$, то все такие расширения унитарно эквивалентны α-кратной копии унитарного оператора „двустороннего сдвига“ $(\mathfrak{B}f)(n) = f(n+1)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, определенного в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ функций $f(n)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, для которых $\sum_{-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty$.

Унитарный оператор является расширением некоторого собственного сжатия в том и только том случае, если кратность его спектра равна α и его спектральная мера эквивалентна m.

Наконец, если p и q — два проекционных оператора в произвольном гильбертовом пространстве с унитарно эквивалентными унитарными расширениями, то p и q унитарно эквивалентны. И. С. Иохвидов

8755. О полугруппах неограниченных нормальных операторов. Гетур (On semi-groups of unbounded normal operators. Getoor R. K.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 3, 387—391 (англ.)

Рассматривается семейство $\{N_t,\ t > 0\}$ нормальных (возможно неограниченных) операторов N_t в гильбертовом пространстве H, обладающее следующими свойствами: 1) $N_tN_s = N_{t+s}$, 2) для каждого $x \in \bigcap_{t>0} D_t$ (где D_t — область определения оператора N_t) N_tx есть слабо непрерывная функция от t $(t > 0)$. Доказывается, что для такого семейства N_t существует и притом только одно комплексное разложение единицы $K(\lambda)$ с носителем, содержащимся в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$, обладающее тем свойством, что

$$N_t = \int_{\lambda_1 \geqslant 0} \lambda_1^t e^{i\lambda_2 t} K(d\lambda), \quad \lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda, \lambda_2 = \mathrm{Im}\,\lambda,$$

при всех $t > 0$. Попутно устанавливается, что D плотно в H. Эта теорема обобщает результат Девинаца (РЖМат, 1955, 3847) о полугруппах неограниченных самосопряженных операторов.

Примечание референта. На стр. 389, строка 13 снизу, автор ошибочно называет $\mathfrak{N}$ нулевым подпространством оператора U_t; в действительности $U_tx = x$ для $x \in \mathfrak{N}$. М. А. Наймарк

8756. О перестановочности нормальных операторов. Девинац, Нусбаум (On the permutability of normal operators. Devinatz A., Nussbaum A. E.), Ann. Math., 1957, **65**, № 1, 144—152 (англ.)

Нормальные (вообще говоря, неограниченные) операторы N_1 и N_2 в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называются перестановочными, если их канонические разложения единицы $K_1(z)$ и $K_2(z)$ обладают свойством $K_1(z_1)K_2(z_2) = K_2(z_2)K_1(z_1)$ для всех комплексных z_1 и z_2. Это определение эквивалентно обычному, если N_1 и N_2 ограничены $(N_1N_2 = N_2N_1)$, или только оператор N_1 ограничен $(N_1N_2 \subseteq N_2N_1)$.

Говорят, что нормальные операторы N_1, N_2 и N обладают свойством P, если $N = N_1N_2 = N_2N_1$.

Теорема 1. Если N_1, N_2 и N обладают свойством P, то N_1 и N_2 перестановочны.

С помощью этой теоремы удается получить интегральное представление слабо непрерывной полугруппы нормальных операторов на $\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — аддитивная полугруппа, состоящая из комплексов $x = (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$, все компоненты которых суть неотрицательные числа, $\sum_1^n x_i \neq 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — целые. Под сложением понимается обычное сложение по компонентам.

Теорема 2. Если для всех $x, y \in \mathfrak{S}$: а) N_x есть нормальный оператор в $\mathfrak{H}$, б) $N_xN_y = N_{x+y}$, в) (N_xf, g) непрерывно по x для всех $g \in \mathfrak{H}$ и всех $f \in D = \bigcap D(N_x)$, где пересечение берется по всем $x \in \mathfrak{S}$, то существует единственное такое $2n$-параметрическое разложение единицы $\{K(t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n)\}$, что $K(t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n) = 0$, если некоторое $t_k < 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, и

$$N_x = \int t^x e^{ix\cdot s}\, dK(t, s),$$

где $t^x = \prod_1^n t_k^{x_k}$, $x \cdot s = \sum_1^n x_k s_k$ и $K(t, s) = K(t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n)$. Эта теорема содержит, как частные случаи, полученные ранее аналогичные результаты С.-Надя, Хилле, Девинаца (РЖМат, 1955, 3847) и Гетура (реф. 8755). И. С. Иохвидов

8757. Некоторые соотношения между топологическими и алгебраическими свойствами колец операторов. Фелдман (Some connections between topological and algebraic properties in rings of operators. Feldman Jacob), Duke Math. J., 1956, **23**, № 2, 365—370 (англ.)

Пусть кольцо $\mathbf{A}$ есть AW^*-алгебра (по поводу этого понятия см., например, РЖМат, 1957, 3295); кольцо $\mathbf{A}$ называется: 1) α-разложимым, где α — кардинальное число, если всякое множество отличных от нуля и взаимно ортогональных проектирующих элементов имеет мощность $\leqslant \alpha$; 2) локально α-разложимым, если $\mathbf{A}$ есть прямая сумма α-разложимых колец $\mathbf{A}_\alpha$ с нормой $\|\{x_\alpha\}\| = \sup_\alpha \|x_\alpha\|$ и инволюцией $\{x_\alpha\}^* = \{x_\alpha^*\}$; 3) α-ограниченным, если всякое множество отличных от нуля взаимно ортогональных и эквивалентных между собой проектирующих элементов имеет мощность $\leqslant \alpha$. Доказывается, что

I. Если центр α-ограниченной AW^*-алгебры α-разложим, то сама эта алгебра также α-разложима.

II. Если кольцо $\mathbf{A}$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве имеет слабо плотное множество мощности α, то $\mathbf{A}$ локально α-разложимо.

В доказательствах этих предложений важную роль играет введенное автором понятие размерностной функции $d(P)$, относящей каждому чисто бесконечному проектирующему элементу $P(\mathbf{A})$ непрерывную по упорядочению (order-continuous) функцию на пространстве Γ максимальных идеалов γ центра кольца $\mathbf{A}$ со значениями — кардинальными числами; при этом из $P \precsim Q$ следует $d(P)(\gamma) \leqslant d(Q)(\gamma)$ для всех $\gamma \in \Gamma$. М. А. Наймарк

8758. К теории присоединенных сферических функций. Виленкин Н. Я., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 4, 742—744

Установлен ряд интегральных соотношений и функциональных уравнений, которым удовлетворяют матричные элементы неприводимых унитарных представлений групп Ли. Эти соотношения являются обобщениями результатов И. М. Гельфанда (Докл. АН СССР, 1950, **70**, № 1, 5) и Годмана (Godement R., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **73**, 496). Приведем в качестве примера две формулы.

Пусть G — группа Ли, H — ее максимальная компактная подгруппа. Пусть, далее, $g \to T_g$ — неприводимое унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и $h \to T_h$ — индуцированное им представление подгруппы H. Разложим пространство $\mathfrak{H}$ в прямую сумму таких инвариантных относительно T_h подпространств $\mathfrak{H}_n$, что T_h индуцирует в $\mathfrak{H}_n$ представление, кратное неприводимому. Пусть, далее, $\mathfrak{H}_n$ — максимальное подпространство, обладающее этими свойствами. Разложим $\mathfrak{H}_n$ в прямую сумму неприводимых подпространств $\mathfrak{H}_{nk}$ и приурочим к этому разложению базис $\{\xi_{nk,\ j}\}$ в $\mathfrak{H}$. С помощью этого базиса каждый оператор A в $\mathfrak{H}$ представим в виде клеточной матрицы $\|A_{m_k m'_{k'}}\|$ с элементами $a_{m_k m'_{k'},\ jj'} = \left(A\xi_{m_k,\ j}, \xi_{m'_{k'},\ j'}\right)$.

Представление группы H, возникающее в $\mathfrak{H}_n$, обозначим $T_h^{(n)}$. Представление этой группы, возникающее в $\mathfrak{H}_{n_k}$, обозначим $T_h^{(n_k)}$. Обозначим далее через R_{mn} совокупность функций $F(g)$ на группе, принимающих матричные значения и таких, что

$$F(h_1 g h_2) = T_{h_1}^{(m)} F(g)\, T_{h_2}^{(n)}.$$

Легко проверить, что если $F_1 \in R_{ms}$, $F_2 \in R_{sn}$, то функция $F(g)$, определяемая равенством

$$F(g) = F_1 * F_2(g) = \int F_1(g_1)\, F_2\left(g_1^{-1} g\right) d\mu(g_1),$$

принадлежит R_{mn}.

Пусть $F(g) \in R_{mn}$. Обозначим через $\Phi(F)$ матрицу с элементами

$$\Phi_{kv,\ sq}(F) = \mathrm{sp} \int F_{m_k n_s}(g)\, T_{m_v n_q}(g^{-1})\, d\mu(g).$$

Оказывается, что если $F_1 \in R_{mk}$, $F_2 \in R_{ns}$ и $F_1 * F_2 = F_3$, то $\Phi(F_1)\Phi(F_2) = d_n \Phi(F_3)$, где d_n — кратность, с которой представление $T_h^{(n_k)}$ входит в разложение представления T_g (или, что то же самое, в разложение представления $T_h^{(n)}$). Написанная формула при $d_n = 1$ и в случае, когда размерность $T_h^{(n)}$ равна 1, превращается в результат И. М. Гельфанда (см. вышеприведенную ссылку).

Далее обозначим через $\Phi_m(g)$ матрицу

$$\Phi_m(g) = \|\mathrm{sp}\, T_{m_k m_j}(g)\|.$$

Тогда

$$\Phi_m(g_1)\, \Phi_m(g_2) = d_m \int \Phi_m(g_1 h^{-1} g_2 h)\, d\mu(h).$$

Эта формула обобщает „закон умножения" для зональных сферических функций, полученный в цитированных работах И. М. Гельфанда и Годмана.

Наконец, автор указывает дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют матричные элементы неприводимых унитарных представлений групп Ли.

Ф. А. Березин

8759. Положительные функционалы и теория представлений банаховых алгебр. Мацусита (Positive functionals and representation theory on Banach algebras. I. Matsushita Shin-ichi), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1955, **A6**, № 1, 1—18 (англ.)

Подробное изложение результатов, краткое сообщение о которых было опубликовано ранее (РЖМат, 1956, 3147).

М. А. Наймарк

8760. Некоторые вопросы нелинейного функционального анализа. Люстерник Л. А., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 6, 145—168.

Обзорный доклад автора на Всесоюзном совещании по функциональному анализу и его применениям (январь 1956 г.). Освещено современное состояние и намечены возможные пути дальнейшего развития вопросов продолжения решений нелинейных функциональных уравнений и вариационного исчисления в целом.

§ 1 посвящен обзору метода продолжения решения нелинейного эллиптического уравнения в частных производных С. Н. Бернштейна, Г. Вейля, Г. Леви и вариационному принципу А. Пуанкаре о существовании замкнутой геодезической на выпуклой поверхности. Изложена сущность методов Э. Шмидта — Ляпунова и Фишера — Куранта, относящихся к нелинейным интегральным уравнениям.

В § 2 содержатся вопросы, пополняющие существующие основы общего дифференциального исчисления в линейных пространствах. В следующем § 3 дан краткий обзор дифференциальных уравнений в функциональных пространствах. Далее, в § 4 излагается теорема о неявных функциях (Хилдебрандта — Грейвса) и исследуются некоторые вытекающие из нее следствия (теория особых точек, уравнения ветвления и др.).

Рассмотрим уравнение $y = F(x, t) = 0$, $y \in Y$, $x \in X$, $t \in T$, где Y — пространство значений, X — пространство аргументов, T — пространство параметров. Задача непрерывного продолжения решения этого уравнения усложняется, когда для некоторых $t \in T$ оно имеет особое решение.

В § 5 изложены методы исследования упомянутого случая: метод обхода особого множества, метод Лере — Шаудера и метод топологических пересечений. § 6 посвящен обзору теории критических точек, поверхностям уровня и ортогональным траекториям, вариационному принципу критической точки, оценке числа критических точек и исследованию „периодических" функций на сфере. В заключительном § 7 излагается содержание топологических методов вариационного исчисления. Библ. 136 назв.

Э. С. Цитланадзе

8761. Некоторые теоремы нелинейного функционального анализа и их применение в теории локальных групп. Мильман Д. П., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 1, 222—226

Доклад на Всесоюзной конференции по функциональному анализу и его применениям (январь 1956 г.). Пусть G — множество в пространстве Банаха E, $f(x)$ — определенная на G функция с областью значений в E_1. Функция $f(x)$ считается дифференцируемой в точке $x \in G$, если для любой непрерывной линии $\tilde{x}(\tau) \in G$, $0 \leqslant \tau < 1$, на G, исходящей из x (т. е. $\tilde{x}(0) = x$), выполнено соотношение

$$f[\tilde{x}(\tau)] - f(x) = f'(x)[\tilde{x}(\tau) - x] + o(\tau),\ \lim_{\tau \to 0} \frac{\|o(\tau)\|}{\tau} = 0,$$

где $f'(x)$ — некоторый линейный оператор на E.

Пусть G — локальная группа с единицей a, топологическое пространство которой есть множество из E. Определим для пары $x, y \in G$ композицию $x * y = F(x, y)$, удовлетворяющую условиям: 1) $F(x, y)$ дифференцируема по x и y и $F'_1(x, y)$, $F'_2(x, y)$ непрерывны; 2) существует $F'_1(a, x)^{-1}$ в E; $x \in G$; 3) существуют и непрерывны производные $F''_{12}(x, y)$, $F''_{21}(x, y)$; 4) существует такая

непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{a}(\tau)$, что $\tilde{a}(\tau) \in G$, $0 \leqslant \tau < 1$, $\tilde{a}(0) = a$, $\dot{\tilde{a}}(0) \neq 0$.

Пусть E_x — множество точек $\zeta \in E$, для которых $\lim_{\tau \to 0} \left\| \frac{\tilde{x}(\tau) - x}{\tau} - \zeta \right\| = 0$, где $\tilde{x}(\tau) \in G$ имеет непрерывную производную $\tilde{x}'(\tau)$, $0 \leqslant \tau < 1$, $\tilde{x}(0) = x$, и пусть $\chi(x) = F_1'(a, x)^{-1} F_2'(x, a)$, $\bar{1}$ — единичный оператор в E. Тогда $E_x = F_1'(a, x) E_a = F_2'(x, a) E_a$ является линейным подпространством пространства G, а $\chi(x)$ является линейным представлением пространства G на E_a, т. е. $\chi(a) = \bar{1}$, $\chi(x * y)\zeta = \chi(x)\chi(y)\zeta$, $\zeta \in E_a$, $x, y \in G$. Ядро гомоморфизма состоит из таких элементов x, что

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\tilde{a}(\tau) * x - x * \tilde{a}(\tau)}{\tau} = 0.$$

Далее приводится обобщение на бесконечномерный случай критерия полной интегрируемости конечных систем уравнений с частными производными первого порядка, разрешенных относительно производных. Вводится понятие a-пространства, для которого имеет место предложение: Пусть G есть a-пространство в E и каждой паре $x, y \in E$ отвечает линейный оператор $f(x, y)$ в E, где $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные производные $f_1'(x, y)$, $f_2'(x, y)$ соответственно по x и y. Если, кроме того, $f_1'(x, y)uv + f_2'(x, y)f(x, y)uv = f_1'(x, y)vu + f_2'(x, y)f(x, y)vu$ и $v \in E_x$, $x, y \in G$, где E_x — множество касательных векторов к G в x, то уравнение $y_x'u = f(x, y)u$, $y|_{x=a} = y_0$, имеет единственное решение $y = \varphi(x)$.

Кроме того, указывается дифференциальное уравнение линейных представлений локальной группы G в E и его решения; приводится достаточное условие, при котором это представление является точным. Э. С. Цитланадзе

8762. О функционалах, являющихся функциями линейных функционалов. Себаштьян-и-Силва (Sui funzionali che sono funzioni di funzionali lineari dei loro argomenti. Sebastião e Silva José), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, **21**, № 3—4, 172—178 (итал.)

Доказываются следующие предложения.

Теорема 1. Пусть $F(u)$ — заданный функционал, G-аналитический в конечно-открытом множестве D (Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, М., 1951, опред. 4.3.1 и 4.3.3) произвольного векторного пространства S над полем комплексных чисел C. Пусть далее $L_1, \ldots, L_n$ — заданные в S линейно независимые линейные функционалы. Тогда, для того чтобы функционал $F(u)$ имел вид: $F(u) = f(L_1 u, \ldots, L_n u)$, где $f(z_1, \ldots, z_n)$ — комплексная функция n комплексных переменных $(z_1, \ldots, z_n)$, необходимо и достаточно, чтобы производная Гато от $F(u)$ для каждого $u \in D$ имела вид: $F'(u) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(u) L_k$, где $\varphi_k(u)$ — функционалы, определенные в D. В этом случае функция $f(z_1, \ldots, z_n)$ будет голоморфной в открытой области A пространства C^n, составленной из точек $z = (L_1 u, \ldots, L_n u)$, $u \in D$.

Пусть $\mathfrak{A}(U)$ — кольцо функций $\varphi(z)$, локально аналитических на непустом замкнутом множестве U римановой сферы Ω ($U \neq \Omega$, $\varphi(\infty) = 0$, если $\infty \in U$), снабженное топологией, введенной Кёте, Силва Диасом и Гротендиком (РЖМат, 1955, 1377).

Теорема 2. Пусть $F(u)$ — заданная функция со значениями в $\mathfrak{A}(U)$, G-аналитическая на множестве $D \subset S$, и $L_1, \ldots, L_n$ — линейные отображения из S в $\mathfrak{A}(U)$, линейно независимые в каждой точке поля C. Тогда, для того чтобы было $F(u) = f(z, L_1 u, \ldots, L_n u)$, где $f(z, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ — комплексная функция комплексных переменных $(z, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, аналитическая относительно z, необходимо и достаточно, чтобы производная Гато от $F(u)$ имела в каждой точке $u \in D$ следующий вид:

$$F'(u) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(u) L_i,$$

где $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)$ — заданные в D функционалы со значениями в $\mathfrak{A}(U)$. В этом случае функция $f(z, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ будет аналитической на множестве A точек $(z, L_1 u, \ldots, L_n u)$, $z \in U$, $u \in D$. М. М. Вайнберг

8763. Заметка о банаховых пространствах. Одзаки, Касиваги, Цубои (Note on Banach spaces. Ozaki Shigeo, Kashiwagi Sadao, Tsuboi Teruo), Sci. Rept. Tokyo Kyoiku Diagaku, 1954, **A4**, 319—323 (англ.)

Хотя авторы говорят о „регулярности" функций с областью определения и областью значений в комплексном банаховом пространстве, в действительности в статье нет ничего об аналитичности; единственным важным объектом рассмотрения является некоторый вид дифференцируемости. Пространство может быть и действительным.

Определение дифференцируемости, данное авторами, не совсем ясно референту, но основной результат, конечно, справедлив, если дифференциалы брать в смысле Фреше. Предположим, что функция f непрерывно дифференцируема в выпуклом множестве K банахова пространства L. Пусть f' — производная от f в смысле Фреше (так что $f'(x)$ — ограниченный линейный оператор в L). Предположим, что существует такой ограниченный линейный оператор g в L, что $\|gf'(x) - I\| < 1$ для $x \in K$. Тогда из $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$ в K. Доказательство использует только самые элементарные неравенства и интегральное тождество, содержащее f и f'. A. E. Taylor

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 7, 716.

8764. Проблема существования локального экстремума функционала. Фреше (Le problème de l'existence d'un extremum local d'une fonctionnèlle. Fréchet Maurice), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1956, **73**, № 2, 93—120 (франц.)

Подробное изложение предыдущей заметки автора (РЖМат, 1956, 8943). Введены понятия обобщенных дифференциалов (вариаций) для функционалов в банаховых пространствах.

В гл. 1 рассматриваются вопросы общего дифференциального исчисления. По определению, функционал $F[z]$ дифференцируем при $z = y$, если существует такой линейный функционал $L[z]$, что

$$\Delta F[y] = L[\Delta y] + \|y\| \varepsilon(y, \Delta y),$$

где $\lim |\varepsilon(y, \Delta y)| = 0$ при $\|\Delta y\| \to 0$; $L[\Delta y]$ называется дифференциалом функционала $F[z]$ в точке $z = y$ для приращения Δy и обозначается через $\partial_{\Delta y} F[y] \equiv L[\Delta y]$.

Функционал $F[z]$ обладает дифференциалом второго порядка при $z = y$, если он дифференцируем по z в окрестности точки y и если, для фиксированного $\Delta_1 z$, функционал $\partial_{\Delta_1 z} F[z]$ дифференцируем по z при $z = y$. Этот дифференциал обозначается через $\partial_{\Delta y} \partial_{\Delta_1 z} F[y]$. Последний является билинейным и симметрическим функционалом относительно Δy и $\Delta_1 z$. Аналогично определяются дифференциалы функционала $F[z]$ любого порядка n. Пусть функционал $F[z]$ обладает дифферен-

циалом n-го порядка при $\|z-y\|<\rho$. Выводятся важные для изучения экстремумов функционала $F(z)$ формулы

$$F[y+\Delta y]=F[y]+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\partial^k_{(\Delta y)^k}F[y]+$$

$$+\frac{1}{n!}\partial^n_{(\Delta y)^n}F[y+\theta\Delta y]\ (\|\Delta y\|<\rho,\ 0<\theta<1), \qquad (1)$$

$$F[y+\Delta y]=F[y]+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\partial^k_{(\Delta y)^k}F[y]+\varepsilon\|\Delta y\|^n, \qquad (2)$$

где $\lim_{\|\Delta y\|\to 0}\varepsilon=0$. Скажем, что функционал $F[z]$ обладает обобщенным дифференциалом n-го порядка, если существуют такие функционалы $F_1[z,u],\ldots,F_n[z,u]$, что

$$F[y+tu]=F[y]+\sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k!}F_k[y,u]+t^n\varepsilon_n[y,u,t], \qquad (3)$$

где $\lim_{t\to 0}\varepsilon_n[y,u,t]=0$ для каждого фиксированного элемента u рассматриваемого банахова пространства. Из формул (1), (2) и (3) выводятся следующие предложения: 1) если функционал $F[z]$ имеет при $z=y$ обобщенный дифференциал порядка n, то при $z=y$ существуют также его обобщенные дифференциалы любого порядка $<n$; 2) функционал $F[z]$ не может обладать двумя различными обобщенными дифференциалами одного и того же порядка; 3) $F_p[y,u]=\delta^p_u F[y]$ при $p\leqslant n$, где $\delta_u F[y]=\lim\limits_{t\to 0}\left\{\frac{1}{t}[F[y+tu]-F[y]]\right\}$; 4) справедливо разложение

$$F[y+ut]=F[y]+\sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k!}\delta^k_u F[y]+t^n\varepsilon_n[y,u,t],$$

где $\lim_{t\to 0}\varepsilon_n[y,u,t]=0$ при фиксированных y и u.

В гл. 2 с использованием вышеприведенных результатов выводятся необходимые и достаточные условия экстремума в терминах обобщенного дифференциала. Доказываются следующие предложения:

1. Если функционал $F[z]$ при $z=y$ обладает первой вариацией $\delta_{\Delta z}F[y]$, то для того чтобы он достигал экстремума при $z=y$, необходимо выполнение равенства $\delta_{\Delta y}F[y]=0$ для всех Δy.

2. Если функционал $F[z]$ при $z=y$ имеет вторую обобщенную вариацию $\delta^2_{(\Delta y)^2}F[z]$, то для того чтобы он достигал локального минимума (максимума), необходимо, чтобы было $\delta^2_{(\Delta y)^2}F[y]\geqslant 0\ (\leqslant 0)$.

3. Пусть функционал $F[z]$ при $z=y$ имеет обобщенную вариацию n-го порядка и пусть, кроме того, при $z=y$ все обобщенные вариации порядка ниже n при приращении Δy равны нулю для произвольного Δy. Для того чтобы функционал $F[z]$ имел локальный минимум (максимум) при $z=y$, необходимо: 1) $\delta^n_{(\Delta y)^n}F[y]=0$, если n нечетное, 2) $\delta^n_{(\Delta y)^n}F[y]\geqslant 0\ (\leqslant 0)$, если n четное.

В гл. 3 выведены достаточные условия экстремума. Основной результат: Пусть функционал $F[z]$ при $z=y$ имеет обобщенную вариацию второго порядка и

$$F[y+\Delta y]=F[y]+\delta_{\Delta y}F[y]+\frac{1}{2!}\delta^2_{(\Delta y)^2}F[y]+$$

$$+\|\Delta y\|^2\omega_2[y,\Delta y],$$

где $\lim_{\|\Delta y\|\to 0}\omega_2[y,\Delta y]=0$. Для того чтобы функционал $F[z]$ при $z=y$ имел локальный минимум (максимум), достаточно, чтобы: I) $\delta_{\Delta y}F[y]=0$ для всех Δy, 2) $m_2[y]>0$ ($M_2[y]\leqslant 0$) (определение нижней и верхней граней $m_2[y]$, $M_2[y]$ см. РЖМат, 1956, 8943). Эти условия достаточны для строгого локального экстремума.

В гл. 4, используя понятие обобщенной вариации, автор исследует так называемые сомнительные случаи экстремума.

В конце работы даны приложения построенной теории к вопросам экстремума обыкновенной функции двух действительных аргументов.

Примечание референта. Отмечая, что полные линейные нормированные пространства были одновременно введены Банахом, Винером и Ханом, автор называет их пространствами B. W. H. (Банаха-Винера-Хана).

Э. С. Цитланадзе

8765. К теореме сходимости метода скорейшего спуска (Письмо в редакцию). Гуань Чжао-чжи (關於斜量法收斂性定理(合編者的信). 關肇直), 自然科學學報, Цзыжань кэсюэ сюэбао, 1956, № 2, 329—331 (кит.)

Указывается, что некоторые результаты Гуань Цзиваня (Цзыжань кэсюэ сюэбао, 1955, № 1, 113—140), доказанные для n-мерного пространства, можно распространить на гильбертово пространство.

1. Пусть $f(x)$ — функционал, определенный в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и имеющий вторую непрерывную производную в смысле Фреше, причем удовлетворяются следующие условия:

1) $|f(x_0)|=\eta_0$ для некоторого $x_0\in\mathfrak{H}$;

2) на шаре $S:\|x-x_0\|\leqslant\alpha(\beta\eta_0)^{1/2}$ имеют место неравенства

$$|f(x)|/\|f'(x)\|^2\leqslant\beta,\ \|f''(x)\|\leqslant K,$$

где

$$\alpha\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{\beta K}{2}}\right)^m=\frac{1}{1-\left(\frac{\beta K}{2}\right)^{1/2}},\qquad \beta K<2.$$

Тогда уравнение $f(x)=0$ имеет решение $x^*\in S$. Последовательные приближения $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{\|f'(x_n)\|^2}f'(x_n)$, построенные исходя из элемента x_0, сходятся к точному решению x^*. Оценка ошибки n-го приближения такова:

$$\|x_n-x^*\|\leqslant\alpha\sqrt{\beta\eta_0}\left(\sqrt{\frac{\beta K}{2}}\right)^n.$$

2. Пусть $f(x)$ — функционал в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, имеющий вторую непрерывную производную. Выберем начальное приближение x_0 решения уравнения $f(x)=0$, удовлетворяющее условиям:

1) $\|f'(x_0)\|\geqslant 1/\beta_0$;

2) $|f(x_0)|/\|f'(x_0)\|\leqslant\eta_0$;

3) на шаре $S:\|x-x_0\|\leqslant\frac{1-\sqrt{1-2\alpha_0}}{\alpha_0}\eta_0$ имеет место неравенство $\|f''(x)\|\leqslant K$, где $\alpha_0\equiv\beta_0\eta_0K\leqslant 1/2$. Тогда уравнение имеет точное решение x^* в шаре S, а процесс приближения сходится к x^*. Оценка ошибки n-го приближения такова: $\|x_n-x^*\|\leqslant 2^{-(n-1)}(2\alpha_0)^{2^{n-1}}\eta_0$.

Таким образом, метод Гуань Цзи-ваня можно применить для решения нелинейных интегральных и других функциональных уравнений. Ши Чжун-цы, Цзэн Кэнь-чэнь

8766. Регулярные и сингулярные отображения дистрибутивной структуры в полную векторную структуру, удовлетворяющие функциональному уравнению $f(x\vee y)+f(x\wedge y)=f(x)+f(y)$.

Бауэр (Reguläre und singuläre Abbildungen eines distributiven Verbandes in einen vollständigen Vektorverband, welche der Funktionalgleichung $f(x \vee y) + f(x \wedge y) = f(x) + f(y)$ genügen Bauer Heinz), J. reine and angew. Math., 1955, **194**, № 1—4, 141—179 (нем.)

Работа посвящена выяснению некоторых свойств функций f на произвольной дистрибутивной структуре V со значениями в полной векторной структуре W над упорядоченным полем K, аналогичных свойствам меры на булевой σ-алгебре множеств. Рассматриваются „оценки" структуры V, т. е. ее отображения f в W, удовлетворяющие условию $f(x \vee y) + f(x \wedge y) = f(x) + f(y)$. Вводится множество $\Phi_c = \Phi_c(W, V)$ оценок, подчиняющихся условию $f(c) = 0$, где c — какой-либо фиксированный элемент из V, и имеющих относительно ограниченную вариацию (это означает, что для любой функции f и для любого сегмента $[a, b] \subset V$ существует такой элемент $s \in W$, что для любого „разбиения" $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b$ справедливо неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| \leqslant s$$

$(|e| = \sup(e, -e) = e^+ + e^-$ в $W)$.

Множество Φ_c представляет собой полную векторную структуру. Для каждой оценки f из Φ_c и произвольного множества $S \subset V$ определяется оценка $f_S \in \Phi_c$ следующим образом: если $f \geqslant 0$, то $f_S = \inf\{h\}$, где $h \in \Phi_c$, $h \geqslant 0$ и $h(x) \equiv f(x)$ на S; в общем случае $f_S = (f^+)_S - (f^-)_S$. Оценка $f \in \Phi_c$ называется S-регулярной (S-сингулярной), если $f_S = 0$ ($f_S = f$). Совокупность S-регулярных элементов из Φ_c представляет собой выпуклое („насыщенное", по терминологии автора) линейное подпространство векторного пространства Φ_c, содержащее верхние грани всех своих ограниченных сверху (в Φ_c) подмножеств. Подобным же строением обладает совокупность всех S-сингулярных элементов из Φ_c. Одним из основных результатов работы является „теорема о разложении" (§ 4): Φ_c представляет собой прямую сумму подпространств своих S-регулярных и S-сингулярных элементов. Далее, S-регулярной и S-сингулярной частями элемента $f \in \Phi_c$ служат соответственно $f - f_S$ и f_S; при этом из $f \geqslant 0$ следует, что $f - f_S \geqslant 0$, $f_S \geqslant 0$. В частном случае, когда V — булева σ-алгебра множеств, c — нулевой элемент V, S — σ-идеал в V, $W = R$ — векторная структура действительных чисел и f — действительная вполне аддитивная функция на V, получается теорема Хана и Розенталя о разложении вполне аддитивной функции множества (Hahn H., Rosenthal A., Set functions. Albuquerque, New Mexico, 1948, стр. 42).

Элемент $f \in \Phi_c$ называется непрерывным относительно $g \in \Phi$, если f принадлежит к порожденному элементом g выпуклому линейному подпространству пространства Φ_c, содержащему верхние грани всех своих ограниченных сверху (в Φ_c) подмножеств; f называется чисто разрывным относительно g, если f и g дизъюнктны в Φ_c. В § 5 содержится „теорема о разложении лебеговского типа": каков бы ни был фиксированный элемент $g \in \Phi_c$, Φ_c есть прямая сумма подпространства, образованного непрерывными относительно g элементами из Φ_c, и подпространства чисто разрывных относительно g элементов. При этом если $f = s + u$, где s и u — соответственно непрерывная и чисто разрывная (относительно g) части элемента f, то в случае, когда $f \geqslant 0$, имеем:

$$s = \sup_n [\inf(f, n|g|)],\ u = \inf_n (f - n|g|)^+ \quad (n = 1; 2, \ldots).$$

Далее при том же $g \geqslant 0$ одновременно рассматривается разложение элемента f на S-регулярную и S-сингулярную части, где в качестве S взято множество N тех элементов $a \in \Phi_c$, для которых $g(a \wedge c) = g(a \vee c) = 0$. Разложения $f = (f - f_N) + f_N$ и $f = s + n$, вообще говоря, различны. Они совпадают в следующих двух частных случаях: 1) V — булева σ-алгебра, $W = R$, $c = 0$ и функции f, g вполне аддитивны на V; 2) V есть σ-полная векторная структура над полем R, $W = R$, f и g — непрерывные линейные функционалы на V.

Д. А. Васильков

8767. Топологии для мер и существование вероятностей перехода. Лидер (Convergence topologies for measures and the existence of transition probabilities. Leader Solomon), Pacif. J. Math., 1956, **6**, № 3, 479—490 (англ.)

Пусть X — основное множество; $\mathfrak{A}$ — некоторая булева алгебра его подмножеств; S — векторное пространство всех конечноаддитивных действительных функций на $\mathfrak{A}$; B — часть пространства S, состоящая из ограниченных функций. Для каждого из пространств S, B при помощи общего понятия сходимости (Kelley J. L., Duke Math. J., 1950, **17**, 277—283) определяется топология. Для S определяется „топология простой сходимости": F_α просто сходится к F, если $\lim F_\alpha(E) = F(E)$ для всякого $E \in \mathfrak{A}$. Для B определяется „топология ограниченной сходимости": F_α ограниченно сходится к F, если $\lim F_\alpha(E) = F(E)$ для всякого $E \in \mathfrak{A}$ и $|F_\alpha(E)| < M$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ и всех $E \in \mathfrak{A}$. Доказывается, что множество дискретных (т. е. сосредоточенных в конечном числе точек) мер плотно в S и B, и дается интегральное разложение произвольной меры по дискретным. Изучаются и топологизируются сопряженные пространства S^* и B^* и устанавливаются соотношения рефлексивности $S^{**} = S$, $B^{**} = B$. В предположении, что $\mathfrak{A}$ есть σ-алгебра подобным же образом изучается часть L пространства B, состоящая из счетноаддитивных функций. В предположении, что X есть нормальное топологическое пространство, а $\mathfrak{A}$ — совокупность всех борелевских множеств в X, изучается часть R пространства L, состоящая из регулярных мер.

В дальнейшем предполагается, что $\mathfrak{A}$ есть σ-алгебра. Пусть $p(x, t, E)$, где $x \in X$, $0 \leqslant t < \infty$ и $E \in \mathfrak{A}$, — стационарная марковская переходная функция, т. е.: а) $p(x, t, E)$ при фиксированных x и t есть вероятностная мера на $\mathfrak{A}$; б) $p(x, t, E)$ при фиксированных t и E есть измеримая функция на X; в) $p(y, s+t, E) = \int_X p(x, t, E)\, p(y, s, dx)$. Тогда формула

$$F T_t(E) = \int_X p(x, t, E)\, dF(x) \qquad (1)$$

определяет на L семейство (правых) операторов T_t со следующими свойствами: 1) T_t есть положительный линейный оператор; 2) если $F > 0$, то $\|FT_t\| = \|F\|$ ($\|F\|$ есть вариация функции F); 3) $T_t T_s = T_{t+s}$. Всякое семейство операторов со свойствами 1), 2), 3) автор называет стохастической полугруппой. Такие семейства изучались Феллером (Feller W., Ann. Math., 1952, **55**, 468—519). Оказывается, что не всякая стохастическая полугруппа может быть порождена стационарной марковской переходной функцией по формуле (1). Такое порождение возможно в том и только в том случае, если операторы T_t, помимо свойств 1), 2), 3), обладают еще свойством непрерывности в топологии ограниченной сходимости. Эта теорема решает проблему, поставленную Феллером.

В. А. Рохлин

8768. Решения некоторых проблем деления. Часть III. Деление в пространствах $\mathscr{D}'$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{L}_A$, 6.

Эренпрейс (Solutions of some problems of division. Part III. Division in the spaces $\mathscr{D}'$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{L}_A$, 6. Ehrenpreis Leon), Amer. J. Math., 1956, **78**, № 4, 685—715 (англ.)

Части I и II см. РЖМат, 1955, 5805; 1956, 3023.

. Дается полное решение проблемы деления в пространстве $\mathscr{D}'$ ($\mathscr{D}$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций, $\mathscr{D}'$ — сопряженное пространство): для любого $T \in \mathscr{D}'$ и произвольного линейного дифференциального (или дифференциально-разностного) оператора в частных производных с постоянными коэффициентами D существует такой функционал $S \in \mathscr{D}'$, что $DS = T$.

Этот результат был опубликован автором ранее без доказательства (РЖМат, 1956, 7396).

Дается также решение проблемы деления для некоторых других пространств: 1) пространства $\mathscr{H}$ всех целых функций; 2) пространства $\mathscr{L}_A$ целых функций порядка $\leqslant A$; 3) пространства $\mathcal{G}$ формальных степенных рядов; 4) пространства $\mathcal{E}$ всех бесконечно дифференцируемых функций. Автор указывает, что его методы применимы к многим другим пространствам. Автор, по-видимому, не знаком с работами И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова (РЖМат, 1955, 3291) и Б. Л. Гуревича (РЖМат, 1955, 5806), некоторые результаты которых повторяет. В. М. Борок

8769. Теория умножения обобщенных распределений. Кёниг (Multiplikationstheorie der verallgemeinerten Distributionen. König Heinz. Abhandl. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1957, № 82, 80 S.) (нем.)

Дается систематическое изложение работ автора (РЖМат, 1953, 649; 1956, 4663, 6709; Multiplikationstheorie der verallgemeinerten Distributionen. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft vorgelegter Bericht, Würzburg, 1955).

Пусть P — линейное пространство, содержащее в качестве подпространства пространство F всех непрерывных действительных функций на $R\,(-\infty < x < \infty)$, а также пространство D всех распределений (обобщенных функций). Пространство P называется системой с умножением, если: 1) допустимо линейное отображение пространства P в себя, которое на D совпадает с дифференцированием; 2) допустимо билинейное отображение пространства $D \times P$ в P, которое на $F \times F$ совпадает с умножением; 3) если $S \in D$, $A \in P$, то $(SA)' = S'A + SA'$.

Система с умножением P называется теорией умножения, если P не содержит ни одной подсистемы, являющейся системой с умножением.

Автор строит различные теории умножения. Полученные результаты дают возможность определить произведение двух распределений конечного порядка, из которых хотя бы одно имеет „изолированные сингулярности“. Именно, доказывается следующая теорема: Пусть $T = \sum_{j=0}^{k} g_j^{(j)}$, где функции g_j дифференцируемы $m+j$ раз в некоторой окрестности U_x каждой точки $x \in V$ (V — конечный интервал на прямой), за исключением, быть может, счетного числа точек, не имеющих в V предельной. Обозначим через $\dot{g}_j$ производную функции g_j, взятую в тех точках $x \in V$, в которых она существует в обычном смысле. Пусть далее S — произвольное распределение порядка m. Тогда существует теория умножения, в которой

$$ST = \sum_{j=0}^{k} S\dot{g}_j^{(j)} + R,$$

где порядок распределения R не превосходит порядка распределения T.

В частности, отсюда следуют формулы:

$$f^{(m)}\delta_y^{(k)} = -\sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i c_{m+1+k-i}(y)\,\delta_y^{(i)}, \qquad (1)$$

где $f \in F$ — произвольная функция, c_m — постоянные, зависящие от функции f, δ_y — дельта-функция в точке y.

При этом если функция f не дифференцируема в обычном смысле ни в одной окрестности точки $y \in V$, то для любого набора чисел $c_m(y)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ существует теория умножения, в которой выполнено соотношение (1).

Автор получает также следующую формулу, встречающуюся (без достаточных обоснований) в работах по физике:

$$\delta_y^{(m)}\left(\mathrm{Pf}\,\frac{1}{(x-y)^k}\right) = (-1)^k \frac{m!}{(m+k)!}\,\delta_y^{(m+k)} + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i} C_{k-1}^i d_{m+1+k-i}(y)\,\delta_y^{(i)}.$$

Здесь $\mathrm{Pf}\,\frac{1}{(x-y)^k} = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}(\log|x-y|)^{(k)}$, и постоянные $d_m(y)$ зависят от выбора теории умножения. Я. И. Житомирский

8770. Определение потенциала рассеяния по спектральной функции. I. Непрерывный спектр. Кей, Мозес (The determination of the scattering potential from the spectral measure function. I. Continuous spectrum. Kay I., Moses H. E.), Nuovo Cimento, 1955, **2**, 917—961 (англ.; рез. итал.)

Работа представляет обобщение результатов, полученных И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном (Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, **15**, 309—360). Рассматривается произвольный гамильтониан с непрерывным спектром, собственные функции которого могут быть вырождены. Всякий гамильтониан, получающийся из начального добавлением некоторого возмущающего потенциала, полностью задается оператором канонического преобразования, переводящего собственные функции начального в собственные функции возмущенного гамильтониана. Из этого оператора можно образовать оператор плотности, коммутирующий с невозмущенным гамильтонианом. Обратные уравнения, определяющие оператор канонического преобразования по оператору плотности, становятся однозначными, если от общего вида записи уравнений перейти к записи в каком-либо представлении. Вводя условие „треугольности“ на оператор канонического преобразования в выбранном представлении $\langle q|k|q'\rangle = 0$, $q' > q$, авторы получают обобщенные уравнения Гельфанда и Левитана и определяют условия однозначности их разрешимости. Таким образом, эти уравнения не являются специфическим свойством координатного представления или какого-либо специфического вида невозмущенного гамильтониана. Однако уравнения Гельфанда и Левитана могут быть записаны не во всяком представлении, а лишь в таких, в которых представитель оператора плотности обладает определенными свойствами. Свойства восстановленного таким образом возмущающего „потенциала“ не исследуются, но очевидно, что это более общий вид оператора, чем обычный зависящий от радиуса потенциал. А. Г. Чичерин

8771. Определение потенциала рассеяния по спектральной функции. II. Дискретные собственные значения и соответствующие собственные функции. Кей, Мозес (The determination of the scattering potential from the spectral measure function. II. Point eigenvalues and proper eigenfunctions. Kay I., Moses H. E.), Nuovo cimento, 1956, **3**, № 1, 66—84 (англ.; рез. итал.)

Следуя ранее изложенному методу (реф. 8770), авторы разбирают случай, когда невозмущенный гамильтониан имеет только непрерывный спектр, а возмущенный, кроме того же непрерывного спектра, еще некоторое число дискретных уровней. Для того чтобы построить оператор перехода от волновых функций невозмущенного гамильтониана к волновым функциям полного

гамильтониана, необходимо ввести добавочные решения невозмущенного гамильтониана при энергиях, соответствующих энергиям дискретных уровней возмущенного гамильтониана. Вводя эти фиктивные „собственные функции" невозмущенного гамильтониана, авторы делают возможным применение аппарата цитированной выше работы к разбираемому случаю. Полученные результаты не зависят от конкретного вида гамильтониана.

А. Г. Чичерин

8772. Определение потенциала рассеяния по спектральной функции. III. Вычисление потенциала рассеяния по оператору рассеяния для одномерного уравнения Шрёдингера. Кей, Мозес (The determination of the scattering potential from the spectral measure function. III. Calculation of the scattering potential from the scattering operator for the onedimensional Schrödinger equation. Kay I., Moses H. E.), Nuovo cimento, 1956, **3**, № 2, 276—304 (англ.; рез. итал.)

Следуя методу, изложенному в двух работах общего характера (реф. 8770, 8771), авторы разбирают случай одномерного уравнения Шрёдингера на оси, бесконечной в обе стороны. Для этого случая выводится уравнение И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана, в которое входит коэффициент отражения как функция энергии, энергии связанных состояний и нормировочные константы для связанных состояний. Спектральная функция, не имеющая физического смысла, исключена из уравнения при помощи коэффициента отражения. Потенциал как функция координаты получается из решения уравнения Гельфанда и Левитана обычным образом как производная ядра при равных параметрах. Рассматриваются условия, которые нужно наложить на коэффициент отражения и энергии связанных состояний, чтобы восстановленный потенциал обладал конечной границей со стороны налетающих частиц. Решаются три конкретных задачи: δ-образный отталкивающий, δ-образный притягивающий потенциалы и некоторый потенциал с одним связанным состоянием.

А. Г. Чичерин

8773 К. Алгебры операторов в гильбертовом пространстве (алгебры фон Нёймана). Диксмье (Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann). Dixmier Jacques, Cahiers scient., Fasc. XXV, Paris. Gauthier-Villars, 1957, 367 p.) (франц.)

Монография по теории слабо замкнутых колец операторов в гильбертовом пространстве (алгебр Нёймана в терминологии автора), в которой систематически излагается основное содержание работ Меррея, Нёймана и и автора с учетом всех главных достижений, в том числе и новейших достижений других авторов в этой области. Благодаря использованию современного функционального анализа, в том числе основных результатов общей теории нормированных колец (которые, как и основные сведения из топологии и теории операторов в гильбертовом пространстве, предполагаются известными), достигается значительная экономия в изложении, всюду очень ясном и четком. Приложения к общей теории унитарных представлений топологических групп в книге не рассматриваются.

Основной материал разбит на три главы.

В гл. I излагается общая теория алгебр Нёймана, из которой основные результаты теории факторов Меррея — Нёймана получаются как частный случай.

Алгебра Нёймана определяется как самосопряженное подкольцо $\mathfrak{A}$ кольца $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве, удовлетворяющее условию $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}'$ обозначает совокупность всех операторов $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, перестановочных со всеми операторами из $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{A}'' = (\mathfrak{A}')'$. Глава состоит из девяти параграфов.

В § 1 изучаются операторы проектирования, подалгебры и идеалы в алгебре Нёймана, а также общие свойства гомоморфизмов алгебр Нёймана; в § 2 — основные операции над алгебрами Нёймана: 1) отображение $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_E$, означающее переход от $\mathfrak{A}$ к алгебре $E\mathfrak{A}E$, рассматриваемой на $E\mathfrak{H}$, где E — оператор проектирования из $\mathfrak{A}$ или из $\mathfrak{A}'$, 2) тензорное умножение алгебр.

В § 3 вводятся различные топологии в $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ в связи с теорией линейных форм и изучаются соотношения между этими топологиями, а также между характером непрерывности линейных форм в этих топологиях. Доказывается теорема Нёймана о том, что самосопряженное подкольцо с единицей в кольце $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ является алгеброй Нёймана тогда и только тогда, когда оно замкнуто в слабой или в сильной, или в слабейшей или в сильнейшей топологиях, так что замыкания такого подкольца в этих четырех топологиях совпадают. Здесь же доказывается теорема Капланского о плотности единичного шара.

В § 4 рассматриваются положительные функционалы и положительные линейные отображения; важную роль здесь и в дальнейшем играет введенное автором понятие нормального положительного функционала; доказывается, что нормальность положительного функционала f равносильна его непрерывности в слабейшей топологии, а также представимости в виде $f = \sum (Ax_k, x_k)$, где $x_k \in \mathfrak{H}$, $\sum_k \|x_k\|^2 < \infty$. В силу имеющейся связи между положительными нормальными функционалами и положительными линейными отображениями отсюда получается ряд результатов о нормальных положительных отображениях, в частности теорема автора о представимости всякого нормального гомоморфизма алгебр Нёймана в виде произведения трех специальных гомоморфизмов, а именно: 1) отображения типа $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_E$, 2) отображения $A \to A \times 1$, где $\times$ обозначает тензорное умножение; 3) пространственного изоморфизма.

В § 5 излагается теория гильбертовых алгебр; в § 6 вводится понятие следа. Так называется вещественная числовая функция φ со значениями $\geqslant 0$ и $\leqslant +\infty$, определенная на $\mathfrak{A}^+$ (множестве всех элементов A^*A, $A \in \mathfrak{A}$) и удовлетворяющая условиям: 1) $\varphi(S+T) = \varphi(S) + \varphi(T)$ для S, $T \in \mathfrak{A}^+$; 2) $\varphi(\lambda S) = \lambda\varphi(S)$ для $\lambda \geqslant 0$, $S \in \mathfrak{A}^+$ (причем считается, что $0 \cdot +\infty = 0$); 3) $\varphi(USU^{-1}) = \varphi(S)$ для $S \in \mathfrak{A}^+$ и унитарного $U \in \mathfrak{A}$. Изучаются общие свойства следов, в частности, нормальных следов и следов в гильбертовых алгебрах. Доказывается, что во всякой гильбертовой алгебре можно естественным образом определить след, и обратно, по нормальному следу в алгебре Нёймана $\mathfrak{A}$, удовлетворяющему некоторым естественным дополнительным условиям, можно построить гильбертову подалгебру $\mathscr{H}$, для которой он является естественным следом, и притом так, что алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре левых операторов в $\mathscr{H}$. В этом же параграфе дается классификация алгебр Нёймана на конечные, полуконечные, собственно бесконечные и чисто бесконечные в зависимости от того, какие следы в них существуют, строятся пространство L^1, отвечающее следу, и определитель, отвечающий конечному следу.

В § 7 излагается спектральное разложение абелевых алгебр Нёймана; § 8 посвящен второй классификации алгебр Нёймана, точнее, выделению класса алгебр $\mathfrak{A}$, для которых $\mathfrak{A}'$ абелевы (дискретные алгебры) и алгебр $\mathfrak{A}$, для которых никакая алгебра $\mathfrak{A}_E$ не дискретна (непрерывные алгебры); устанавливается, что $\mathfrak{A}$ (непрерывна (дискретна) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}'$ непрерывна (дискретна). Для случая фактора обе классификации приводят к известной меррей-нёймановской классификации на факторы классов I_n, I_∞, II_1, II_∞ и III

В § 9 строятся примеры, показывающие, что факторы каждого класса действительно существуют. Следует отметить более простое и обозримое построение примеров факторов (особенно фактора класса III), чем до сих пор имевшееся в литературе.

Гл. II посвящена теории континуального разложения алгебр Неймана и состоит из шести параграфов. § 1 посвящен теории измеримых семейств гильбертовых пространств. Рассматривается локально компактное топологическое пространство Z с положительной мерой ν, каждой точке ζ которого отнесено гильбертово пространство $\mathfrak{H}(\zeta)$. Это семейство называется ν-измеримым, если существует такое линейное пространство $\mathfrak{F}$ вектор-функций $x=\{x(\zeta)\}$, $x(\zeta)\in\mathfrak{H}(\zeta)$, что: 1) для $x\in\mathfrak{F}$ числовая функция $\|x(\zeta)\|$ ν-измерима; 2) если вектор-функция $y=\{y(\zeta)\}$ такова, что функция $(x(\zeta), y(\zeta))$ ν-измерима для всех $x\in\mathfrak{F}$, то $y\in\mathfrak{F}$; 3) существует такая последовательность $x_n\in\mathfrak{F}$, что при каждом $\zeta\in Z$ линейная оболочка векторов $x_n(\zeta)$ плотна в $\mathfrak{H}(\zeta)$.

Из последнего условия вытекает, что автор ограничивается только случаем сепарабельных пространств $\mathfrak{H}(\zeta)$. Функции $x=\{x(\zeta)\}$, принадлежащие $\mathfrak{F}$, называются ν-измеримыми; те из них, которые удовлетворяют условию $\int\|x(\zeta)\|^2\,d\nu(\zeta)<\infty$, образуют гильбертово пространство, которое автор называет гильбертовым интегралом пространств $\mathfrak{H}(\zeta)$ и обозначает $\int^{\oplus}\mathfrak{H}(\zeta)\,d\nu(\zeta)$.

В § 2 изучаются ν-измеримые операторные функции $A=\{A(\zeta)\}$, где $A(\zeta)$ — оператор в $\mathfrak{H}(\zeta)$, при этом операторная функция называется ν-измеримой, если для любой измеримой вектор-функции $x=\{x(\zeta)\}$ вектор-функция $\{A(\zeta)x(\zeta)\}$ также ν-измерима. Если ограниченный линейный оператор A в $\int^{\oplus}\mathfrak{H}(\zeta)\,d\nu(\zeta)$ задается формулой $A\{x(\zeta)\}=\{A(\zeta)x(\zeta)\}$, то он называется разложимым и обозначается: $A=\int^{\oplus}A(\zeta)\,d\nu(\zeta)$. Доказывается, что оператор $A\in\mathfrak{L}\left(\int^{\oplus}\mathfrak{H}(\zeta)\,d\nu(\zeta)\right)$ разложим тогда и только тогда, когда он перестановочен со всеми „диагональными“ операторами $\int^{\oplus}\alpha(\zeta)\cdot 1\,d\nu(\zeta)$, где $\alpha(\zeta)$ — числовая существенно ограниченная ν-измеримая функция. Далее, в § 3 дается определение и изучаются свойства измеримых семейств $\mathfrak{A}(\zeta)$ алгебр Неймана в измеримом семействе пространств $\mathfrak{H}(\zeta)$ и по такому семейству строится алгебра $\mathfrak{A}=\int^{\oplus}\mathfrak{A}(\zeta)\,d\nu(\zeta)$, состоящая из операторов $A=\int^{\oplus}A(\zeta)\,d\nu(\zeta)$, $A(\zeta)\in\mathfrak{A}(\zeta)$. Также и здесь накладывается „условие счетности“, именно, семейство $\mathfrak{A}(\zeta)$ называется измеримым, если существует такая последовательность измеримых семейств операторов $T_n(\zeta)$, что локально почти всюду в Z, $\mathfrak{A}(\zeta)$ есть алгебра Неймана, порожденная операторами $T_n(\zeta)$, $n=1, 2, \ldots$. Основной результат, именно, соотношение $\left(\int\mathfrak{A}(\zeta)\,d\nu(\zeta)\right)'=\int\mathfrak{A}(\zeta)'\,d\nu(\zeta)$ доказывается для пространства Z со счетной базой. При доказательстве используется теорема В. Янкова об униформизации A-множеств (Докл. АН СССР, 1941, **30**, 591—592). Автор, однако, при изложении этой теоремы в добавлении V ссылается на неопубликованные рукописи Бурбаков, а не на работу Янкова, по-видимому, оставшуюся неизвестной автору. Вероятно, автору осталась также неизвестной статья референта и С. В. Фомина (Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 2, 111—142), в которой аналогичным образом применяется теорема Янкова и на которую автор также не ссылается. Отметим, что теорема Янкова применяется автором и в ряде других мест, в том числе ранее в § 3.

Параграф 4 посвящен разложению гильбертовых алгебр; § 5 — разложению следов; здесь, в частности, решается вопрос о зависимости между классом алгебры $\int^{\oplus}\mathfrak{A}(\zeta)\,d\nu(\zeta)$ и классом алгебр $\mathfrak{A}(\zeta)$.

В § 6 решаются задача о разложении гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ по заданному коммутативному подкольцу $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ и вопрос о единственности разложения; для частного случая, когда $\mathfrak{Z}$ есть центр алгебры Неймана $\mathfrak{A}$, отсюда получается теорема о разложении $\mathfrak{A}$ на факторы. Другой важный частный случай (именно тот, когда $\mathfrak{Z}$ есть максимальное коммутативное подкольцо в $\mathfrak{A}'$), при котором получается разложение алгебры $\mathfrak{A}$ на неприводимые алгебры, не рассматривается.

Глава III состоит из восьми параграфов.

В §§ 1—2 излагается меррей-неймановская теория размерности, в частности вопросы сравнения, конечности и бесконечности проектирующих элементов алгебры Неймана; использование предыдущих результатов о следах оказывается здесь очень удобным и сокращает изложение. Далее, в § 3 дается описание дискретных алгебр Неймана, в §§ 4—5 излагаются принадлежащие автору теория отображения $x\to x_{\pi}$ алгебры $\mathfrak{A}$ в ее центр, обобщающая теорию следа, и связанная с ней теория характеров Годмана. Однако автор не указывает на связь этой последней теории с теорией характеров топологических групп и особенно с теорией характеров полупростых групп Ли, из которой по существу и возникла излагаемая в книге теория характеров. В § 6 для случая конечных алгебр Неймана $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ строится числовая функция $C(\zeta)$ ($0<C(\zeta)<+\infty$ локально почти всюду) на локально компактном пространстве (функции связи алгебры $\mathfrak{A}$ в терминологии автора); доказывается, что если алгебры Неймана $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ конечны, то $*$-изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ является пространственным изоморфизмом тогда и только тогда, когда функции связи алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ совпадают.

В § 7 излагается теория аппроксимативно конечных (гиперконечных в терминологии автора) факторов; строится пример не аппроксимативно конечного фактора класса II_1. В § 8 дается другое определение конечной алгебры Неймана, более близкое к меррей-неймановскому; именно, алгебра $\mathfrak{A}$ называется конечной, если из соотношений $T\in\mathfrak{A}$, $T^*T=1$ следует $TT^*=1$.

Доказывается, что второе определение эквивалентно первоначальному.

В конце каждого параграфа имеются библиографические указания и упражнения. В конце книги помещены 5 добавлений, в которых излагаются некоторые необходимые сведения из теории коммутативных колец, теории операторов в гильбертовом пространстве, неймановской теории измеримых отображений и теории униформизации аналитических множеств. Кроме того, в конце книги помещены примечания относительно терминологии, указатель обозначений, предметный указатель и список литературы — 172 названия.

Замеченные опечатки:

Стр. 37, строка 19 сверху: вместо $\mathfrak{L}_*$ должно быть $\mathfrak{L}^*$; стр. 182, строки 16 и 15 снизу: вместо T_j, T_j^*, $T_j(\zeta)$, $T_j(\zeta)^*$ должно быть T_j', $T_j'^*$, $T_j'(\zeta)$, $T_j'(\zeta)^*$; стр. 273,

строка 10 снизу: напечатано $F \in \mathfrak{Z}$ вместо $E \in \mathfrak{Z}$; стр. 281, строка 3 снизу: вместо $C^1_{\mathfrak{A}}$ должно быть $C^{-1}_{\mathfrak{A}}$; стр. 281, строка 1 снизу: напечатано Z вместо Z'; стр. 292, строка 6 снизу: вместо $(1-\varepsilon)F \leqslant TF \leqslant F$ должно быть $(1-\varepsilon)F \leqslant TF \leqslant (1+\varepsilon)F$; стр. 293, строки 1 и 11 сверху: не указан индекс 2 в обозначении норм. М. А. Наймарк

См. также: 8467, 8525, 8573, 8616, 8646, 8660, 8696, 8716

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

8774. Об аксиоматической трактовке вероятности. Лось (On the axiomatic treatment of probability. Loś J.), Colloq. math., 1955, **3**, № 2, 125—137 (англ.)

Критически излагаются разные способы аксиоматического обоснования теории вероятностей. Анализируются первая и вторая аксиоматика Колмогорова (см. Основные понятия теории вероятностей, 1937, М. — Л., Гл. ред. общетехнич. лит-ры и номографии; Algèbres de Boole métriques complètes. VI Zjazd Matematykow Pol. 1948. Dodatek do Rocznika. Pol. Tow. Mat. 20 p. 21—30). Излагаются попытки Лукасевича и Мазуркевича обосновать теорию вероятностей с помощью исчисления высказывания. Подчеркиваются результаты польских математиков. M. Rosenblat-Rot

8775. Понятие вероятности и ее применения. Мюллер (La notion de probabilité et ses applications. Muller Maurice), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1955, **55**, № 1, 35—56 (франц.)

С позиции экзистенциализма Гуссерля (Husserl) и логического эмпиризма Венского кружка (Cercle de Vienne) делается попытка анализа философских основ понятия вероятности и его связи с частотой. Работа проникнута субъективным идеализмом (вероятность, по мнению автора, зависит от нашего невежества). M. Rosenblatt-Rot

8776. Об одной задаче теории вероятностей. II. Пашковский (Sur un problème du calcul de probabilité. (II). Mouvement d'une molecule sur plusieures droites parallèles). Paszkowski S.), Studia math., 1956, **15**, № 3, 273—299 (франц.) Ч. I см. РЖМат, 1957, 5743.

Масса распределяется непрерывным образом на нескольких параллельных линиях так, что полулиния имеет бесконечную массу. Молекула, движущаяся по этой системе линий случайным образом, может: 1) изменять направление движения (отражение); 2) переходить ортогонально с одной линии на другую (скачок) и 3) поглощаться массой (абсорбция). Предполагается, что отражение, скачок и абсорбция в неперекрывающихся интервалах являются стохастически независимыми. Кроме того, вероятности отражения скачка и абсорбции в интервалах $I_1, I_2, \ldots, I_n$, концентрирующих соответственно массы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и лежащих на различных линиях так, что каждый из них является ортогональной проекцией остающихся, зависят только от направления движения молекулы и от системы $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Исследуются вероятности отражения, скачка и абсорбции. Автор дает также функциональные уравнения для этих вероятностей. Если распределения масс идентичны на всех линиях, то при дополнительных предположениях регулярности функциональные уравнения влекут за собой систему дифференциальных уравнений первого порядка для вероятностей отражения, скачка и абсорбции. Автор детально исследует эти уравнения в случае, когда никакая из параллельных линий не выделяется особо, т. е. когда вероятности отражения, скачка и абсорбции не зависят от того, на какой параллельной линии лежит рассматриваемый интервал. K. Urbanik

8777. Разорение азартного игрока. Мейнес (Het probleem van de ruinering der spelers. Meinesz M.), Statist. neerl., 1956, **10**, № 2, 87—97 (гол.; рез. англ.)

Рассматривается проблема разорения игроков, у которых начальные капиталы есть a и b, соответственно. Вместо схемы Бернулли имеем тогда цепь Маркова с коэффициентами менее простыми, чем обычные биномиальные коэффициенты. Более общее выражение получается для распределения вероятности прибыли игрока после некоторого числа игр при условии, что ни одна из них не приводит к разорению. Вероятность разорения после некоторого числа игр есть специальный случай, аналогичный результатам Лапласа, Лагранжа и других, но дается в виде, более удобном для численных расчетов.

Указываются некоторые другие результаты, полученные методом, развитым в статье. По резюме автора

8778. Метризация классов сходимости распределений. Такано (A metrization of class-convergences of distributions. Takano Kinsaku), Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo, 1953, **5**, 1—7 (англ.)

Используя функцию концентрации, введенную Куниеда, автор определяет (не характеризуемое простым образом) расстояние между двумя функциями распределения (ф. р.). Доказываются свойства, например полнота, некоторых пространств ф. р., метризованных при помощи этого определения. Используя эту метрику, автор может дать простое доказательство одной теоремы Хинчина (Изв. Н.-и. ин-та матем. и механ. Томского ун-та, 1937, **1**, 261—266; Takano, Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo, 1951, **3**, 7—15). Доказываются обобщения этой теоремы.

J. Wolfowitz. Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 4, 329

8779. О многомерных функциях распределения. Такано (On the many-dimensional distribution functions. Takano Kinsaku) Ann. Inst. Statist. Math. Tokyo, 1953, **5**, 41—58 (англ.)

Расстояние в смысле Леви между двумя p-мерными функциями распределения (ф. р.) $F(x_1, \ldots, x_p)$ и $G(x_1, \ldots, x_p)$ определяется как наименьшее d, при котором

$$F(x_1 - d, \ldots, x_p - d) - d \leqslant G(x_1, \ldots, x_p) \leqslant F(x_1 + d, \ldots, x_p + d) + d$$

для всех $x_1, \ldots, x_p$. Автор показывает, что основные свойства этого расстояния, которые доказаны для одномерных ф. р., имеют место также для p-мерных ф. р. Различные результаты из предыдущей статьи автора (реф. 8778) о различных метриках и топологиях распространяются на p-мерные ф. р. J. Wolfowitz

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 4, 329

8780. О некоторых распределениях вероятности, связанных с процессами Пуассона. Нисида (On some probability distributions concerning Poisson process. Nisida Tosio), Math. Japonicae, 1953, **3**, 7—12 (англ.)

Пусть $X(t)$ — процесс Пуассона с параметром λ и $X(0) = 0$. Пусть $T(n, \omega) = \min\{t;\ X(t, \omega) = n\}$. Для данного t пусть $T_0(t, \omega)$ и $T_1(t, \omega)$ — ближайшие к t точки скачков. Тогда $T_0(t, \omega)$ и $T_1(t, \omega)$ независимы и автор находит их распределения. Пусть $L(t)$ — время между t-м и $(t+1)$-м скачком. Пусть $M(n)$ и $m(n)$ —

максимальное и минимальное из $L(ij)$ для одного частного набора из n чисел i_j. Показано, что распределение широты $M(n) - m(n)$ такое же, как у $M(n-1)$, которое в свою очередь приводится к $Pr\{M(n-1) < b\} = (1-e^{\lambda b})^{n-1}$ независимо от частного набора чисел i_j. Находятся распределение величины $[M(n) + m(n)]/2$ и другие родственные распределения.

J. L. Snell

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 51

8781. Вероятностные методы в теории чисел. Кубилюс И. П., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 11, 59—60

Краткий обзор исследований по применениям теоретико-вероятностных методов в теории чисел. (Полный обзор см. РЖМат, 1957, 1117). Приводятся следующие результаты автора.

Пусть $f(m)$ — вещественная сильно аддитивная арифметическая функция. Пусть

$$A_n = \sum_{p \leqslant n} \frac{f(p)}{p}; \quad B_n = \left(\sum_{p \leqslant n} \frac{f^2(p)}{p} \right)^{1/2}$$

где p обозначает простое число.

Предположим, что $B_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ и существует функция $r(n)$ такая, что $B_{r(n)} = B_n(1 + o(1))$, $\ln r(n) = o(\ln n)$. Для того чтобы число решений неравенства $f(m) < A_n + B_n(x)$ в натуральных $m \leqslant n$ было равно $nF(x) + o(n)$ в точках непрерывности $F(x)$, ($F(x)$ — функция распределения), необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неубывающая функция $K(u)$ с вариацией 1, что

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{\substack{p \leqslant n \\ f(p) \leqslant B_n u}} \frac{f^2(p)}{p} \to K(u) \qquad (n \to \infty)$$

при всех $u \neq 0$. Если эти условия выполнены, то логарифм характеристической функции $\ln \varphi(t)$ для $F(x)$ определяется формулой

$$\ln \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - 1 - itu) \frac{1}{u^2} \alpha K\ u\Big|$$

В несколько более слабой формулировке эта теорема автором доказана ранее (РЖМат, 1955, 5508).

При тех же условиях число решений неравенства $f(m) < f(m+1) + B_n x$ в натуральных $m \leqslant n$ равно $nF_1(x) + o(n)$ в точках непрерывности $F_1(x)$, где характеристическая функция для $F_1(x)$ равна $|\varphi(t)|^2$.

Пусть сильно аддитивная вещественная функция $f(m)$ удовлетворяет условиям $B_n \to \infty$; $\max\limits_{p \leqslant n} |f(p)| = o(B_n)$ и пусть $f_n(m) = \sum\limits_{\substack{P < n \\ P \mid m}} f(p)$, $a(t)$ и $b(t)$ — две определенные в интервале $[0, 1]$ вещественные функции, имеющие непрерывные производные и удовлетворяющие неравенству $a(t) < 0 < b(t)$. Тогда число натуральных $m \leqslant n$, удовлетворяющих системе неравенств

$$a\left(\frac{B_p}{B_n}\right) < \frac{f_p(m) - A_p}{B_n} < b\left(\frac{B_p}{B_n}\right) \quad (p = 2, 3, 5, \ldots; (p \leqslant n)$$

при $n \to \infty$, равно $nv(0, 0) + o(n)$, где $v(x, t)$ есть то решение уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,$$

которое при $t = 1$, $a(1) < x < b(t)$ принимает значение 1, а при $0 \leqslant t < 1$, $x = a(t)$ и $0 \leqslant t < 1$, $x = b(t)$ принимает значение 0 (см. РЖМат, 1956, 1938).

M. Rosenblat-Rot

8782. О единственности предельного распределения для системы стохастических дифференциальных уравнений. Блюменфельд В. Н., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 4, 739—741

Каждому разбиению отрезка $(0, T)$ на части $\Delta t_i \leqslant \lambda$ точками t_i ставится в соответствие последовательность двумерных случайных величин (X_i, Y_i), связанных уравнениями

$$X_{i+1} = X_i + [f_1(X_i, Y_i, t_i, \Delta t_i, \alpha_{t_i}) + A_1(X_i, Y_i, t_i, \Delta t_i)\sqrt{\Delta t_i}]\sqrt{\Delta t_i},$$

$$Y_{i+1} = Y_i + [f_2(X_i, Y_i, t_i, \Delta t_i, \alpha_{t_i}) + A_2(X_i, Y_i, t_i, \Delta t_i)\sqrt{\Delta t_i}]\sqrt{\Delta t_i},$$

где α_{t_i} — независимые случайные величины, а X_0, Y_0 — заданные случайные величины с плотностью вероятностей $p_0(x, y)$. При некоторых общих условиях распределение вероятностей для (X_n, Y_n) при $n \to \infty$ $(\Delta t_i \to 0)$ имеет предел, который является распределением с плотностью $p(x, y, t)$, удовлетворяющей второму дифференциальному уравнению А. Н. Колмогорова

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial (A_1 p)}{\partial x} - \frac{\partial (A_2 p)}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 (B_{11} p)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 (B_{12} p)}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 (B_{22} p)}{\partial y^2}\right]$$

при начальном условии $p(x, y, 0) = p_0(x, y)$. Здесь $A_k = A_k(x, y, t, 0)$; $B_{kl} = M f_k(x, y, t, 0, \alpha_t) f_l(x, y, t, 0, \alpha_t)$; $k = l = 1, 2$.

Высказанное утверждение является обобщением соответствующей одномерной теоремы С. Н. Бернштейна.

Доказывается, что уравнение для $p(x, y, t)$ при заданном начальном условии имеет единственное непрерывное решение, если выполняются общие условия, обеспечивающие существование решения $p(x, y, t)$, и если при каждом фиксированном t выполняется условие $\lim\limits_{R \to \infty} \max\limits_{x^2 + y^2 \geqslant R^2} p(x, y, t) = 0$, причем $p(x, y, t)$ непрерывно по t равномерно относительно X, Y. Эта теорема обобщается на многомерный случай. Отмечается, что если матрица B_{kl} не вырождается, то предельное распределение $p(x, y, t)$ существует и при разрывных начальных данных.

А. С. Монин

8783. О случайных решениях некоторых уравнений в частных производных. Басс (Sur les solutions aléatoires de certaines équations aux dérivées partielles. Bäss Jean), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 318—319 (франц.)

Рассматриваются „случайные решения" нелинейного уравнения Бюргерса (РЖМех, 1957, 10525)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\mu\alpha \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(μ и α — константы), получаемые в предположении, что начальные значения $u(x, 0) = f(x)$ являются случайной функцией. Утверждается, что в таком случае характеристическая функция $\varphi_t(y) = E \exp\{iyu(x, t)\}$ решения $u(x, t)$ в точке x в произвольный момент t не может однозначно определяться значением этой характеристической функции в момент $t = 0$; это обстоятельство поясняет необходимость введения в статистическую теорию турбулентности „характеристического функционала" Хопфа (Hopf E., J. Rational Mech. and Analysis, 1952, **1**, № 1, 87—123). Доказательство сделанного утверждения лишь намечается в одной фразе; оно подробно проведено в более поздней работе автора (РЖМат, 1956, 4542).

А. М. Яглом

8784. Элементарный метод доказательства предельных теорем теории вероятностей. Фрей-

ман Г. А., Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 1, 57—73

Рассматривается уравнение

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = N, \qquad (1)$$

где x_i может принимать целые различные значения $a_j (j = 1, \ldots, r)$. Каждому числу a_j при данном $i = 1, \ldots, k$ соответствует зависящий от k вес $p_{ji} \geqslant 0$. Пусть $S_i = \sum_{j=1}^{r} p_{ji}$. Если $S_i = 1$ $(i = 1, \ldots, k)$, можно считать, что имеются случайные величины $\xi_i (i = 1, \ldots, k)$, принимающие значения a_j с вероятностями p_{ji}. Пусть $p(N) = \sum p_{j_1 1} p_{j_2 2} \cdots p_{j_k k}$, где каждое слагаемое соответствует решению уравнения (1) $x_1 = a_{j_1}, x_2 = a_{j_2}, \ldots, x_k = a_{j_k}$ и сумма берется по всем решениям. При $p_{ji} \equiv 1$ $(i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, r)$ $p(N)$ дает число представлений N в виде суммы слагаемых a_j; при $S_i = 1$ $(i = 1, \ldots, k)$ асимптотика числа $p(N)$ дает предельную теорему для случая суммирования серии различно распределенных случайных величин.

Без ограничения общности можно считать, что $p_{1i} \geqslant p_{ji} (j = 2, 3, \ldots, r;\ 1 \leqslant i \leqslant k)$ и что $p_{1i} = p (1 \leqslant i \leqslant k)$ и что p не зависит от k. Пусть $P_j = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} (p_{ji} m_i)$, где m_i при заданном i есть число тех p_{ji}, $1 \leqslant s \leqslant k$, для которых $p_{js} \geqslant p_{ji}$ и нумерация a_j такая, что $P_2 \geqslant P_3 \geqslant \ldots \geqslant P_r$. Пусть h_s — общий наибольший делитель разностей $a_i - a_j (i,\ j = 1, \ldots, s)$, а r_1 — наименьшее число такое, что $h_{r_1} = h_r$. Доказывается теорема: Если $P_{r_1} \to \infty$ и $R/P_2^{\gamma} \to 0$, то для $N = ka_1 + lh_r$ справедлива асимптотическая формула:

$$p(N) = \frac{\Pi h_r}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{y^2}{2}} [1 + 0(RP_2^{-\gamma} + e^{-cP_{r_1}})],$$

где

$$M_i = \frac{1}{S_i} \sum_{j=1}^{r} a_j p_{ji}; \quad D_i = \frac{1}{S_i} \sum_{j=1}^{r} a_j^2 p_{ji} - M_i^2;$$

$$M = \sum_{i=1}^{k} M_i,$$

$$D = \sum_{i=1}^{k} D_i, \ \Pi = S_1 S_2 \ldots S_k; \ R_j = \sum_{i-1}^{k} p_{ji}, \ R = \max_{2 \leqslant j \leqslant r} R_j,$$

$$y = \frac{N - M}{\sqrt{D}}, \ |y| < cP_2^{\alpha}, \ 0 < \alpha < 1/6, \ \gamma = \frac{3}{2} - 3\alpha; \ c > 0$$

и достаточно мала.

Автор проводит доказательство элементарным путем, применяя свой метод (РЖМат, 1956, 975).

M. Rosenblatt-Rot

8785. Локальная теорема для плотностей сумм независимых случайных величин. Петров В. В., Теория вероятностей и ее применения, 1956, **1**, № 3, 349—367 (рез. англ.)

Доказываются три теоремы о сходимости плотностей нормированных сумм Z_n последовательности независимых неодинаково распределенных случайных величин X_j в случае существования дисперсии у всех X_j, $j = 1, 2, \ldots$

В теореме 1 дается оценка для быстроты сходимости плотностей сумм Z_n к нормальной плотности $\varphi(x)$ в виде неравенства

$$|p_n(x) - \varphi(x)| \leqslant CL_n,$$

где C — некоторая постоянная, L_n — дробь Ляпунова. Условия довольно общие, отчасти они накладываются на произведения характеристических функций X_j. Даны примеры, когда эти условия выполняются.

Теоремы 2 и 3 обобщают локальные теоремы А. Я. Хинчина, применяемые им в статистической механике. Теорема 3 дает асимптотическое разложение плотности $p_n(x)$.

В. Г. Рихтер

8786. Обобщение одного неравенства Колмогорова. Гайек, Реньи (Generalization of an inequality of Kolmogorov. Hájek J., Rényi A.), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, **6**, № 3-4, 281—283 (англ.; рез. русск.)

Пусть $\{\xi_k\}$ — последовательность независимых случайных величин с нулевыми средними значениями и дисперсиями $D_k^2 (k \geqslant 1)$, $c_k (k \geqslant 1)$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, тогда доказывается, что для всякого $\varepsilon > 0$ и любых натуральных чисел n, m $(n < m)$ будет иметь место:

$$P\left\{\max_{n \leqslant k \leqslant m} \left| c_k \sum_{i=1}^{k} \xi_i \right| \geqslant \varepsilon \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \left(c_n^2 \sum_{k=1}^{n} D_k^2 + \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2 D_k^2 \right).$$

При $n = 1$, $c_k = 1$ $(k \geqslant 1)$, в частности, получается известное неравенство Колмогорова. Используя доказанное авторами неравенство, можно сильно упростить доказательство усиленного закона больших чисел.

M. Rosenblatt-Rot

8787. Усиленный закон больших чисел в случае когда первого момента не существует. Дерман, Роббинс (The strong law of large numbers when the first moment does not exist. Derman C., Robbins H.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. A., 1955, **41**, № 8, 586—587 (англ.)

Пусть имеется последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин X_i, с функцией распределения $F(x)$ и $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Доказывается, что если для некоторых постоянных $0 < \alpha < \beta < 1$, $c > 0$ имеется $F(x) \leqslant 1 - Cx^{-\alpha}$ для достаточно больших x, причем $\int_{-\infty}^{0} |x|^{\beta} dF(x) < \infty$ тогда $\lim_{n \to \infty} P\left[\frac{S_n}{n} \to +\infty\right] = 1$.

M. Rosenblatt-Rot

8788. Методы функционального анализа в предельных теоремах теории вероятностей. Прохоров Ю. В., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 11, 46

Краткий обзор методов изучения слабой сходимости последовательности распределения вероятностей P_{ξ_n} при $n \to \infty$ к некоторому распределению P_{ξ}, где ξ_n, ξ — случайные элементы из какого-либо функционального пространства типа Банаха. В обзоре указываются условия того, чтобы из сходимости $P_{\xi_n}(A) \to P_{\xi}(A)$ для множеств A специального вида (например, для цилиндрических множеств, или для „полос", т. е. для множеств вида $\{x : a(t) \leqslant x(t) \leqslant b(t)\}$, где $a(t)$, $b(t)$ — гладкие функции) вытекала слабая сходимость. Указывается, что применением метода характеристических функционалов получен ряд результатов.

Более полное изложение см. РЖМат, 1957, 671.

M. Rosenblatt-Rot

8789. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. Прохоров Ю. В., Теория вероятностей и ее применения, 1956, **1**, № 2, 177—238 (рез. англ.)

Первая глава посвящена изучению слабой сходимости мер в полном сепарабельном метрическом простран-

стве $\mathfrak{R}$. Автор вводит расстояние $L(\mu_1, \mu_2)$ между мерами μ_1 и μ_2 следующим образом: пусть F — замкнутое множество, F^ε — его ε-окрестность и пусть $\varepsilon_{1,2}(\varepsilon_{2,1})$ есть нижняя грань тех ε, для которых при всех замкнутых F

$$\mu_2(F) < \mu_1(F^\varepsilon) + \varepsilon \qquad (\mu_1(F) < \mu_2(F^\varepsilon) + \varepsilon).$$

Тогда $L(\mu_1, \mu_2) = \max(\varepsilon_{1,2}, \varepsilon_{2,1})$.

Доказывается, что совокупность мер в $\mathfrak{R}$ вместе с расстоянием $L(\mu_1, \mu_2)$ образует полное сепарабельное метрическое пространство $\mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ и L-сходимость эквивалентна слабой сходимости мер. Показывается, что для того, чтобы множество $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{D}(\mathfrak{R})$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы $\sup_{\mu \in \mathfrak{R}} \mu(\mathfrak{R}) < \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$ существовал компакт K_ε такой, что для каждой меры $\mu \in \mathfrak{R}$ $\mu(\mathfrak{R} \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. В последнем параграфе главы предполагается, что $\mathfrak{R}$ — пространство Гильберта. Здесь выводятся условия компактности семейств распределений в $\mathfrak{R}$, выраженные через соответствующие характеристические функционалы $\chi(f, \mu) = \int_{\mathfrak{R}} e^{i(f, \mu)}\, d\mu$. Если для последовательности распределений выполнены эти условия и соответствующие характеристические функционалы сходятся к некоторой непрерывной функции $\chi(f)$, то последовательность распределений слабо сходится к распределению P с $\chi(f, P) = \chi(f)$.

Во второй главе рассматриваются главным образом условия компактности семейств распределений в соответствующих процессу функциональных пространствах и вытекающие из них условия сходимости распределений, соответствующих последовательности случайных процессов, к предельному распределению. Из доказанных теорем приведем следующие:

Для компактности семейства $\mathfrak{R}$ распределений в $C[0, 1]$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовали число μ_ε и функция $\omega(\delta, \varepsilon) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, для которых

$$P\{x : |x(0)| < M_\varepsilon\} > 1 - \varepsilon/2$$

и

$$P\{x : \omega_x(\delta) \leqslant \omega(\delta, \varepsilon) \text{ при всех } \delta\} > 1 - \varepsilon/2$$

для всех $P \in \mathfrak{R}$ ($\omega_x(\delta)$ — модуль непрерывности функции $x(t)$). Пусть $D[0, 1]$ — пространство функций с разрывами первого рода. Обозначим

$$\widetilde{\omega}_\varphi(\delta) = \sup_{\{\Delta : |\Delta| \leqslant \delta\}} \sup_{\tau \in \Delta} \min\{\omega_\varphi[\tau_1, \tau), \omega_\varphi(\tau, \tau_2]\}.$$

(Здесь $\Delta = [\tau_1, \tau_2]$, $\omega_\varphi(A)$ — колебания функции φ на множестве A). Для компактности семейства $\mathfrak{R}$ распределений в $D[0, 1]$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовали числа μ_ε и δ_ε функция $\omega(\delta, \varepsilon) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$ такие, что для всех $P \in \mathfrak{R}$

$$P\{\varphi : \sup_{t \in [0, 1]} |\varphi| \leqslant M_\varepsilon\} > 1 - \varepsilon/2, \qquad (1)$$

$$P\{\varphi : \widetilde{\omega}_\varphi(\delta) \leqslant \omega(\delta, \varepsilon) \text{ при всех } \delta \leqslant \delta_\varepsilon\} > 1 - \varepsilon/2. \quad (1)$$

Пусть марковский процесс с числовой прямой в качестве множества состояний определен начальным распределением $P^0(A)$ и переходными вероятностями $P(t_1, u_1; t_2, A)$, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1$. Для того чтобы распределение, соответствующее этому процессу, удовлетворяло условию (2), достаточно, чтобы при любых $\lambda > 0$, u_1 и t_1, t_2 с $|t_2 - t_1| \leqslant \delta$

$$P(t_1, u_1; t_2, \{u : |u - u_1| > \lambda\}) \leqslant \psi_\lambda(\delta),$$

где $\psi_\lambda(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$.

Для выполнения условия (1) достаточно, дополнительно к этому, чтобы

а) существовало $\delta_0 > 0$ такое, что при $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_1 + \delta_0$ для каждого конечного интервала I $P(t_1, u_1; t_2, I) \leqslant \leqslant v_I(u_1)$, где $v_I(u) \to 0$ при $|u| \to \infty$;

б) существовала такая конечная система точек $t_i \in [0, 1]$, $t_i < t_{i+1}$, $i = \overline{1, s}$, $t_1 = 0$, $t_s = 1$ с расстоянием между соседними точками $\leqslant \delta_0$, что

$$P\{\varphi : \max_{0 \leqslant i \leqslant s} |\varphi(t_i)| < M\} > 1 - w(M),$$

где $w(M) \to 0$ при $M \to \infty$.

В конце главы, в качестве иллюстрации, с помощью вышеприведенного выводится полученное Донскером обобщение результатов Колмогорова о сходимости эмпирического распределения к теоретическому (Donsker M. L., Ann. Math. Statistics, 1952, **23**, 277—281).

В третьей главе излагаются условия сходимости распределений „случайных ломаных" к предельному распределению. Рассматривается последовательность серий $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots, \xi_{n,k_n}$ независимых в каждой серии случайных величин, для которых

$$\lim \max P\{|\xi_{n,k}| > \varepsilon\} = 0, \qquad (3)$$

$$M\xi_{n,k} = 0,\ \sigma_{n,k}^2 = D\xi_{n,k} > 0,\ \sum_{k=1}^{k_n} \sigma_{n,k}^2 = 1.$$

Пусть

$$\zeta_{n,0} = 0,\ \zeta_{n,k} = \sum_{i=1}^{k} \xi_{k,i},\ t_{n,k} = D\zeta_{n,k}.$$

Распределение случайного вектора $\{\zeta_{n,0}, \ldots, \zeta_{n,k_n}\}$ порождает распределение P_n в пространстве $C[0, 1]$, сосредоточенное на подпространстве функций, принимающих значения $\zeta_{n,i}$ в точках $t_{n,i}$ и линейных в промежутках $(t_{n,i}, t_{n,i+1})$. Доказывается, что для того чтобы P_n слабо сходилось к распределению Винера, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\lambda > 0$

$$\lim_n \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| > \lambda} x^2\, dF_{n,k}(x) = 0,$$

где

$$F_{n,k}(x) = P\{\xi_{n,k} < x\}.$$

Далее, при выполнении условия (3) для какой-нибудь последовательности точек $0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \ldots < t_{n,k_n} = 1$, для которой

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant k_n} (t_{n,j} - t_{n,j-1}) > 0$$

и

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant k_n} (t_{n,j} - t_{n,j-1}) \to 0,$$

рассматривается порожденное распределением случайного вектора $\{\zeta_{n,0}, \ldots, \zeta_{n,k_n}\}$ распределение P_n в $D[0,1]$, сосредоточенное на подпространстве функций, принимающих значения $\zeta_{n,k}$ при $t_k \leqslant t < t_{k+1}$. Для того, чтобы P_n слабо сходились к распределению в $D[0, 1]$, соответствующему стохастически непрерывному процессу с независимыми приращениями, необходимо и достаточно, чтобы

а) при каждом n

$$\max_{\Delta, |\Delta| \leqslant \delta} P\left\{\left|\sum_{t_{n,k} \in \Delta} \xi_{n,k}\right| > \lambda\right\} \leqslant C(\lambda, \delta),$$

где Δ имеет вид $(t_n, t]$ и $C(\lambda, \delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и $\lambda > 0$, а $\sup_{0 < \delta \leqslant 1} C(\lambda, \delta) \downarrow 0$ при $\lambda \to \infty$;

б) при любых $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_s \leqslant 1$ конечномерные распределения $P_n^{t_1, t_2, \ldots, t_s}$ слабо сходились к $P^{t_1, t_2, \ldots, t_s}$. Этот результат обобщает теорему, доказанную для случая одинаково распределенных слагаемых Скороходом (РЖМат, 1957, 666).

В четвертой главе рассматривается последовательность независимых случайных величин с конечными

абсолютными третьими моментами c_k, математическими ожиданиями, равными нулю, и суммой дисперсий, равной единице. Пусть $L=\sum_{k=1}^{n} c_k$, $\zeta_0=0$, $\zeta_k=\sum_{j=1}^{k}\xi_j$, $t_k=D\zeta_k$, P — порожденное случайным вектором $\{\zeta_0,\ldots,\zeta_n\}$ распределение в $C[0,1]$, сосредоточенное на функциях, принимающих значения ζ_k в точках t_k и линейных в промежутках (t_k, t_{k+1}), H — множество тех $x\in C[0,1]$, для которых $a_1(t)\leqslant x(t)\leqslant a_2(t)$, где $a_1(0)<0<a_2(0)$, $a_1(t)<a_2(t)$, $0<t\leqslant 1$ и $|a_i(t'')-a_i(t')|\leqslant K|t''-t'|$. Тогда доказывается, что если W — винеровское распределение в $C[0,1]$ то $|P(H)-W(H)|\leqslant \varepsilon(L)L^{1/4}\log^2 L$, где $\varepsilon(L)\to 0$ при $L\to 0$.

В дополнении 1 в пространство $D[0,1]$ вводится явным образом расстояние, превращающее $D[0,1]$ в полное сепарабельное метрическое пространство. Сходимость в смысле этого расстояния равносильна сходимости, введенной в пространстве $D[0,1]$ Скороходом (РЖМат, 1957, 666).

В дополнении 2 рассматриваются некоторые распределения в $C[0,1]$, абсолютно непрерывные относительно винеровского распределения, и вычисляются их плотности относительно его. В. Г. Винокуров

8790. Об асимптотических свойствах некоторых статистик, аналогичных величине X^2. Гихман И. И., Теория вероятностей и ее применения, 1956, **1**, № 3, 344—348 (рез. англ.)

Рассматривается N независимых испытаний с возможными исходами $E_1, E_2, \ldots, E_n$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, где $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$, $p_i>0$; m_i — число испытаний с исходом E_i. Определяется производящий оператор марковского процесса (из уравнения Колмогорова)

$$L=\sum_{s=1}^{r} a_s(t,x)\frac{\partial}{\partial x_s}+\frac{1}{2}\sum_{s,j=1}^{r} b_{sj}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_s\partial x_j}.$$

Исследуется асимптотическое поведение величин

$$\chi^2(k)=\sum_{i=1}^{k}\frac{N}{p_i}\left(\frac{m_i}{N}-p_i\right)^2,\quad \sum_{1}^{k} p_i=\alpha(k),$$

$$\eta_2(N,k)=\sum_{j=1}^{k}\sqrt{N}\left[N\left(\frac{m_i}{N}-p_i\right)^2-p_i\right],$$

$$\eta_3(N,k)=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{N}{\sqrt{p_i}}\left(\frac{m_i}{N}-p_i\right)^2-\sqrt{p_i}\right],$$

$$\eta_0(N,k)=\sum_{j=1}^{k}\sqrt{N}\left(\frac{m_i}{N}-p_i\right),$$

$$\eta_4(N,k)=\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{N}{\sqrt{p_i}}\left(\frac{m_i}{N}-p_i\right)^2-\sqrt{p_i}-\frac{1}{\sqrt{p_i}}\left(\frac{m_i}{N}-p_i\right)\right\}.$$

при выполнении некоторых из условий:

$$\lim_{N\to\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant m} p_i=0, \qquad (B)$$

$$\lim_{N\to\infty}\min_{1\leqslant i\leqslant m} Np_i=\infty, \qquad (A_1)$$

$$\lim_{N\to\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant m} Np_i=0; \qquad (A_2)$$

$$Np_i\to 1/c,\quad i=1,2,\ldots,m, \qquad (A_3)$$

$$1/Np_{i+1}-c(\alpha(i))\to 0. \qquad (A_3')$$

Приводятся (без доказательства) следующие утверждения:

1. При выполнении условий (B) и (A_1) последовательность серий случайных величин $[\chi^2(k)-k]/\sqrt{2n}$ сходится к процессу с производящим оператором $\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{r}\frac{\partial^2}{\partial x_s^2}$ (броуновский процесс).

2. При выполнении условий (B) и (A_2) имеет место $\eta_0(N,k)-\eta_2(N,k)\to 0$, в частности предельный закон распределения величины $\max_{i\leqslant k\leqslant n}|\eta_2(N,k)|$ совпадает с предельным распределением А. Н. Колмогорова.

3. Если выполнено (B) и (A_2) или (A_3'), то последовательности $\{\eta_0(N,k)\}$, и $\{\eta_4(N,k)\}$ асимптотически независимы, и $\{\eta_4(N,k)\}$ сходится к броуновскому процессу.

4. Если выполнены условия (B) и (A_3'), то последовательность серий $\{\eta_0(N,k)\}$, $\{\eta_3(N,k)\}$ сходится к непрерывному двумерному процессу Маркова с производящим оператором

$$-\frac{x}{1-t}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\sqrt{c(t)}\,x}{1-t}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\sqrt{c(t)}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+(2+c(t))\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

В. П. Швальб

8791. Современное состояние и виды на будущее в теории стохастических процессов. Дуб (Present state and future prospects of stochastic process theory. Doob J. L.), Proc. Internat. Congr. Mathematicians, 1954. Vol. 3. Groningen-Amsterdam, 1956, 348—355 (англ.)

Кратко характеризуются следующие общие направления в исследовании случайных процессов: 1) основные концепции теории стандартных случайных процессов, 2) стандартные стохастические процессы с взаимно не зависимыми случайными переменными, 3) стандартные марковские процессы, 4) стандартные стационарные процессы, 5) стандартные мартингалы, 6) новые стандартные стохастические процессы, 7) нестандартные процессы. Под стандартным процессом подразумевается процесс, выборочные функции которого принимают числовые значения и зависят от одной переменной. В качестве примеров проблем, указанных автором, как ждущих дальнейшего развития, упомянем о теории диффузных процессов и выяснении взаимоотношений между различными определениями и методами исследования, о применении мартингалов к теории граничных задач для уравнений в частных производных, о теории нелинейных дифференциальных уравнений со случайными функциями и их стационарных решений.

Указывается, что в разработке теории нестандартных процессов сделаны только первые шаги и что в этой области можно ожидать появления новых и интересных классов случайных процессов. Вместе с тем автор считает, что имеется необходимость в некоторых новых идеях, расширяющих область важных специфических теоретико-вероятностных концепций. И. И. Гихман

8792. Предельные распределения сумм случайных величин конечного, однородного и непрерывного марковского процесса. Ониеску (Repartiţia limită a sumelor de variabile aleatoare ale unui proces Markov finit omogen şi continuu. Onicescu O.), An. Univ. „C. I. Parhon." Ser. ştiinţ. natur., 1956, № 12, 9—12 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор указывает метод предельного перехода, при помощи которого получается характеристическая функция суммы; при этом сумма дает интеграл в интервале (s,t)-процесса.

Указываются также условия, чтобы эта функция имела нормированный предел, когда интервал стре-

мится к бесконечности. Вообще этот предел является гауссовым. Резюме автора

8793. Теория кривых в гильбертовом пространстве со стационарными n-ми приращениями. Пинскер М. С., Изв. АН СССР., сер. матем., 1955, **19**, № 5, 319—344

Подробное изложение результатов, в основном ранее полученных автором и независимо А. М. Ягломом и опубликованных в совместных заметках (РЖМат, 1953, 1277; 1955, 2320). Я. И. Хургин

8794. Слабая сходимость случайных процессов с траекториями без разрывов второго рода и так называемый „эвристический" подход к критериям согласия типа Колмогорова-Смирнова. Ченцов Н. Н., Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 1, 155—161 (рез. франц.)

Доказываются теоремы:

Теорема 1. Если $\xi(t)$ — сепарабельный случайный процесс, $0 \leqslant t \leqslant 1$ и

$$M\,|\xi(t_1)-\xi(t_2)|^p\,|\xi(t_2)-\xi(t_3)|^q \leqslant C\,|t_1-t_3|^{1+r}, \quad (1)$$

где p и $q \geqslant 0$, $r > 0$, $t_1 < t_2 < t_3$, C — константа, то с вероятностью 1 все траектории процесса не имеют разрывов второго рода.

Последовательность случайных процессов $\xi_n(t)$ называется слабо сходящейся к $\xi_0(t)$, если для любой последовательности моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ последовательность совместных распределений случайных величин $\xi_n(t_1), \xi_n(t_2), \ldots, \xi_n(t_n)$ слабо сходится к совместному распределению величин $\xi_0(t_1), \ldots, \xi_0(t_n)$.

Теорема 2. Предположим, что последовательность сепарабельных процессов $\xi_n(t)$ слабо сходится к сепарабельному процессу $\xi_0(t)$, причем процессы $\xi_0(t)$ удовлетворяют условию (1) с константами p, q, r, c, не зависящими от n. Пусть $g(t)$ и $f(t)$ — кусочно-непрерывные функции, $g(t) < f(t)$, полунепрерывные в точках разрыва, соответственно, сверху и снизу, и $P\{g(t)+z \leqslant \xi_0(t) < f(t)-z$; при всех $t\} \underset{z\to 0}{\to} P\{g(t) \leqslant \xi_0(t) \leqslant f(t)$; при всех $t\}$.

Тогда

$$P\{g(t) \leqslant \xi_n(t) \leqslant f(t); \text{ при всех } t\} \underset{n\to\infty}{\to} P\{g(t) \leqslant \xi_0(t) \leqslant f(t); \text{ при всех } t\}.$$

Автор отмечает, что теорема 1 была указана ему А. Н. Колмогоровым. И. И. Гихман

8795. Обобщенные случайные процессы. Гельфанд И. М., Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 5, 853—856

Исходя из примера белого шума, который не охватывается классическим определением стохастического процесса, автор развивает мысль о необходимости введения расширенного определения при помощи теории обобщенных функций.

Употребляя терминологию своей другой статьи (РЖМат, 1955, 3291), автор определяет обобщенный случайный процесс: это линейный функционал F на множестве K, для которого заданы для каждой функции $\varphi \in K$ и любых a и b вероятности неравенства $a < F(\varphi) < b$. Эти вероятности должны удовлетворять естественным требованиям согласованности и непрерывности.

Это определение позволяет ввести понятие производной F_1 обобщенного процесса F. При этом должно соблюдаться условие $P\{a < F_1(\varphi) < b\} = P\{-a > F(\varphi') > -b\}$ по определению.

Далее вводятся понятия корреляционного функционала $c(\varphi)$, спектральной функции и характеристического функционала для процесса F. Рассматриваются обобщенные процессы со стационарными приращениями n-го порядка. Наконец, изучается класс так называемых процессов с независимыми в каждой точке значениями. F является таким процессом, если $F(\varphi_1)$ и $F(\varphi_2)$ независимы всякий раз, когда $\varphi_1(t)\,\varphi_2(t) = 0$. Дается общий вид корреляционного функционала для такого процесса:

$$c(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i,k=0}^{\infty} Q_{ik}(t)\,\varphi^{(i)}(t)\,\varphi^{(k)}(t)\,dt,$$

где $Q_{ik}(t)$ — непрерывные функции. На каждом конечном интервале лишь конечное число функций Q_{ik} отлично от нуля, $c(\varphi) \geqslant 0$. В. Г. Рихтер

8796. К общему определению количества информации. Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н., Яглом А. М., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 4, 745—748

Система $\mathfrak{S}$ всех „случайных событий" предполагается булевой алгеброй, на которой задано распределение вероятностей — аддитивная неотрицательная функция. Под „испытанием" понимается подалгебра алгебры $\mathfrak{S}$. Если подалгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{L}$ конечны, то количество информации, содержащейся в результатах испытания $\mathfrak{A}$ относительно результатов испытания $\mathfrak{L}$, определяется формулой Шеннона

$$I(\mathfrak{A}, \mathfrak{L}) = \sum_{i,j} P(A_iB_j) \log \frac{P(A_iB_j)}{P(A_i)\,P(B_j)}.$$

В общем случае

$$I(\mathfrak{A}, \mathfrak{L}) = \sup_{\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A},\ \mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}} I(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{L}_1),$$

где $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{L}_1$ — конечные подалгебры из $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}$.

Имеют место следующие свойства: 1. $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{L}) = I(\mathfrak{L}, \mathfrak{A})$. 2. $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{L}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{L}$ независимы. 3. Если наименьшие подалгебры $[\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{L}_1]$, $[\mathfrak{A}_2 \cup \mathfrak{L}_2]$, содержащие $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{A}_2 \cup \mathfrak{L}_2$, независимы, то

$$I([\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2], [\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2]) = I(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{L}_1) + \mathfrak{L}(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{L}_2).$$

4. Если $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$, то $I(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{L}) \leqslant I(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{L})$.

Далее приводятся:

Теорема 1. Если алгебра $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}$ всюду плотна на $\mathfrak{A}$ в смысле метрики $\rho(A, B) = P(AB' \cup A'B)$, то $I(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{L}) = I(\mathfrak{A}, \mathfrak{L})$.

Теорема 2. Если $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_n \subseteq \ldots$, то для $\mathfrak{A} = \bigcup_n \mathfrak{A}_n$ $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{L}) = \lim_{n\to\infty} I(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{L})$.

Теорема 3. Если последовательность распределений P^n сходится на $[\mathfrak{A} \cup \mathfrak{L}[$ к распределению P, то для соответствующих количеств информации

$$\lim_{n\to\infty} \inf I^{(n)}(\mathfrak{A}, \mathfrak{L}) \geqslant I(\mathfrak{A}, \mathfrak{L}).$$

Пусть теперь $\mathfrak{S}$ — σ-алгебра, а распределение $P(A)$ σ-аддитивно. Пусть X — пространство с определенной в нем σ-алгеброй S_X измеримых множеств. „Случайным элементом" ξ пространства X называется гомоморфное отображение $\xi^*(A) = B$ алгебры S_X в алгебру $\mathfrak{S}$. Пусть $\mathfrak{S}_\xi = \xi^*(S_X)$. По определению $I(\xi, \eta) = I(\mathfrak{S}_\xi, \mathfrak{S}_\eta)$. Условие $(\xi, \eta)^*(A \times B) = \xi^*(A)\,\xi^*(B)$ определяет гомоморфизм σ-алгебры $S_{X\times Y}$ произведения пространств $X \times Y$ в $\mathfrak{S}$. В X и $X \times Y$ определяются меры $\mathrm{P}_\xi(A) = P(\xi^*(A))$, $\mathrm{P}_{\xi,\eta}(C) = P((\xi, \eta)^* C)$ и $\Pi = \mathrm{P}_\xi \times \mathrm{P}_\eta$. По теореме Радона — Никодима

$$\mathrm{P}_{\xi\eta}(C) = \int_C \int a(x, y)\,d\mathrm{P}_\xi\,d\mathrm{P}_\eta + S(C).$$

Теорема 4. Если $I(\xi, \eta)$ конечно, то $S(C) = 0$. В этом случае

$$I(\xi, \eta) = \int\int_{XY} a(x, y) \log a(x, y)\, dP_\xi\, dP_{\eta_1}.$$

Если X и Y — полные метрические пространства, S_X и S_Y — алгебры их борелевских множеств, то:

Теорема 5. Если для случайных элементов $\xi \in X$, $\eta \in Y$ распределения $P^{(n)}_{\xi, \eta_1}$ слабо сходятся к распределению $P_{\xi\eta_1}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \inf I^n(\xi, \eta) \geqslant I(\xi, \eta).$$

В. Г. Винокуров

8797 **К. Введение в расчет вероятности. Прекопа** (Bevezetés a valószínuségszámításba. Prékopa Andras. Budapest, 1956, 96 l., 20 ft), Magyar nemzeti bibliogr., 1956, № 6, 192 (венг.)

8793 **К. Число и случайность. Введение в комбинаторику, теорию вероятностей и статистику при помощи наглядных средств. Хогбен** (Zahl und Zufall. Eine Einf. in d. Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitslehre und Stat'stik mit anschaul. Hilfsmitteln. Hogben Lancelot. Übers. aus dem Engl., München, Oldenbourg, 1956, 483 S. ill., 58.50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, **A**, № 36, 2545 (нем.)

8799 **Случайные функции: лапласиан, случайная функция, зависящая от точки гильбертова пространства. Леви** (Random functions; a Laplacian random function depending on a point of Hilbert space. Lévy Paul. Univ. Calif. Press, 1956, p. p. 195—205, 50 c), Cumul. Book Index, 1956, **59**, № 9, 71 (англ.)

8800 **Д. Динамические системы под действием случайных сил. Коронкевич А. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Львовск. ун-т, Львов, 1957

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

8801. **Некоторые результаты, полезные в многомерном анализе. Пиллай** (Some results useful in multivariate analysis. Pillai K. C. S.), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 4, 1106—1114 (англ.)

Выражения

$$\begin{vmatrix} \int_0^x x_k^{q_k}(1-x_k)^{r_k} e^{tx_k}\, dx_k & \dots & \int_0^x x_k^{q_1}(1-x_k)^{r_1} e^{tx_k}\, dx_k \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_0^{x_2} x_1^{q_k}(1-x_1)^{r_k} e^{tx_1}\, dx_1 & \dots & \int_0^{x_2} x_1^{q_1}(1-x_1)^{r_1} e^{tx_1}\, dx_1 \end{vmatrix}$$

и

$$\begin{vmatrix} \int_0^y y_k^{a_k} e^{-ty_k}/(1+y_k)^b\, dy_k & \dots & \int_0^y y_k^{a_1} e^{-ty_k}/(1+y_k)^b\, dy_k \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_0^{y_2} y_1^{a_k} e^{-ty_k}/(1+y_1)^b\, dy_1 & \dots & \int_0^{y_2} y_1^{a_1} e^{-ty_1}/(1+y_1)^b\, dy_1 \end{vmatrix}$$

где при развертывании определителей нельзя переставлять порядок интегрирования, названы псевдодетерминантами. Выведены рекуррентные формулы, облегчающие подсчет таких выражений. Указано на применение полученных результатов к изучению распределения корней детерминантного уравнения Фишера и Хью.

С. С. Кислицын

8802. **О линейных комбинациях нескольких переменных. Уэлш** (On linear combinations of several variances. Welch B. L.), J. Amer. Statist. Assoc., 1956, **51**, № 273, 132—148 (англ.)

Автор занимается распределением статистики

$$v = \lambda_1 s_1^2 + \dots + \lambda_k s_k^2,$$

где s_i^2 — независимые выборочные дисперсии. Рассматривается нормальное приближение и для случая $\lambda_i > 0$ χ^2-приближение с так избранным числом степеней свободы F, что коэффициент вариации не изменяется.

J. Hájek

8803. **Упорядоченные семейства распределений. Леман** (Ordered families of distributions. Lehmann E. L.), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**, № 3, 399—419 (англ.)

Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайный вектор с функцией распределения P_θ, зависящей от действительного параметра θ. Сравниваются следующие определения упорядоченности множества распределений:

(A) Для любых $\theta < \theta'$ существуют вектор-функции $g = (g_1, \dots, g_n)$ и $g' = (g'_1, \dots, g'_n)$ такие, что 1) $g(x) \leqslant g'(x)$ (понимается как неравенства между соответствующими компонентами) для всех x; 2) распределения $g(X)$ и $g'(X)$ есть P_θ и $P_{\theta'}$ соответственно.

(B′) Если $\theta < \theta'$, то для каждой возрастающей функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ (если $x \leqslant x'$, то $\varphi(x_1, \dots, x_n) \leqslant \varphi(x'_1, \dots, x'_n)$

$$E_\theta \varphi(X) \leqslant E_{\theta'} \varphi(X).$$

Этому условию эквивалентно условие:

(B) Если $\theta < \theta'$, то для каждого возрастающего множества S (если $x \in S$ и $x \leqslant x'$, то $x' \in S$)

$$P_\theta(S) \leqslant P_{\theta'}(S).$$

В предположении существования плотности $p_\theta(x)$ распределений P_θ относительно некоторой σ-конечной меры.

(C) Если $\theta < \theta'$, то отношение вероятностей $p_{\theta'}(x)/p_\theta(x)$ возрастает по x.

Если выполнено условие (A), то имеет место и условие (B). В остальном условия (A), (B) и (C) несравнимы, как показывают приведенные в работе примеры. Но если $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы, тогда из условия (C) следует условие (B), а условия (A) и (B) эквивалентны.

Понятие упорядоченных множеств распределений применяется для изучения условий монотонности функций мощности критериев по отношению вероятностей, а также для сравнения экспериментов в смысле Блекуэлла (Blackwell D., Proc. 2-nd Berkeley Symposium on Math. Statist. and Probab. Univ. California Press, Berkeley, 1951, pp. 93—102).

В. С. Королюк

8804. **Допустимость T^2-критерия Хотеллинга. Стейн** (The admissibility of Hotelling's T^2-test. Stein Charles), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 3, 616—623 (англ.)

Пусть $\mathfrak{X}$ есть множество, $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра подмножеств $\mathfrak{X}$, Θ — некоторое множество, а Θ_0 — непустое собственное подмножество Θ, и для каждого $\theta \in \Theta$ пусть P_θ есть вероятностная мера на $\mathfrak{B}$. Наблюдаем случайный элемент X, распределенный в соответствии с P_θ, где θ есть неизвестный элемент Θ; и хотим проверить гипотезу H_0: $\theta \in \Theta_0$. Критерий есть $\mathfrak{B}$-измеримая функция φ на $\mathfrak{X}$ со значениями на замкнутом интервале $[0, 1]$, интерпретируемая таким образом, что если мы наблюдаем X, то отвергаем гипотезу H_0 с вероятностью $\varphi(X)$. Говорят, что критерий φ_0 является допу-

стимым, если не существует критерия φ такого, что

$$\int \varphi\, dP_{\theta_0} \leqslant \int \varphi_0\, dP_{\theta_0} \quad \text{для всех} \quad \theta_0 \in \Theta_0,$$

$$\int \varphi\, dP_\theta \geqslant \int \varphi_0\, dP_\theta \quad \text{для всех} \quad \theta \in \Theta - \Theta_0,$$

со строгим неравенством для некоторого $\theta_0 \in \Theta_0$ или для некоторого $\theta \in \Theta - \Theta_0$.

В определение экспоненциального семейства входит действительное линейное пространство конечной размерности $\mathfrak{X}$, мера μ на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ всех обычных борелевских подмножеств $\mathfrak{X}$, подмножество Θ сопряженного пространства $\mathfrak{X}'$ (линейное пространство всех действительных линейных функций на $\mathfrak{X}$) такое, что для всех $\xi \in \Theta$

$$\psi(\xi) = \int e^{\xi x}\, d\mu(x) < \infty,$$

и, наконец, функция P на Θ со значениями на множестве вероятностных мер на $\mathfrak{B}$, заданных формулой

$$P_\xi(A) = \frac{1}{\psi(\xi)} \int_A e^{\xi x}\, d\mu(x)$$

для всех $A \in \mathfrak{B}$.

Хорошо известно, что любое множество несингулярных многомерных нормальных распределений может быть выражено как экспоненциальное семейство. В дальнейшем доказывается теорема о допустимости определенных критериев для простых гипотез в многомерных экспоненциальных семействах. На ее основе доказывается допустимость T^2-критерия Хотеллинга. В заключение разбираются случаи, когда методы данной работы уже не действуют. Б. М. Клосс

8805. Достаточные статистики с лишними параметрами. Фрейзер (Sufficient statistics with nuisance parameters. Fraser D. A. S.), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 3, 838—842 (англ.)

Предлагается следующее обобщение понятия достаточной статистики. Пусть X — случайная величина, определенная в измеримом пространстве $\mathfrak{X}(\mathfrak{A})$, и пусть $\{P_{\theta\eta} \mid (\theta, \eta) \in \Theta \times H\}$ — класс вероятностных распределений для X, $t(x)$ — статистика, отображающая $\mathfrak{X}(\mathfrak{A})$ в измеримое пространство $\mathfrak{Y}(\mathfrak{B})$; $P^T_{\theta\eta}$ — мера в $\mathfrak{Y}(\mathfrak{B})$, индуцированная $t(x)$. $t(x)$ называется достаточной статистикой по θ для класса мер $\{P_{\theta\eta} \mid (\theta, \eta) \in \Theta \times H\}$, если существует функция $P_\eta(A \mid t)$ такая, что $P_{\theta\eta}(A \cap t^{-1}(B)) = \int_B P_\eta(A \mid t)\, dP^T_\theta(t)$ для всех $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, где мера, индуцированная $t(x)$, не зависима от η.

Доказана теорема: Если $t(x)$, — достаточная по θ статистика для класса мер $\{P_{\theta\eta} \mid (\theta, \eta) \in \Theta \times H\}$, то существует равномерно наиболее мощный критерий для выбора одной из двух конкурирующих гипотез: $\theta = \theta_0$, $\eta \in H$ и $\theta = \theta_1$, $\eta \in H$, и он может быть выбран не зависимым от η. Для выборки объема n из генеральной совокупности с непрерывной функцией распределения $F_\theta(x)$ получен следующий результат: Если $\xi_\beta(F)$ таково, что $F(\xi_\beta) = \beta$, то для выбора одной из двух конкурирующих гипотез: $\xi_\beta(F_\theta) = \theta$, $\theta \in \Omega$ и $\xi_\beta(F_\theta) > 0$, $\theta \in \Omega$ равномерно наиболее мощным критерием является количество положительных наблюденных значений из выборки. В. П. Швальб

8803. Критерии случайности для точек на прямой. Бартон, Дейвид (Tests for randomness of points on a line. Barton D. E., David F. N.), Biometrika, 1956, **43**, № 1, 104—112 (англ.)

Рассматриваются приближенные распределения сумм упорядоченных или неупорядоченных интервалов для проверки гипотезы случайности для точек на прямой. Предполагается, что на отрезке единичной длины случайным образом разбросаны $n-1$ точек, что дает n случайных интервалов. Пусть точки разбросаны на расстояниях $\{x_i\}$ от одного конца ($i = 1, 2, \ldots, n-1$), так что

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1}.$$

Запишем

$$d_1 = x_1,\ d_i = x_i - x_{i-1}\ (1 < i \leqslant n-1),\ d_n = 1 - x_{n-1}.$$

Эти $\{d_i\}$ можно расположить в новый ряд в соответствии с их величиной; новый ряд обозначим $\{g_i\}$, при этом уже

$$g_1 \leqslant g_2 \leqslant \ldots \leqslant g_n.$$

Пусть

$$d_i = g_{r_i} \quad \text{и} \quad g_i = d_{r'_i}.$$

Предлагаются тогда четыре критерия:

$$R = \sum_{i=1}^n i r'_i, \qquad Y = \sum_{i=1}^n i d_i,$$

$$G = \sum_{i=s}^n r_i g_i, \qquad G^* = n \sum_{i=1}^n d_i g_i.$$

При изучении R можно использовать тот факт, что для $n > 10$ $R\sqrt{n}$ распределено приближенно нормально.

Точное распределение для Y легко находится, так как

$$Y = \sum_1^n i d_i = n - \sum_1^{n-1} x_i.$$

Это точное распределение, однако, не имеет большого значения, так как среднее $n-1$ независимых прямоугольных величин стремится очень быстро с возрастанием n к нормально распределенному. Поэтому приближенно мы имеем, что $Y' = 1 - Y/n$ есть нормальная величина.

При изучении распределения G рассматривается более общая величина

$$G_{st} = \sum_{i=s}^t r_i g_i \quad (s \leqslant t \leqslant n).$$

Находятся как полное распределение для величины G_{st}, так и ее моменты и кумулянты.

Точное распределение для G^* подсчитано лишь для случаев $n = 2, 3$.

Ожидается, что критерий Y чувствителен к отклонениям от случайности, когда вероятность изменяется монотонно вдоль единичного отрезка. Это свойство хорошо выполняется и для G. G^*, с другой стороны, ожидается чувствительным к любого типа отклонению от случайности, в котором интервалы становятся либо слишком регулярными, либо слишком нерегулярными. В заключение высчитываются все четыре критерия для приводимой таблицы. Б. М. Клосс

8807. Свойства некоторых тестов сравнения двух выборок, основывающихся на специальной мере расхождения. Уэгнер (Properties of some two — sample tests based on a particular measure of discrepancy. Wegner L. H.), Ann. Math. Statistics, 1956, **27**, № 4, 1036—1046 (англ.)

Развивается теория критериев проверки гипотезы H_0 равенства двух непрерывных функций распределения F и G по данным двух независимых выборок объемов m и n из генеральных совокупностей, распределенных по законам F и G соответственно. Важнейший из этих критериев был предложен Леманом (Lehmann, Ann. Math. Statistics, 1951, **22**, 165—179). Он основывается на рассмотрении функционала $\int (F-G)^2\, d\left(\frac{F+G}{2}\right)$ в ка-

честве меры расхождения; для него существует несмещенная оценка с минимальной дисперсией, выражающаяся через статистику

$$Q_{mn} = \binom{m}{2}^{-1}\binom{n}{2}^{-1}\sum_{l=2}^{l=n-1}\sum_{k=1}^{l-1}\sum_{j=2}^{m}\sum_{i=1}^{j-1} X_{ijkl},$$

причем $X_{ijkl}=1$, если $\max(x_i, x_j) < \min(y_k y_l)$ или $\min(x_i x_j) > \max(y_k y_l)$, и $x_{ijkl}=0$ в противоположном случае. Кроме Q_{mn}, рассматриваются также критерии $D = \int (S-T)\, d\left(\frac{S+T}{2}\right)$, где S и T — эмпирические функции распределения двух выборок и $d = \int (S-T)^2 dT$. Изучаются соотношения между Q_{mn}, D и d, находятся их математические ожидания и дисперсии. Устанавливается с помощью теоремы Розенблатта (Rosenblatt M., Ann. Math. Statistics, 1952, **23**, 617—624), что при гипотезе H_0 и $\frac{m}{n} \to c > 0$ $(n \to \infty)$ три статистики

$\frac{1}{2}\lambda_{mn}[Q_{mn} - EQ_{mn}]$, $\lambda_{mn}[D - ED]$, $\lambda_{mn}[d - Ed]$, где $\lambda_{mn} = \frac{mn}{m+n}$, имеют предельное распределение ω^2-критерия Мизеса. Для оценки мощности критерия Q_{mn} существенно найденное автором доказательство асимптотической нормальности статистики Q_{mn} в предположении строго возрастающих непрерывных функций F и g, $F \neq G$ (за некоторым небольшим исключением).

Н. В. Смирнов

8808. О построении критериев значимости на круге и сфере. Уотсон, Вильямс (On the construction of significance tests on the circle and the sphere. Watson G. S., Williams E. J.), Biometrika, 1956, **43**, № 3-4, 344—352 (англ.)

Когда наблюдения можно рассматривать как точки на круге или на сфере, то имеют дело обычно с вероятностной плотностью, пропорциональной $\exp(k\cos\theta)$, где k есть определенная константа, а θ — угол между наблюдаемым единичным вектором и генеральным средним единичным вектором, или полярным вектором. Целью исследований является установление, из наблюденных результатов, пределов, в которых, вероятно, должен лежать неизвестный полярный вектор, или испытание однородности различных множеств наблюдений. Таким образом, это распределение и критерии, связанные с ним, являются круговыми и сферическими аналогиями обычных критериев в евклидовом пространстве, основанных на нормальном распределении.

Авторы рассматривают функцию плотности в виде $C_p(k)\exp(k\cos\theta)$, где p есть число размерности, а $C_p(k)$ — соответствующий постоянный множитель. Для $p = 2,3$ приводится значение этого множителя, выражающегося в терминах мнимой бесселевой функции или гиперболических синуса и косинуса.

Если полярный вектор известен, то легко находятся достаточная статистика и уравнения максимального правдоподобия для k. При неизвестном полярном векторе достаточной статистикой для k является Rc, где R есть длина результирующего вектора, а c есть косинус угла между результирующим и полярным векторами.

Находится плотность распределения Rc в обоих случаях двух и трех измерений. Несколько труднее определить совместную вероятностную плотность распределения длин результирующих векторов и c для нескольких выборок. Приводится результат для двух выборок в двумерном случае, который пока не обобщен на большее число выборок. В случае трех измерений Фишер вывел функцию плотности для любого числа выборок.

Замечание, что при больших k величина $2k(1-\cos\theta)$ распределена приблизительно как χ^2 с $p-1$ степенями свободы, кладется в основу для построения критериев значимости относительно k. Таким образом строятся критерии для испытания однородности значений k или для проверки гипотезы равенства полярных векторов при наличии нескольких выборок. Когда же k и объемы выборок малы, то ничего о подходящих критериях авторам не известно.

Высказываются соображения о построении статистического критерия относительно полярных векторов и о сравнении полярных векторов нескольких генеральных совокупностей. В заключение приводятся числовые примеры и сравниваются критерии значимости Фишера и Уотсона.

Б. М. Клосс

8809. Понятие асимптотической эффективности. Басу (The concept of asymptotic efficiency. Basu D.), Sankhyā, Indian J. Statistics, 1956, **17**, № 2, 193—196 (англ.)

Строится простой пример, показывающий, что асимптотически менее эффективная (в обычном определении) оценка t_n из двух асимптотически нормальных и состоятельных оценок t_n и t'_n одного и того же параметра μ распределения $F(x)$ по выборке объема n может в то же время отвечать большей предельной концентрации вероятности, так что при

$$\varepsilon > 0 \quad P\{|t_n - \mu| > \varepsilon\}/P\{|t'_n - \mu| > \varepsilon\} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Н. В. Смирнов

8810. ψ_k^2 критерий согласия Неймана при сложной нулевой гипотезе. Бартон (Neyman's ψ_k^2 test of goodness of fit when the null hypothesis is composite. Barton David Elliott), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 274—275 (англ.)

При проверке согласия простой гипотезы с данными наблюдений Нейман преобразует наблюдаемые величины X в равномерно распределенные Y, полагая $y = F(X)$, где $F(X) = P(X < x)$. Он вводит ряд критериев ψ_k^2, которые имеют одно и то же распределение независимо от проверяемого закона распределения. Некоторое обобщение Ψ_k^2 для группированных и дискретных наблюдений было сделано автором в другой работе.

Если проверяемая гипотеза сложна, параметры распределения должны оцениваться по наблюдениям и тогда преобразование вероятностного интеграла дает неравномерно распределенные величины. Показано, что распределения величин ψ_k^2 и Ψ_k^2 зависят от проверяемого закона; больше, того, эти распределения зависят от употребляемого метода оценки.

Распределения ψ_k^2 и Ψ_k^2 для больших выборок выведены матричными методами и показано, что они приводят к некоторому обобщению правила χ-квадрат с потерей степеней свободы. Оказывается, что оценка максимального правдоподобия дает большие упрощения. Распределение Ψ_k^2 находится приближенно в более сложном случае, когда непрерывные данные объединяются в группах, границы которых являются функциями оценок.

Находится мощность критерия (при большой выборке и сложной гипотезе) по отношению к введенному автором ранее множеству альтернатив. Резюме автора

8811. Наиболее мощные несмещенные критические области и наиболее короткие и несмещенные из доверительных интервалов, связанных с распределением классической D^2-статистики. Чаудхури (The most powerful unbiased critical regions and the shortest unbiased confidence intervals associated with the distribution of classical D^2-statistic. Chowdhury S. B.), Sankhyā, 1954, **14**, № 1-2, 71—80 (англ.)

8812. Испытание значимости разности между средними двух нормальных совокупностей с неизвестными стандартными отклонениями. Избранные работы по статистике и теории вероятностей. Вальд (Testing the difference between the means of two normal populations with unknown standard deviations. Wald Abraham. Selected papers in statistics and probability by Abraham Wald, pp. 669—695. Mc Graw — Hill Book Co., Inc., New York—Toronto—London, 1955. 8.00 doll) (англ.)

Пусть x_{ij} $i = 1, 2$; $j = 1, 2, \ldots, N$ будут независимыми нормально распределенными случайными величинами со средними μ_i и дисперсиями σ_i^2 не известными статистику. Проблема заключается в проверке гипотезы $H: \mu_1 = \mu$. Автор использует условия достаточности и инвариантности критерия проверки, которые приводят к тому, что критическая область должна определяться неравенством вида $\left|\frac{y}{\sqrt{s_1^2+s_2^2}}\right| > \varphi(l)$, причем $\bar{x}_i = N^{-1}\sum_j x_{ij}$, $s_i^2 = (N-1)^{-1}\sum_j (x_{ij}-\bar{x}_i)^2$ $y = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ и $l = \frac{s_2^2}{s_1^2}$, а φ — заданная функция. Объем критической области α есть функция от $\lambda = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ и, конечно, зависит от выбора φ. Автор требует, чтобы для всех $\lambda\alpha(\lambda/\varphi) \leqslant \alpha_0$ при данном α_0. Когда φ тождественно постоянна, полученный критерий асимптотически наиболее мощен и несмещен, но неудовлетворителен при малых N. Автор, отправляясь отсюда, изучает тест с функцией $\varphi(l) = \varphi_0$ $(l) = c - c'l(1+l)^{-2}$, где c и c' — константы, для которой объем критической области почти постоянен при постоянной λ даже при малом N. Он показывает, что для всех λ

$$\alpha(\lambda \mid \varphi_0) - \alpha(0 \mid \varphi_0) = 0\ (N^{-2}).$$

Критическая область, отвечающая φ_0, равномерно более мощна, чем такая же область для $\varphi = \text{const}$ при том же максимальном объеме теста.

Пусть A — случайная переменная с F распределением $c(n, n)$ степенями свободы. Тогда имеем $\alpha(\lambda \mid \varphi) = EG(\varphi(\lambda A), \lambda, A)$, где G — функция, определенная в работе автора. Пусть $B = \min(A, c_0)$ для некоторого положительного c_0. По определению

$$a^{\varphi}(\lambda \mid \psi) = EG(\varphi(\lambda, B), \lambda, B).$$

Автор показывает, что для некоторых $c_0 > 0$ и $\beta < 1$ существует в точности одна аналитическая функция $\varphi_\beta(l)$, регулярная при $l = 0$ и такая, что $a^*(\lambda \mid \varphi_\beta) = \beta$ при всех $\lambda < \lambda_0$, где λ_0 — некоторое положительное число. Дается метод для вычисления коэффициентов ряда по степеням l, представляющего $\varphi_\beta(l)$. Естественно возникает, как указывает автор, проблема существования $\varphi(l)$ такой, что $\alpha(\lambda \mid \varphi)$ постоянно тождественна относительно λ или существования такой функции $n(s_1^2 s_2^2)$, что $P(y > h(s_1^2, s_1^2)$ — тождественно постоянна относительно $(\sigma_1^2 \sigma_2^2)$, когда $\mu_1 = \mu_2$. Метод вычисления коэффициентов степенного ряда, представляющего h был дан Уэлчем (Welch, Biometrika 1947, 34, 28—35). Доказательство последнего содержало серьезную лакуну, так как самое существование аналитической функции h никем не было доказано.

Тот же самый недостаток имелся и в других работах, развивавших дальше первоначальную работу Уэлча (Welch, Ann. Math. Statistics, 1947, **18**, 118—122; Biometrika, 1951, **38**, 330—336; James, Biometrika, 1951, **38**, 324—329).

J. Wolfowitz

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 1, 55

8813. Вычисление некоторых ω_n^2-распределений. Кондо (Evaluation of some ω_n^2 distribution. Kondo Takayuki), J. Gakugei. Tokushima Univ. (Nat. Sci.), 1954, **4**, 45—47 (англ.)

Ватанабе (Watanabe, J. Gakugei Coll. Tokushima Univ., 1952, **2**, 21—30) нашел распределение ω_n^2. При этом под ω_n^2 понимается статистический критерий согласия; он образован с помощью модификации критерия Мизеса ω^2, принадлежащего Смирнову, для случая сгруппированных данных выборки. В настоящей работе распределение ω_n^2 табулируется для $n = 2$ и $n = 9$. Приводятся некоторые обсуждения использованных методов численного расчета.

D. G. Chapman

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 10, 885

8814. Преобразование усеченного распределения Пуассона. Мур (The transformation of a truncated Poisson distribution. Moore P. G.), Skand. aktuarietidskr., 1956, № 1-2, 19—25 (англ.)

Пусть X — случайная переменная, следующая закону Пуассона с параметром λ. Усеченным распределением Пуассона называется такое, для которого возможные значения X ограничены слева или справа положительным числом k.

Рассматривается оценка параметра λ и дисперсия его приближенного значения по опытным данным, полученным из усеченного распределения Пуассона. Уравнение оценки максимального правдоподобия было дано Типетом, однако удобного для вычислений способа решения этого уравнения пока нет.

В связи с этим предлагается рассмотреть величину $y = \sqrt{x + 3/8}$, которая имеет распределение, весьма близкое к нормальному, после оценки параметров нормального распределения, которому приближенно следует y, перейти к оценке параметра распределения Пуассона. Для этой цели автором исчислены и приведены в статье переходные таблицы.

Изложенный метод иллюстрируется на численном примере — распределение частиц пыли в единице объема.

А. М. Бендерский

8815. Некоторые аналогии нецентрального t-теста. Зитек (Některé analogie necentrálního t-testu. Zítek František), Aplikace mat., 1957, **2**, № 1, 38—46 (чешск.; рез. русск., англ.)

Дается генеральная дискуссия нецентрального t-теста, в котором стандартное отклонение ρ заменено некоторыми другими статистиками, как например, R (размах) m или g (среднее из абсолютных величин отклонений). Построены тесты для гипотезы $H_p: \int_T^\infty n(x; \mu, \sigma)\, dx \leqslant p$, где T, $(-\infty < T < \infty)$ и p $(0 < p < 1)$ — заданные числа, $n(x; \mu, \sigma)$ — нормальная плотность с неизвестными параметрами μ, и σ и для гипотезы $H^1: \mu' - \mu'' > a\sigma$, где μ' и μ'' — центры генеральных нормальных совокупностей (с равной дисперсией σ^2).

В вычисляемой таблице даны критические значения для теста гипотезы, пользующегося выборочным сред-

ним отклонением m, для некоторых значений объема выборки, значения p, и уровня значимости α.

По резюме автора

8816. Объединенная теория выборок из конечной популяции. Годамбе (A unified theory of sampling from finite populations. Godambe V. P.), J. Roy. Statist. Soc., 1955, **B17**, № 2, 269—278 (англ.)

Рассматривается конечная генеральная совокупность из N объектов, распределенных по признаку x. Задачей является найти оценку для суммы $T = \sum_{\lambda=1}^{N} x_\lambda$ при помощи случайной последовательности $(x_{\lambda_1}, \ldots, x_{\lambda_n})$, если заданы n для каждого $s = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ вероятность $p(s)$. Автор вводит наиболее общее определение линейной оценки, а именно $e_s = \sum_{\lambda \in s} \beta_{s\lambda} x_\lambda$; по определению система коэффициентов $\{\beta_{s\lambda}\}$ оптимальна, если средняя дисперсия e_s по отношению к какому-нибудь априорному распределению $(x_1, \ldots, x_N)$ минимальна. (С точки зрения общей теории оценки, $(x_1, \ldots, x_N)$ — параметр и применяемый критерий — критерий Бейеса). В работе предлагается явное решение для случая, когда x_λ имеют постоянные априорные коэффициенты вариации и вероятность включения элемента λ в выборку, пропорциональна априорной средней x_λ, $\lambda = 1, \ldots, N$.

J. Hájek

8817. Дисперсия линейных функций при наличии линейных связей между аргументами. Нанди (Variance of a linear function of constrained variables. Nandi H. K.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1956, **7**, № 25, 41—43 (англ.)

Выводится формула для дисперсии линейной функции независимых величин при наличии линейных связей, накладываемых на аргументы, и предположении линейности и гомоскедастичности корреляции между рассматриваемыми линейными функциями. Полученная формула применяется к выводу потери информации оценки, находимой по методу максимального правдоподобия в случае, когда нет достаточных оценок.

Н. В. Смирнов

8818. Выборочный эксперимент для проверки степени приближения теоретических распределений средней последовательных разностей. Камат (A sampling experiment to verify the approximate theoretical distributions of mean successive difference. Kamat A. R.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1956, **7**, № 25, 17—26 (англ.)

Автор рассматривает статистику $d = \sum_{i=1}^{n-1} |x_i - x_{i+1}|/n - 1$, где $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, образуют последовательность случайных нормально распределенных $N(m, \sigma)$ величин (наблюдения). Распределение d точно известно только для $n = 3$. Автор строит приближения к функции распределения, используя при $n < 10$ кривую I типа Пирсона, при $n = 12, 15, 18, 20, 25, 30$ кривую III типа и при $n = 40, 50, 100$, используя нормальное приближение. Проверка годности приближения осуществляется путем сравнения методом χ^2 „теоретических" кривых к эмпирическим распределениям, построенным по искусственно воспроизводимым выборкам с помощью таблиц случайных нормальных отклонений Уолда (Wold H., Tractsfor Computers, 1948, № 20). Н. В. Смирнов

8819. Нерешенные проблемы экспериментальной статистики. Тьюки (Unsolved problems of experimental statistics. Tukey John W.), J. Amer. Statist Assoc., 1954, **49**, № 268, 706—731 (англ.)

По мнению автора, разнообразные проблемы экспериментальной статистики происходят от взаимодействия некоторых принципов с классом экспериментов. Эти принципы, формулируемые в своеобразных методологических терминах, разъясняются и иллюстрируются; они же кладутся в основу классификации переменных задач. Приводится список из 51 вопроса, вновь возникшего в разных областях применения статистических методов или требующего дальнейших более глубоких изысканий. Н. В. Смирнов

8820. Использование серий для контроля за средней при контролировании качества продукции. Уэйлер (The use of runs to control the mean in quality control. Weiler H.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 264, 816—825 (англ.)

Рассматривается обычная методика предупредительного контроля за средним значением (центром) нормально распределенного признака некоторой продукции. С помощью контрольных карт для выборочного среднего показывается, что:

1) для обнаружения малых смещений центра рассеивания предпочтительней и экономичней в смысле общего требуемого объема испекции — выборки большего объема;

2) если, однако, кроме среднего данной выборки, использовать средние еще $(\lambda - 1)$ предшествующих выборок $(\lambda \geqslant 1)$ и принимать то или иное решение в зависимости от того, будут ли (или не будут) все эти средние одновременно выше или одновременно ниже надлежаще выбранных контрольных пределов, то оптимальными будут выборки значительно меньших объемов. Если организовать контроль за „сериями" средних, то при некоторых длинах серий наиболее экономичным является выборка из одного наблюдения и удобно перейти к контролю с применением калибров.

Н. В. Смирнов

8821. Карты проверочного контроля с итерациями. Брюккер-Штейнкуль (Stichprobenkarten mit Iterationen. Brücker-Steinkuhl K.), Mitteilungsbl. math. Statist., 1956, **8**, № 2, 154-175 (нем.)

Малая чувствительность к сдвигам центра рассеивания, присущая контролю по крайним членам выборки, породила попытки искать другие методы, столь же простые в отношении потребной счетной работы, но более эффективные. В качестве такого улучшения контрольного процесса в работе рекомендуются карты, построенные по принципу итераций (серий); пределы на этих картах назначаются из расчета данной (малой) величины вероятности получения в выборке серии, состоящей из наблюдений, сплошь выходящих за пределы, в то время как на картах для экстремальных значений пределы планируются, исходя из заданной (большой) вероятности получить серию из наблюдений, сплошь лежащих в области внутренней к назначенным контрольным пределам.

Показывается, что по своей чувствительности новые карты значительно превосходят карты для крайних значений (по крайней мере при малых и средних сдвигах центров рассеивания) и приближается к картам для медиан. Н. В. Смирнов

8822. Пределы нового типа контрольных карт для средних рангов и последовательных серий. Уэйлер (A new type of control chart limits for means, ranges, and sequential runs. Weiler g), J. Amer. Statist. Assoc, 1954, **49**, № 266, 298—314 (англ.)

Так как в наиболее распространенных контрольных картах пределы планируются так, что отношение ожидаемого числа ложных сигналов к числу проделанных выборок фиксировано заранее независимо от объема выборки, то отношение ложных сигналов к числу проверенных изделий варьирует вместе с объемом выборки.

В настоящей работе планируются контрольные карты, для которых ожидаемое отношение ложных сигналов

к числу проверенных изделий независимо от объема выбора. Исследуется мощность контрольных карт в связи с объемом выборки. Резюме автора

8823. Некоторые замечания о стандартной ошибке постоянного члена в анализе регрессии. Эйк, Мурман (Opmerkingen over de standaardafwijking van de constante term bij regressie-analyse. Eijk C. J. van, Moerman H.), Statist. neerl., 1957, **11**, № 1, 23—30 (гол.; рез. англ.)

Выводится формула для стандартной ошибки постоянного члена в уравнении линейной регрессии, получаемой применением метода наименьших квадратов в случае двух переменных аргументов. Этот вывод дается без применения матричной алгебры. Результат сравнивается с соответствующей формулой матричной алгебры, после чего указывается план для вычисления. Н. В. Смирнов

8824. Об извлечении междублочной информации в комплексных опытах. Рао (On the recovery of inter block information in varietal trials. Rao C. Radhakrishna), Санкия Indian J. Statistics, 1956, **17**, № 2, 105—114 (англ.)

Задача настоящей заметки заключается в дальнейшем выяснении метода, комбинирующего анализ связей внутри и между блоками, предложенный автором в более ранней работе (J. Amer. Statistics Assoc., 1947, **42**, 541) в выводе явных выражений в случае планов из связанных блоков (LB) и изложении нового более последовательного плана, допускающего простую оценку параметров блока как в случае LB-плана, так и для решеток и аналогичных планов. По резюме автора

8825. Классификация и анализ планов со связанными блоками. Рой, Лаха (Classification and analysis of linked block designs. Roy J., Laha R. G.), Санкия Indian J. Statistics, 1956, **17**, № 2, 115—132 (англ.)

Показывается, как может быть осуществлен точный межблоковый анализ плана со связанными блоками (LB). Получен показатель эффективности LB-плана. Методы иллюстрируются численным примером. Дается исчерпывающий перечень всех LB-планов с десятью или меньшим числом участков на блок, включающих десять или меньше число повторений. Из резюме автора

8826. О сдвоенном плане PBIB (частично сбалансированными неполными блоками) и новом классе планов эксперимента с двумя повторениями. Рамакришнан (On the dual of a PBIB design, and a new class of designs with two replications. Ramakrishnan C. S.), Санкия, Indian J. Statistics, 1956, **17**, № 2, 133-142 (англ.)

8827. Два сопряженных частично сбалансированных плана опыта, заключающих три повторения. Рой, Лаха (Two associate partially balanced designs involving three replications. Roy J., Laha R. G.), Санкия, Indian J. Statistics, 1956, **17**, № 2, 175-184 (англ.)

8828. Некоторые серии планов с неполными балансированными блоками. Спротт (Some series of balanced incomplete block designs. Sprott D. A.), Санкия, Indian J. Statistics, 1956, **17**, № 2, 185-192 (англ.)

Различные методы конструкции планов с неполными балансированными блоками (BIB) были изучены Бозе (Bose R. C., Ann. Eugen. 1939,9 353—399; Bull. Calcutta Math. Soc., 1942, **34**, 17—31; Санкия, 1942, **6**, 105—110), который доказал две „модуль-теоремы" и применение их к построению однопараметрического семейства планов. Спротт (РЖМат, 1955, 2796) использовал первую из этих теорем, чтобы вывести некоторое двухпараметрическое семейство планов, включающее в себя как частный случай некоторые серии Бозе. Задача настоящей работы — использовать методы Спротта и модуль-теоремы для получения некоторых дальнейших серий планов (BIB). По резюме автора

8829. Последовательные процедуры в некотором ряде задач дисперсионного анализа. Джонсон (Sequential procedures in certain component of variance problems. Johnson N. L.), Ann. Math. Statistics, 1954, **25**, № 2, 357 — 366 (англ.)

Перечислены три метода последовательного анализа для различения альтернатив $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \theta'$ и $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \theta''$, где σ_1^2, σ_2^2 — дисперсии нормальных распределений. Для двух из этих методов даны приближенные формулы среднего выборочного числа. Аналогичная задача решается для случая дисперсионного анализа с двумя факторами. С. С. Кислицын

8830. О регрессии. Новые результаты. Нерешенные задачи. Дармуа (Sur la regression. Résultats nouveaux. Problèmes non résolus. Darmois Georges), Colloq. analyse statist. CBRM, Bruxelles, 1954. Paris, 1955, 9—23 (франц.)

Дается краткий обзор современного состояния теории регрессии, главным образом, тех особенностей, какие имеют место при отсутствии абсолютных моментов, т. е. при нарушении обычно делавшихся предположений. В частности, приводится эффектный пример Жиро, показывающий, что при отсутствии абсолютных моментов известное положение о концентрации распределения масс вероятности на прямой в случае совпадения с ней двух линий регрессии уже не имеет места. Н. В. Смирнов

8831. О доверительных множествах общего типа и непараметрических методах. Данциг (Sur les ensembles de confiance généraux et les méthodes dites non paramétriques. Dantzig D. van), Colloq. analyse statist.,CBRM, Bruxelles, 1954, Paris 1955, 73-91 (франц.)

Обсуждается метод для оценки доверительных множеств в отношении множества всех альтернатив некоторого теста в случае, когда случайные величины независимы, непрерывно распределены, имеют (или не имеют) одинаковый закон распределения. Кроме того, дается метод для изучения, с некоторой общей точки зрения, появившихся в последнее время непараметрических тестов, обобщающих критерии Кендалла (1948), Фридмана (1937), Вилькоксона (1945). Рассматриваются случаи, когда критерии проверки могут быть выражены как линейные, билинейные, квадратичные и биквадратичные функции знаков $x_{ij} = \operatorname{sign}(x_i - x_j)$, где x_i — случайные величины, обычно предполагаемые независимыми, непрерывно и одинаково распределенными в предположении истинности проверяемой гипотезы. По резюме автора

8832. Заметки о методе Вальда для нахождения прямой линии, в случае, когда оба переменных подвержены ошибкам. Кипинг (Note on Wald's method of fitting a straight line when both variables are subject to error. Keeping E. S.), Biometrics, 1956, **12**, № 4, 445—448 (англ.)

Пусть даны наблюдения $x_i = X_i + \varepsilon_i$, $y_i = Y_i + \eta_j$; $X_i = E(x_i)$, $Y_i = E(y_i)$, $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$, а ε_i и η_i — ошибки наблюдения, некоррелированные между собой и имеющие конечную дисперсию. Предполагается далее, что 1) (для простоты) N четно, 2) $Y_i = \alpha + \beta X_i$, 3) ε_i достаточно малы, так что расположение наблюдений в порядке величин x_i не существенно отличается от расположения в порядке величин X_i. В этих предположениях Вальд (Wald A., Ann. Math. Statistics, 1940, **11**, 284—300) дал метод оценки коэффициентов α, β и дисперсии ошибок σ_ε^2 и σ_η^2. Автор приводит пример, в

котором оценка для дисперсии σ_ε^2, получается отрицательной, и, анализируя этот результат, приходит к выводу, что в примере не соблюдено условие 3) Вальда, ограничивающее область приложения его метода.
Н. В. Смирнов

8833. Статистическое распределение времени появления второй, третьей или, вообще, n-й по порядку ошибки некоторого прибора. Пирушка (Die statistische Verteilung für das Auftreten, des zweiten, dritten oder allgemein n-ten Fehlers eines Geräts. Pieruschka E.) Z. angew. Math., und Mech., 1955, **35**, № 12, 470—473 (нем.)

Пусть t_i $i = 1, 2, \ldots,$ n — случайные моменты времени, в которые происходили аварии (ошибки, отказы в обслуживании и т. п.) некоторого прибора. Автор рассматривает эту последовательность как упорядоченную выборку (вариационный ряд независимых величин, подчиненных одному и тому же закону распределения с плотностью $g(t)$). Ищется распределение величины $v = t_n - t_{n-1}$ — времени обслуживания между $n-1$ и n остановкой прибора. Рассматриваются два случая: чисто случайные ошибки с показательными распределениями $g(t) = \frac{1}{t_0} e^{-\frac{t}{t_0}}$; во втором случае ошибки с нормальной плотностью, вызванные усталостью материалов: $g(t) = n(t, t_0, \sigma)$. В первом случае v подчиняется также показательному закону. Во втором случае находится распределение v для $n = 2,3$. Предположения автора вряд ли отвечают существу рассматриваемого процесса.
Н. В. Смирнов

8834. Байесовские решения и оптимальные методы приемочного статистического контроля. Михалевич В. С., Укр. матем. ж., 1956, **8**, № 4, 454—459

Обсуждаются условия применимости к статистическому приемочному контролю последовательного анализа. Отыскиваются решения с наименьшим математическим ожиданием убытка (байесовские решения) по статистике $v(n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, где x_i — выборочные значения. Сформулированы условия, при выполнении которых: 1) каждое байесовское решение является урезанным по n, и дан метод построения последовательности интервалов (a_n, b_n), $n = 1, 2, \ldots,$ таких, что испытания заканчиваются, и одно из двух решений принимается, как только $v(n) < a_n$ или $v(n) > b_n$; 2) существует байесовское решение, урезаннсе по t, для процесса Пуассона; 3) возможна аппроксимация байесовского решения для биномиального распределения байесовскими решениями для процесса Пуассона. Доказательства не приведены.
В. П. Швальб

8835. Заметка об истории графического изображения данных. Ройстон (A note on the history of the graphical presentation of data. Royston Erica), Biometrika, 1956, **43**, № 3-4, 241—247 (англ.)

Описываются труды Кроме (Crome A. F. W., Uber die Grösse und Bevölkerung der sämtlichen Europäischen Staaten, Leipzig, 1785; Geographisch-statistische Darstellung der Staatskräfte, Leipzig, 1820) и Плейфера (Playfair W., The Commercial and Political Atlas. London, 1786 и др.), в которых применен графический метод для изображения статистических данных. Библ. 13 назв.
А. К. Митропольский

8836 К. Пособие по математической статистике. Венецкий И. Г., Кильдышев Г. С. М., Госстатиздат, 1956, 203 стр., илл., 4 р. 65 к.

Предназначенная для студентов экономических вузов книга содержит элементы математической статистики и теории вероятностей, изложенные почти без доказательств. В разделе I дается понятие о вариационном ряде и его элементарных характеристиках. Раздел II содержит основные сведения из теории вероятностей. Вероятность вводится в форме классического определения. Без вывода приводятся теоремы сложения и умножения вероятностей, теорема Байеса, биномиальное распределение и локальная формула Лапласа, как приближенное выражение биномиальной вероятности. Нормальная кривая вводится как график „стандартизованного" распределения. Далее вводится интеграл Лапласа, дается понятие случайной величины и математического ожидания и доказывается неравенство Чебышева.

В разделе III излагается выборочный метод (без выводов). Приводятся формулы средних ошибок для различных выборок, дается понятие о нормированном отклонении (Стьюдента) и его распределении. Раздел IV: биномиальное и нормальное распределения, критерии Пирсона, Романовского, Колмогорова и Ястремского; распределение Пуасссна. Раздел V посвящен корреляции. Приведены нормальные уравнения для определения линейной зависимости; выражение коэффициента корреляции и корреляционного отношения; понятие множественной корреляции; приводится распределение Фишера для $(1/2)\ln[(1+r)/(1-r)]$.

В конце книги приведены задания для самостоятельной работы на основе двух таблиц статистических данных (результатов замера ампул и диаметра плашек). Имеются таблицы функций нормального распределения, функции Стьюдента, значений z (Фишера), критических значений отношения межгрупповой и внутригрупповой дисперсий, биквадратов чисел, критерия Колмогорова, χ^2-распределения и значений экспоненциальной функции.
Г. П. Боев

8837 К. Математическая статистика. [Учебн. пссобие для экон. (не стат.) вузов]. **Ястремский Б. С.,** М., Госстатиздат, 1956, 176 стр., илл., 4 р. 20 к.

8838 К. Таблицы частично сбалансированных планов опыта с двумя сопряженными классами. Бос, Клатуэрти, Шрикханде (Tables of partially balanced designs with two associate classes. Bose R. C., Clatworthy W. H., Shrikhande S. S. (North Carolina Agric. Experim. Station, Techn. Bull. № 107). Raleigh, N. C., State College, 1954, iv, 255 pp., 2.00 doll.) (англ.)

8839 К. Непараметрические методы в статистике. Фрейзер (Nonparametric methods in statistics, Fraser D. A. S. New York, Wiley, 1957, 309 pp., ill., 8.50 doll.) Publishers Weekly, 1957, **171**, № 6, 143 (анг.)

8840 Д. Последовательные байесовские решения и оптимальные методы приемочного статистического контроля. Михалевич В. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1957

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

8841. О конечных стратегических играх. Франкс (Sur les jeux stratégiques finis. Franckx Ed.), Colloq. analyse statist., CBRM, Bruxelles, 1954. Paris, 1955, 143—158 (франц.)

В первом параграфе статьи рассматриваются нулевые игры двух лиц, в которых чистыми стратегиями первого игрока являются m векторов пространства R^n (выпуклая их оболочка обозначается через X), чистыми стратегиями второго — n векторов (с выпуклой оболочкой Y), образующих ортонормированный базис R^n, и функцией выигрыша — $\varphi(x, y)$ $(x \in X, y \in Y)$, вообще говоря, нелинейной относительно x или y.

Если $\varphi(x, y)$ есть скалярное произведение x и y, то игра называется игрой типа Неймана, если $\varphi(x, y)$ частично выпукла по x и частично вогнута по y, — то игрой типа Ки-Фана, а если $\varphi(x, y)$ частично квази-

выпукла по x и квази-вогнута по y, то игрой типа Никайдо.

Вводится понятие игры типа Неймана, индуцированной данной игрой типа Никайдо, и выясняется связь между этими двумя играми. Подробно разбирается случай наличия у одного из игроков лапласовской оптимальной стратегии (смешанная стратегия называется лапласовской, если в ней все вероятности чистых стратегий равны).

Во втором параграфе рассматривается аналогичное обобщение игр n лиц в смысле Наша и устанавливаются некоторые свойства их точек равновесия.

Н. Н. Воробьев

8842. Об одном обобщении теоремы Цермело-фон Неймана. Берж (Sur une généralisation du théorème de Zermelo-von Neumann. Berge Claude), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 5, 455—457 (франц.)

Теорема о точке равновесия позиционных игр с полной информацией доказана для введенных автором (РЖМат, 1956, 5403, стр. 157 статьи) глобальных игр в предположении T_0-отделимости пространств стратегий каждого игрока и непрерывности функций выигрыша на множестве ситуаций. И. В. Романовский

8843. Решение задачи о седловой точке при помощи дифференциальных уравнений. Косе (Solutions of saddle value problems by differential equations. Kose T.), Econometrica, 1956, **24**, № 1, 59—70 (англ.)

Неотрицательность всех компонент вектора x записывается как $x \geqslant 0$. Задача состоит в нахождении по функции $\varphi(x, u)$, дифференцируемой по каждой из компонент x_i и u_j векторов $x \geqslant 0$ и $u \geqslant 0$, такой пары векторов $x^0 \geqslant 0$ и $u^0 \geqslant 0$ (называемой седловой точкой), что

$$\varphi(x^0, u^0) = \operatorname*{Max}_{x \geqslant 0} \operatorname*{Min}_{u \geqslant 0} \varphi(x, u).$$

Теорема. Пусть для всех x, u, x^Δ, $u^\Delta \geqslant 0$, $x \neq x^\Delta$, $u \neq u^\Delta$

$$\sum_i (x_i - x_i^\Delta)\varphi_{x_i} < \varphi(x, u) - \varphi(x^\Delta, u),$$

$$-\sum_j (u_j - u_j^\Delta)\varphi_{u_j} < \varphi(x, u^\Delta) - \varphi(x, u).$$

Тогда решения системы дифференциальных уравнений

$$a\dot{x}_i = \delta_{x_i}\varphi_{x_i}, \quad x_i(0) \geqslant 0 \text{ для всех } i,$$

$$-a\dot{u}_j = \delta_{u_j}\varphi_{u_j}, \quad u_j(0) \geqslant 0 \text{ для всех } j,$$

(a — положительная константа, а $\delta_{x_i} = 0$ если $x_i = 0$ и $\varphi_{x_i} < 0$; $\delta_{x_i} = 1$ в противном случае, $\delta_{u_j} = 0$, если $u_j = 0$ и $\varphi_{u_j} > 0$ и $\delta_{u_j} = 1$ в противном случае) при любых начальных условиях сходятся к единственной седловой точке.

Более детально рассматривается случай, когда функция $\varphi(x, u)$ билинейна. Приводятся приложения к теории программирования и к теории модели Леонтьева.

Н. Н. Воробьев

8844. О бесконечных позиционных играх. Мыцельский, Сверчковский, Земба (On infinite positional games. Mycielski Jan, Swierczkowski S., Zięba A.), Bull. Acad. polon. sci., 1956, cl. 3, **4**, № 8, 485—488 (англ.); Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, **4**, № 8, 473—476

Рассматривается следующая нулевая позиционная игра $\Gamma(R, f)$ двух лиц с полной информацией. Пусть $E_1, E_2, \ldots$ — последовательность непустых множеств, а $\mathfrak{X}$ — функция, определенная на всех множествах вида $E_1 \times \ldots \times E_n$ и принимающая значения $\mathfrak{A}$ (первый игрок) или $\mathfrak{B}$ (второй игрок). Стратегией первого (второго) игрока называется всякая функция $a(b)$, определенная на всех $e \in E_1 \times \ldots \times E_n$, для которых $\mathfrak{X}(e) = \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{X}(e) = \mathfrak{B}$) и принимающая значения из E_{n+1}. Пара (a, b) стратегий определяет последовательность $e_1, e_2, \ldots$, называемую партией. Множество всех партий обозначается через R, а функция выигрыша — через f. Если $E_1, E_2, \ldots$ — топологические пространства, то в $R \subset E_1 \times E_2 \times \ldots$ естественно определяется топология (см. РЖМат, 1956, 4717, статья 13; 7529).

Доказываются следующие теоремы об играх типа $\Gamma(R, f)$:

1. Если f — функция Бэра первого класса, и все пространства E_j дискретны, то игра $\Gamma(R, f)$ является ε-определенной (т. е. $\sup_a \inf_b f(a, b) = \inf_b \sup_a f(a, b)$).

2. Если R — компактно, а f — непрерывна, то игра $\Gamma(R, f)$ вполне определена (т. е. $\max_a \min_b f(a, b) = \min_b \max_a f(a, b)$).

К играм типа $\Gamma(R, f)$ принадлежит так называемая игра Мазура-Банаха, определяемая следующим образом. $\mathfrak{A}$ выбирает сегмент $I_1 \subset [0, 1]$, $\mathfrak{B}$ выбирает сегмент $I_2 \subset I_1$ и т. д. $\mathfrak{A}$ выигрывает, если $\bigcap_n I_n \cap A \neq \Lambda$, где A — некоторое фиксированное подмножество $[0, 1]$.

Доказывается, что в игре Мазура-Банаха первый игрок может наверное выиграть тогда и только тогда, когда множество $[0, 1] \setminus A$ первой категории в некоторой точке $\rho \in [0, 1]$. K. Urbanik

8845. Решение одной нулевой игры двух лиц. Браун (The solution of a certain two-person zero-sum game. Brown Richard H.), Operat. Res., 1957, **5**, № 1, 63—67 (англ.)

Пусть $B > 0$, $1 > \theta > 0$. Рассмотрена следующая игра: Игрок I выбирает число t_1, $B + 1 \geqslant t_1 \geqslant 0$, игрок II — число t_2, $B \geqslant t_2 \geqslant 0$, причем функция выигрыша I игрока φ определяется равенствами:

$$\varphi(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 - \theta & \text{при } t_1 \leqslant t_2, \\ 1 & \text{при } t_2 < t_1 \leqslant t_2 + 1, \\ 0 & \text{при } t_2 + 1 \leqslant t_1. \end{cases}$$

Найдены оптимальные стратегии игроков и значение игры, равное

$$(1 - \theta) \,/\, (1 - \theta^{[B]+1}).$$

И. В. Романовский

8846. Асимптотическое поведение разрешающих процедур. Лейдерман (On the asymptotic behavior of decision procedures. Laderman Jack), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**, № 4, 551—575 (англ.)

Пусть $\Omega = \{F_i\}$ — конечное множество функций распределения.

Последовательность разрешающих процедур $\{\delta_n\}$, где n — число наблюдений, называется асимптотически минимаксимальной, если

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\max_i r_i(\delta_n)}{r(\delta_n)} = 1,$$

где $r_i(\delta_n)$ — риск, соответствующий δ_n, когда $F_i(x)$ — истинная функция распределения, и $r(\delta_n)$ — минимаксимальный риск.

Даны необходимые и достаточные условия асимптотической минимаксимальности для последовательности Байесовских процедур.

Последовательность разрешающих процедур $\{\delta_n\}$ называется асимптотически недопустимой, если существует последовательность разрешающих процедур $\{\delta_n'\}$ такая, что

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{r_i(\delta_n')}{r_i(\delta_n)} \leqslant 1$$

для всех i, а для какого-нибудь i выполняется и строгое неравенство. В противном случае $\{\delta_n\}$ называется асимптотически допустимой последовательностью.

Если $\liminf_{n\to\infty} \hat{g}_i^{(n)} > 0$ для всех i (где $g_i^{(n)}$ — i-ая компонента наименее благоприятного распределения), то последовательность минимаксимальных процедур асимптотически допустима.

Изучаются условия асимптотической допустимости и недопустимости последовательностей минимаксимальных разрешающих процедур в случае, когда Ω состоит из k нормальных распределений с одинаковой дисперсией. И. В. Романовский

8847. **Проблема последовательного решения с конечной памятью. Роббинс** (A sequential decision problem with a finite memory. Robbins Herbert), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, **42**, № 12, 920—923 (англ.)

Экспериментатор обладает двумя монетами, 1-й и 2-й, с неизвестными ему вероятностями выпадения герба $p_1 = 1 - q_1$ и $p_2 = 1 - q_2$. Он хочет произвести неограниченное число бросаний монет, употребляя каждый раз либо монету 1, либо монету 2, так, чтобы максимизировать частоту появления герба в длинной серии бросаний.

Ранее (Bull. Ann. Math. Soc., 1952, **58**, 529—532) автор показал, что существует правило, устанавливающее, какую монету употребить при n-ом бросании, если известны результаты всех предыдущих бросаний, и для которого с вероятностью единица

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{число гербов в } n \text{ первых бросаниях}}{n} = \max(p_1, p_2).$$

В реферируемой статье автор приводит правило R_r, зависящее лишь от $n-1$-го, $n-2$-го, ..., $n-r$-го бросаний и для которого с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{число гербов в } n \text{ первых бросаниях}}{n} = \frac{p_1 q_2^r + p_2 q_1^r}{q_1^r + q_2^r}.$$

Автору неизвестно, является ли правило R_r наилучшим. И. А. Ибрагимов

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

8848. **Заметка об одном раннем статистическом исследовании литературного стиля. Вильямс** (A note on an early statistical study of literary style. Williams C. B.), Biometrika, 1956, **43**, № 3-4, 248—256 (англ.)

Для определения авторства тех или иных литературных произведений исследуются ряды распределения числа букв в словах этих произведений. В частности, выполненный Менденголом (Mendenhall) анализ распределения числа букв в 400 000 словах произведений Шекспира и 200 000 словах произведений Бэкона показывает, что произведения, обычно приписываемые Шекспиру, не могли быть написаны Бэконом. А. К. Митропольский

8849. **Кодирование для каналов с помехами. Элайас** (Coding for noisy channels. Elias Peter), IRE Convent. Rec., 1955, **3**, № 4, 37—46 (англ.)

Статья тесно примыкает к известным работам Шеннона и Фейнстейна.

Впервые сформулированная Шенноном и доказанная им теорема для каналов с помехами утверждает, что при энтропии источника C_1, меньшей, чем пропускная способность канала C_0, всегда возможна такая система кодирования, при которой посланная цепочка символов может быть определена с помощью полученной с вероятностью ошибки, не превышающей сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$. Позднее, Фейнстейн, доказавший эту теорему на совершенно иной идейной основе, исследуя случай стационарных каналов с нулевой памятью, получил верхнюю границу для вероятности ошибки декодирования P при оптимальном кодировании. Эта верхняя граница является показательной функцией от N — $2^{-\alpha N}$, где N — длина цепочек кода, $\alpha = \alpha(C_1 C_0) > 0$.

В рассматриваемой статье усиливаются и уточняются результаты в этом направлении, правда, для очень узкого и частного случая двоичного симметричного канала с нулевой памятью. Показывается, что вероятность ошибки, как функция N, ограничена сверху и снизу экспонентами, причем для важной области характеристик канала и кода экспоненты двух границ определенным образом согласованы между собой. В этой области среднее поведение всех кодов существенно оптимально, но для малых скоростей передачи это, вообще говоря, неверно. Во втором разделе статьи автор переносит большую часть своих утверждений на класс специальным способом построенных кодов.

Сформулируем основной результат работы более точно и подробно.

Рассматриваются источник сообщений, производящий последовательность равновероятных и независимых двоичных символов (скажем, 0 и 1), и двоичный симметричный стационарный канал с нулевой памятью. Принимая в качестве входных данных двоичные символы, такой канал получает на выходе также двоичные знаки с постоянной вероятностью искажения $p_0 < 1/2$. Обозначим $q_0 = 1 - p_0$ — вероятность пройти символу через канал без искажений. Для уменьшения эффекта искажений производится кодирование текста. Сообщения „режутся“ на последовательные цепочки длины M, и каждой из 2^M возможных таких равновероятных цепочек ставится в соответствие N-символьная цепочка двоичных знаков. Существенно $N > M$. Процесс декодирования состоит в том, что по полученной на выходе канала N-значной цепочке выбирают N-значную цепочку кода, наименее отличающуюся числом несовпадающих символов от полученной, и соответствующая выбранной N-значной цепочке M-значная цепочка считается посланным сообщением. При этом совершается ошибка в определении с вероятностью P. Введем основные характеристики канала — ненадежность $E_0 = E(p_0)$ и пропускную способность (емкость) $C_0 = C(p_0)$, которые определяются в данном случае выражениями:

$$E_0 = -p_0 \log p_0 - q_0 \log q_0, \qquad C_0 = 1 - E_0 \quad (p_0 + q_0 = 1)$$

После кодирования энтропия нового источника, непосредственно подключаемого в канал, равна $C_1 = M/N$. Пусть $E_1 = (N - M)/N$ — потеря информации на один символ, так что $C_1 = 1 - E_1$.

Все перечисленные величины измеряются в двоичных единицах на символ.

Введем однозначным образом числа p_1 и q_1: $p_1 + q_1 = 1$, $p_1 < 1/2$, $(N - M)/N = E_1 = E(p_1) = -p_1 \log p_1 - q_1 \log q_1$. Далее, обозначим $\delta = p_1 - p_0$, $\Delta = C_0 - C_1$.

Заметим, что вероятность ошибки декодирования P будет, вообще говоря, функцией длины цепочек кода N, емкости канала C_0 (или вероятности искажения p_0) и энтропии непосредственно подключаемого источника C_1 (или числа p_1). Поэтому запишем ее через $p(N, p_0, p_1)$. Экспоненту ошибки для лучшего возможного кода определим как $\alpha_{\text{опт.}}(N, p_0, p_1) = -N^{-1} \log P(N, p_0, p_1)$, $\alpha_{\text{ред.}}(N, p_0, p_1)$ определяется как та же самая функ-

ция от среднего вероятностей ошибок по всем возможным кодам.

Наконец, введем еще величины:

$$p_{\text{крит.}} = p_0^{1/2}/\left(p_0^{1/2} + q_0^{1/2}\right), \quad q_{\text{крит.}} = 1 - p_{\text{крит.}},$$

$$E_{\text{крит.}} = E\,(p_{\text{крит.}}),$$

$$C_{\text{крит.}} = 1 - E_{\text{крит.}}, \quad \alpha_{\text{крит.}} = \lim_{N\to+\infty} \alpha_{\text{опт.}}\,(N, p_0, p_{\text{крит.}})$$

Теорема. Для двоичного симметричного канала с емкостью C_0 и энтропией непосредственно подключаемого в канал источника C_1 справедливы следующие утверждения:

(а) Для $p_0 < p_1 < p_{\text{крит.}}$, $C_0 > C_1 > C_{\text{крит.}}$ средний код является асимптотически существенно лучшим кодом:

$$\alpha\,(p_0, p_1) = \lim_{N\to\infty} \alpha_{\text{опт.}}\,(N, p_0, p_1) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \alpha_{\text{сред.}}\,(N, p_0, p_1) = -\Delta - \delta \log\,(p_0/q_0).$$

(б) Для $p_{\text{крит.}} < p_1 < 1/2$ средний код не является необходимо оптимальным; для $p_1 \to 1/2$ утверждение (а) заведомо неверно. Точнее:

$$\alpha_{\text{сред.}}\,(p_0, p_1) = \lim_{N\to\infty} \alpha_{\text{сред.}}\,(N, p_0, p_1) =$$

$$= \alpha_{\text{крит.}} + C_{\text{крит.}} - C_1.$$

Для $\alpha_{\text{опт.}}$ имеются две верхние и две нижние границы:

$$\liminf_{N\to\infty} \alpha_{\text{опт.}}\,(N, p_0, p_1) \geqslant \begin{cases} \alpha_{\text{крит.}} + C_{\text{крит.}} - C_1 \\ \dfrac{p_1}{2} \log \dfrac{1}{4p_0q_0} - C_1 \end{cases} \tag{1}$$

$$\limsup_{N\to\infty} \alpha_{\text{опт.}}\,(N, p_0, p_1) \leqslant \begin{cases} -\Delta - \delta \log\,(p_0/q_0) \\ \dfrac{E_1}{4} \log \dfrac{1}{4p_0q_0}. \end{cases} \tag{2}$$

Когда $p_1 \to 1/2$, вторая граница в (1) приближается ко второй границе в (2):

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{p_1\to 1/2} \alpha_{\text{опт.}}\,(N, p_0, p_1) = \frac{1}{4} \log \frac{1}{4p_0q_0},$$

которая всегда больше, чем $\alpha_{\text{сред.}}\,(p_0, 1/2) = \alpha_{\text{крит.}} + C_{\text{крит.}}$.

И. П. Цареградский

8850. О вероятностных проблемах, возникающих в теории счетчиков. Такач (On a probability problem arising in the theory of counters. Takács L.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, **52**, № 3, 488—498 (англ.)

Рассматриваются счетчики двух типов. Счетчики каждого типа порождают последовательность импульсов случайной длины γ. Для каждого момента времени t имеет место одно из двух состояний: состояние A, когда нет импульса в момент t, и состояние B — в другом случае. Частица, прибывающая в счетчик, регистрируется тогда и только тогда, когда счетчик находится в состоянии A. Регистрация сопровождается импульсом. Для счетчика первого типа частица, прибывающая в то время, когда счетчик находится в состоянии B (в «мертвое время»), не влияет на течение процесса, в то время как для счетчика второго типа такая частица порождает импульс (продлевая, быть может, «мертвое время»), хотя и не регистрируется. Каждый счетчик может быть рассмотрен как механизм для преобразования последовательности $\{t_n\}$ моментов прибытия n-ной частицы в последовательность $\{t_n'\}$ моментов n-ной регистрации.

Автор изучает следующие схемы, рассмотренные впервые Хаммерсли ((Hammersley J. M., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1943, **49**, 623—637): 1) последовательность $\{t_n\}$ образует пуассоновский процесс, а преобразование осуществляется счетчиком второго типа, 2) преобразованная по первой схеме последовательность подвергается вторичному преобразованию счетчиком первого типа.

Пусть длины импульсов γ_n есть независимые между собой и от t_n и одинаково распределенные случайные величины и $Q(x) = P\{\gamma_n \leqslant x\}$; пусть ν_t — число регистраций за время t, т. е. число $t_n' \ni (0, t)$ $uw\,(t, n) = P\{\nu_t \leqslant n\}$; $W^*(t, n) = \lim\limits_{u\to\infty} P\{\nu_{u+t} - \nu_u \leqslant n\}$, когда этот предел существует; пусть, кроме того, $F(x)$ есть функция распределения промежутка времени между двумя последовательными переходами процесса из состояния A в состояние B и $\Phi(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dF\,(x)$.

Преобразования Лапласа от $W(t, n)$, $W^*(t, n)$ и их моментов выражаются через $\Phi(s)$. Например:

$$\int_0^\infty e^{-st} W\,(t, n)\,dt = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{\lambda\,[\Phi(s)]^n}{\lambda + s}\right],$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dm\,(t) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \cdot \frac{1}{1 - \Phi(s)},$$

$$\int_0^\infty e^{-st} W^*(t, n)\,dt = \frac{1}{s} - \frac{[1 - \Phi(s)]\,[\Phi(s)]^n}{\mu s^2}.$$

(Здесь λ — параметр пуассоновского процесса для t_n, $\mu = \int\limits_0^\infty x\,dF\,(x)$, $m(t)$ — математическое ожидание числа регистраций к моменту t.)

Получены также асимптотические выражения для математического ожидания и дисперсии числа регистраций за время t при $t \to \infty$. Доказано, что предельное распределение случайных величин ν_t и

$$\nu_t^* = \lim_{u\to\infty} (\nu_{t+u} - \nu_u)$$

(предел по вероятности) нормально при соответствующей нормировке. Для счетчиков второго типа получено следующее выражение:

$$\Phi(s) = 1 - \frac{1}{\lambda + s} \times$$

$$\times \left[\int_0^\infty \exp\left\{-st - \lambda \int_0^t [1 - Q(x)]\,dx\right\} dt\right]^{-1}$$

Из этого выражения $F(x)$ определяется единственным образом.

Пусть теперь последовательность $\{t_n'\}$ преобразуется в последовательность $\{t_n''\}$ с помощью счетчика первого типа со случайной длиной импульса. Пусть $P\{t_{n+1}'' - t_n'' \leqslant x\} = G(x)$. С помощью полученных точных выражений для $G(x)$, $\mu_1 = \int\limits_0^\infty x\,dG\,(x)$ и $\sigma_1^2 = \int (x - \mu_1)^2\,dG\,(x)$ можно, используя развитый автором аппарат, получить и в этом случае точные вы-

ражения для вероятности данного числа регистраций за данное время. Р. З. Хасьминский

8851. Теория поиска. I. Кинематические основания. Купман (The theory of search. I. Kinematic bases. Koopman B. O.), Operat. Res., 1956, 4, № 3, 324—346 (англ.)

В 1946 г. было предпринято секретное издание результатов работы противолодочной группы исследования операций флота США («Поиск и маскировка» O. E. G. Report, № 56). Реферируемая статья является первой из трех статей открытого издания упомянутых материалов. Вторая статья, озаглавленная «Обнаружение целей», посвящена вероятностному анализу действия средств обнаружения (глаз, радиолокатор, аппаратура звуковой разведки и т. д.) при заданной информации относительно цели. В третьей статье — «Оптимальное распределение поисковых усилий» — даны рекомендации по использованию средств обнаружения при ведении операций.

Изложение материалов реферируемой статьи начинается выводом элементарных соотношений для параметров движения цели и наблюдателя (таких как: u — модуль скорости цели; v — модуль скорости наблюдения; Φ — путевой угол цели; r — относительная дальность; β — относительный азимут и т. д.) для случая движения с постоянными скоростью и курсом.

Рассматривается случайное распределение целей, заданное совместной плотностью вероятностей $p(\Phi, r, \beta)$ случайных величин Φ, r и β при фиксированной скорости цели u. Детально изучается однородное распределение целей, возникающее при выполнении следующих условий.

1. Вероятность того, что путевой угол Φ заключается в пределах $\Phi_1 \leqslant \Phi \leqslant \Phi_2$ пропорциональна $\Phi_2 - \Phi_1$.

2. Вероятность того, что цель, находящаяся в области Ω с площадью B, попадает в любую подобласть с площадью A области Ω, пропорциональна A.

3. Случайные события, о которых идет речь в пунктах 1 и 2, независимы.

Поскольку элемент площади выражается как $r\,dr\,d\beta$, плотность рассматриваемого однородного распределения имеет вид

$$p(\Phi, r, \beta) = \frac{r}{2\pi B}.$$

Для случая однородного распределения целей решаются следующие задачи:

1. По заданной плотности N целей на кв. милю определяется среднее значение N_0 количества целей, попадающих за единицу времени в зону обзора наблюдателя с дальностью обнаружения R.

$$N_0 = \frac{4RN}{\pi}(u+v)\,E(\sigma) \qquad (1)$$

где $\sigma = \arcsin \frac{2\sqrt{uv}}{u+v}$; $E(\sigma)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Производная dN_0/du оказывается положительной, поэтому частота контакта со случайно распределенными целями возрастает при увеличении скорости движения целей. Формулируется вывод: когда противник проходит поблизости нас вдоль неизвестного пути, мы должны уменьшить свою скорость, если желаем остаться необнаруженными.

2. Определяется плотность целей $N_0(\beta)$, имеющих относительный азимут β и попадающих за единицу времени в зону обзора наблюдателя с дальностью обнаружения R.

Для различных интервалов изменения β

$$-\arccos\frac{u}{v} \leqslant \beta \leqslant \arccos\frac{u}{v} \qquad (a)$$

$$\arccos\left(-\frac{u}{v}\right) \leqslant \beta \leqslant -\arccos\frac{u}{v}$$

или (b)

$$\arccos\frac{u}{v} \leqslant \beta \leqslant \arccos\left(-\frac{u}{v}\right)$$

и

$$\beta \leqslant -\arccos\left(-\frac{u}{v}\right) \text{ или } \beta \geqslant \arccos\left(-\frac{u}{v}\right) \qquad (c)$$

приводятся значения $N_0(\beta)$.

Если $v \leqslant u$

$$N_0(\beta) = \frac{NR}{\pi}\left\{v \arccos\left[-\frac{v}{u}\cos\beta\right]\cos\beta + \sqrt{u^2 - v^2\cos^2\beta}\right\} \qquad (2)$$

Если $v > u$, $N_0(\beta) = NRv\cos\beta$ в случае (a); выражается соотношением (2) в случае (b) и $N_0(\beta) = 0$ в случае (c).

Рассматривается плотность $\pi_\beta(\Phi)$ распределения путевого угла Φ при условии, что цели входят в зону обзора с относительным азимутом β.

Если $v \leqslant u$

$$\pi_\beta\Phi = \frac{\cos\beta - \frac{u}{v}\cos(\Phi - \beta)}{2\arccos\left[-\frac{v}{u}\cos\beta\right]\cos\beta + \sqrt{\frac{u^2}{v^2} - \cos^2\beta}}. \qquad (3)$$

Если $v > u$, $\pi_\beta(\Phi) = \frac{1}{2\pi}\left[1 - \frac{u\cos(\Phi-\beta)}{v\cos\beta}\right]$ в случае (a); выражается соотношением (3) в случае (b); обнаружение цели невозможно в случае (c).

3. При заданном относительном положении цели (r, β) в фиксированный момент времени t, определяется вероятность $P(r, \beta)$ того, что цель будет вступать в зону обнаружения радиуса R.

$$P(r, \beta) = \frac{1}{2\pi}\Phi(r, \beta)$$

где $\Phi(r, \beta)$ — радианная мера областей значений Φ $(0 \leqslant \Phi \leqslant 2\pi)$, удовлетворяющих условиям

$$r^2[u\sin(\beta - \Phi) - v\sin\beta]^2 \leqslant R^2[u^2 + v^2 - 2uv\cos\Phi]$$

$$u\cos(\beta - \Phi) \leqslant v\cos\beta.$$

Определяются кривые равных вероятностей $P(r, \beta) = \text{const}$. В случае $v \geqslant u$ кривыми равной вероятности являются линии

$$r^2 = \frac{R^2v^2\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2}P\left[\sin^2\beta - \cos^2\frac{\pi}{2}P\right]}{v^2\sin^2\beta - u^2\cos^2\frac{\pi}{2}P},$$

а также прямые, имеющие угол наклона к курсу наблюдателя, равный $\arcsin\left(\frac{u}{v}\cos\pi P\right)$.

Когда $v < u$, кривые равной вероятности определяются уравнением

$$v^2\sin^2\beta\,[\cos^2(\psi - \pi P) - \cos^2\psi] = \sin^2(\psi + \pi P) \times [u^2\cos^2(\psi + \pi P) - v^2\cos^2\psi],$$

где

$$\psi = \arccos\frac{R}{r}.$$

В качестве примера неоднородного распределения целей рассматривается нормальная плотность вероятности для относительной дальности

$$f(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}. \qquad (4)$$

В предположении о равномерном движении с постоянным курсом находится плотность $f(r, t)$ распределения r для момента времени $t+\tau$, где τ — время, к которому относится распределение (4).

$$f(r, t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2+u^2t^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{rut}{\sigma^2}\right),$$

I_0 — бесселева функция нулевого порядка для чисто мнимого значения аргумента. Н. П. Бусленко

8852. К описанию броуновского движения с помощью уравнения Ланжевена. Грюн, Мопперт (Zur Behandlung der Brownschen Bewegung mit Hilfe der Langevin-Gleichung. Grün F., Moppert K.-F.), Helv. phys. acta, 1954, **27**, 417—426 (нем.)

Обобщенное уравнение Ланжевена для движения частицы под действием случайных толчков рассматривается при гипотезе, что его решение для X — координаты частицы в момент t представимо в виде суммы фиксированной (не случайной) функции и свертки действующей случайной силы с другой фиксированной функцией. При обычных гипотезах о характере случайной силы без труда вычисляются распределения для координаты и скорости, причем используются несколько нестрогие аппроксимации интегралов посредством сумм, и наоборот (эти приемы можно выполнить, строго используя стохастические интегралы; см. Doob J. L., Ann. Math., 1942, **43**, № 2, 351—369). J. L. Doob

Перевод из Math. Revs, 1955. **16**, № 3, 268

8853. Общая теория линейного прогнозирования и фильтрации. Бендат (A general theory of linear prediction and filtering. Bendat Julius), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1956, **4**, № 3, 131 — 151 (англ.)

Обзор основных понятий теории линейного прогнозирования и фильтрации случайных процессов и результатов, полученных по этим вопросам в работах ряда зарубежных авторов. В наиболее общей формулировке задача сводится к изучению линейного интегрального преобразования случайной функции $l(t)$ в случайную функцию $r(t)$, имеющего вид

$$r(t) = \int_0^T h(\tau, t)\, l(t-\tau)\, d\tau,$$

причем входной сигнал $l(t)$ является функцией (обычно суммой) полезного сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$, а выходной сигнал $r(t)$ должен быть наиболее близок (в смысле минимума средней квадратичной ошибки) к заданной функции $d(t)$ полезного сигнала $s(t)$. В частности, задачи чистого прогнозирования (при отсутствии шума) сводятся к определению будущих значений $s(t)$ по известному прошлому, а задачи фильтрации — к определению значений полезного сигнала по известной сумме полезного сигнала и шума. Решением задачи является нахождение оптимальной весовой функции $h(\tau, t)$, обеспечивающей минимум среднего квадратичного отклонения $r(t)$ от желаемого выходного сигнала $d(t)$, а также вычисление самого минимума средней квадратичной ошибки. Оптимальная весовая функция может быть определена, вообще говоря, из интегрального уравнения

$$\gamma_{id}(t-\nu, t) = \int_0^T h(\tau, t)\, \gamma_{ii}(t-\nu, t-\tau)\, d\tau, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant T,$$

а выражение для минимума средней квадратичной ошибки имеет вид

$$\gamma_{dd}(t, t) - \int_0^T h(\tau, t)\, \gamma_{ii}(t-\tau, t)\, d\tau,$$

где $\gamma_{xy}(t_1, t_2) = \langle x(t_1),\ y(t_2)\rangle$ обозначает взаимную корреляционную функцию случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$.

Обычно рассматриваемыми частными случаями являются: (1) линейные системы с постоянными параметрами, для которых $h(\tau, t)$ не зависит от t; (2) системы с бесконечно большой памятью, для которых можно полагать $T=\infty$; (3) стационарные случайные процессы, для которых $\gamma_{xy}(t_1, t_2)$ зависит лишь от разности $t_1 - t_2$, причем обычно допускается, что рассматриваемые случайные процессы обладают эргодическим свойством, т. е. для функций от этих процессов средние значения по ансамблю могут быть заменены средними по времени. Винером (1942) был рассмотрен случай систем с постоянными параметрами и бесконечно большой памятью и стационарных эргодических процессов. Задех и Рагаззини (1950) сняли ограничение бесконечно большой памяти, Бутон (1951) рассмотрел системы с переменными параметрами и бесконечно большой памятью и нестационарные процессы, Дэвис (1952) — системы с постоянными параметрами, конечной памятью и нестационарные процессы.

Излагается также методика расчетов для случая, когда полезный сигнал $s(t)$ представим в виде конечного отрезка ряда Фурье. Спектральные методы не излагаются. Результаты советских авторов (Колмогоров, Крейн, Яглом) в обзор не включены. А. С. Монин

8854. Статистическое распределение максимумов случайной функции. Картрайт, Лонге-Хиггинс (The statistical distribution of the maxima of a random function. Cartwright D. E., Longuet-Higgins M. S.), Proc. Roy. Soc., 1956, **A237**, № 1209, 212—232 (англ.)

Дается эвристическая, без точных определений и строгих доказательств, трактовка вопроса о максимумах случайной функции вида:

$$f(t) = \sum_n c_n \cos(\sigma_n t + \varepsilon_n),$$

где ε_n — случайные фазы, распределенные независимо и равномерно на сегменте $(0, 2\pi)$. Авторы допускают запись $\sum_{\sigma_n=\sigma}^{\sigma+d\sigma} 2^{-1}c_n^2 = E(\sigma)\, d\sigma$ и предполагают существование моментов:

$$m_n = \int_0^\infty E(\sigma)\, \sigma^n\, d\sigma \qquad (n \geqslant 0 \text{ — целое}).$$

Рассматривая случайные кривые $\xi_1 = f(t)$, $\xi_2 = f'(t)$, $\xi_3 = f''(t)$, авторы затем (необоснованно) считают, что трехмерный процесс (ξ_1, ξ_2, ξ_3) будет нормальным «в силу центральной предельной теоремы в трех измерениях» (речь может идти лишь о приближенной нормальности при некоторых условиях). Далее проводятся эвристические рассуждения, которые, по существу, дают условную вероятность того, что если $f(t)$ достигает локального максимума в промежутке времени $t, t+dt$, то этот максимум лежит между ξ_1 и $\xi_1 + d\xi_1$. Полагая $\eta = \xi_1/m_0^{1/2}$, $\Delta = m_0 m_4 - m_2^2$ и используя, по существу, стационарность процесса в узком смысле, получим плотность распределения:

$$p(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\varepsilon \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\eta^2}{\varepsilon^2}\right) + (1-\varepsilon^2)^{1/2}\eta e^{-\eta^2/2} \int_{-\infty}^{\eta(1-\varepsilon^2)^{1/2}/\varepsilon} e^{-x^2/2}\, dx,\right.$$

где $\varepsilon^2 = \Delta/m_0 m_4$ (независимо от t). Далее обсуждается этот результат; подчеркивается, что при $\varepsilon \to 0$ получается распределение Рэлея $p(\eta) = \eta \exp(-\eta^2/2)$ $(\eta \geqslant 0)$, при $\varepsilon \to 1$ — нормальное распределение. Изучаются моменты и другие функционалы от $p(\eta)$. Результаты применяются к изучению профиля морских волн; здесь получается удовлетворительное (в смысле критерия χ^2) согласие наблюдений с теорией. Затем рассматривается распределение «высот-волн» — высот от максимума до ближайшего минимума.

Примечание референта. Результаты авторов не дают никакого представления о распределении $\max f(t)$ на заданном промежутке. Ю. В. Линник

8855 К. Статистическое исчисление следящих систем. Пелегрен (Calcul statisique des systèmes asservis. Pelegrin Marc J., Paris. Publ. Sci. Tech. Ministère de l'air, № 285, 1953, VI + 157 p., 1200 fr.) (франц.)

Эта книга в первую очередь посвящена статистическим методам изучения следящих систем. Автор особенно заинтересован в приложениях этой теории к автоматическому пилоту. Глава I содержит обзор теории фильтров Винера, в которой минимизируется средняя квадратичная ошибка и вариационное исчисление приводит к уравнению Винера-Хопфа. В главе II автор рассматривает видоизмененную задачу этого типа, именно, следящую систему с некоторыми заранее определенными элементами (например, мотором). Другие элементы в цепи обратной связи допускаются произвольными. Средняя квадратичная ошибка опять минимизируется, вариируя только что упомянутые элементы, которые комбинируются в виде эквивалентных фильтров. Опять получается и решается некоторое уравнение типа Винера — Хопфа. Глава III содержит материалы об изучении релейных, т. е. переключаемых устройств. Такое устройство не линейно и поэтому делается попытка определить автокорреляцию выхода по статистическим свойствам входа. В главе IV реле включается в цепи обратной связи и изучается общая система. Заключительная глава посвящена изучению атмосферной турбулентности. Здесь автор предлагает метод для нахождения «спектра турбулентности». R. S. Phillips

Перевод из Math. Revs, 1954. **15**, № 6, 546.

8856 К. Измерение затрат потребителей и жизненного уровня в Англии за 1920—1938 г. Стоун (The measurement of consumers' expenditure and behaviour in the United Kingdom. 1920—1938. Vol. I. Stone Richard. Cambridge, Univ. Press, 1954, XI + 448 pp., 18.50 doll). (англ.)

См. также: 8401, 8704, 8706, 8767.

ГЕОМЕТРИЯ

8857. Физические прообразы геометрического принципа двойственности. Розенфельд Б. А., Уч. зап. Коломенск. пед. ин-т, 1956, **1**, 27—34

Рассматриваются физические закономерности, аналогичные геометрическому принципу двойственности. Имеющаяся в механике двойственность между координатами и импульсами в общем случае неполна, так как кинетическая энергия является квадратичной формой от импульсов, а потенциальная энергия более общей функцией координат. Полная двойственность имеет место, когда потенциальная энергия является квадратичной формой от координат. В этом случае движение системы имеет периодический характер при переменном переходе потенциальной и кинетической энергии. Аналогично ведут себя колебательные системы электродинамики и квантовой физики, первые из которых представляют собой соединения электрических полей, с накоплением потенциальной энергии и объектов, с электромагнитной инерцией, а вторые — соединение электрических полей противоположно заряженных частиц и инертных тяжелых частиц. Устойчивый характер движения периодических систем и является причиной того, что характерная особенность этих систем — двойственность — получила отражение в математике.

М. А. Джавадов

8858. Прибор для приближенного решения задач по сферической геометрии и векторной алгебре. Скундин Е. А., Уч. зап. Саратовск. пед. ин-та, 1956, вып. 23, 133—135

Прибор состоит из твердого шара, вращающегося вокруг неподвижного центра, помещенного внутри неподвижных колец — горизонтального и вертикального, перпендикулярных между собой, имеющих радиусы, равные радиусу шара. При помощи делений на горизонтальном и вертикальном кольцах определяются сферические координаты радиуса-вектора точки на сфере. Вращая шар, можно две точки M_1 и M_2 сферы совместить с точками горизонтального кольца и определить $\smile M_1M_2$ большого круга, проходящего через эти точки; найдется угол между радиусами-векторами точек M_1 и M_2.

Можно вычислять скалярные и векторные произведения двух векторов и решать более сложные задачи. Построением сферических треугольников решаются многие задачи их сферической тригонометрии. В. С. Люкшин

8859. Отображение скользящих векторов на 3-пространство. Бранд (A mapping of coplanar line-vectors on 3-space. Brand Louis), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 10, 712—714 (англ.)

Скользящий вектор $\mathbf{u}$, действующий вдоль прямой $[\mathbf{ru}] = \mathbf{u}_0$, определяется плюккеровыми координатами $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_0$ этой прямой. Для скользящих векторов $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0)$ в xy-плоскости $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$, $\mathbf{u}_0 = u_3\mathbf{k}$. На основе этих разложений определяется указанное в заглавии отображение. С помощью построенного отображения дается решение проблемы трех сил: представить данный скользящий вектор в виде суммы трех компланарных скользящих векторов, действующих вдоль заданных прямых несовпадающих и непараллельных. Затем вводится „скалярное произведение" двух скользящих векторов и дается геометрическая интерпретация условия „ортогональности" скользящих векторов с помощью полярного соответствия. Ю. Е. Пензов

8860. Понятие о геометрии Лобачевского в средней школе. Глейзер Г. И., Уч. зап. Тираспольск. пед. ин-та, 1956, вып. I, 89—109

В помощь учителю дается ряд примеров, показывающих, как в каком классе следует знакомить учащихся с новой геометрией, и кратко поясняется, какие теоремы, разделы программы 6—7—8-х классов основываются на аксиоме о параллельных Евклида, а какие положения принадлежат абсолютной геометрии. Более подробное знакомство следует начинать с 9-го класса, где на примере пятого постулата можно подтвердить положение об опытном происхождении аксиом. В 10-м классе элементарно излагаются наиболее важные факты геометрии Лобачевского (аксиома параллельности Лобачевского и ее следствия, теория площадей и т. д.), широко освещается значение открытия неевклидовой геометрии. Л. Я. Ланин

8861. Пчелы и геометрия. Киш (Albinele şi geometria. Kiss Elemér), Gaz. mat. si fiz., 1957, **B8**, № 2, 76—81 (рум.)

8862. Основные свойства гиперквадрик в проективном пространстве с бесконечной базой (аналитическое исследование). Планс (Primeras propiedades de las hipercuadricas en el espacio proyectivo con base no finita numerable (Estudio analitico). Plans Antonio), Rev. mat. hisp.-amer., 1956, **16**, № 5—6, 202—228 (исп.)

Исследуются гиперповерхности второго порядка (гиперквадрики) в пространстве последовательностей $(x_0, \ldots, x_n, \ldots)$ действительных чисел, для которых $\sum_0^\infty x_i^2$ существует. Гиперквадрики определяются уравнением $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}x_ix_j = 0$, где $a_{ij} = a_{ji}$. Доказывается теорема, аналогичная закону инерции, что позволяет осуществить проективную классификацию гиперквадрик.

Л. А. Скорняков

8863. Теоремы существования для дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными) и соответствующая метрическая геометрия. Хорних (Existenzsätze bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen und zugehörige metrische Geometrie. Hornich Hans), Comment. math. helv., 1956, **31**, № 2, 108—110. (нем.)

Дается геометрическое истолкование некоторых результатов автора (РЖМат, 1957, 443, 3133). Пусть $\varphi(x, y)$ определена на выпуклой области G, отлична от постоянной и равномерно непрерывна и пусть $\delta(\rho) = \sup|\varphi(P_1) - \varphi(P_2)|$ для всех $P_1, P_2 \in G$, для которых расстояние $P_1P_2 \leqslant \rho$. Если обычное расстояние ρ двух точек заменить числом $\delta(\rho)$, то плоскость переходит в метрическое пространство E, свойства которого зависят от поведения интеграла $\int_0^1 \frac{d\rho}{\delta(\rho)}$.

В случае сходимости (и только в этом случае): 1) любая кривая в E имеет длину ∞; 2) для уравнения $y' = \varphi(x, y)$ в любой $G' \subset G$ нарушается единственность; 3) уравнение $u_x + \varphi u_y = f(x, y)$ не имеет решений в $G' \subset G$, где f непрерывна, $f'_y \not\equiv 0$. Доказывается только 1.

Г. К. Энгелис

8864. Системы линейных уравнений с частными производными и ассоциированные геометрические объекты. Георгиу (Sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale liniare şi obiectele geometrice asociate. Gheorghiu O. Em.), Lucrările consfat. geom. diferenţ. 1955. Timişoara Acad. RPR, 1956, 231—237 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть $u^r(x_1, \ldots, x_n)\,(r = 1, \ldots, n)$ и $\theta u^r \equiv b^{ij}\frac{\partial^2 u^r}{\partial x^i \partial x^j} + c_t^{rs}\frac{\partial u^t}{\partial x^s} + d_t^r u^t$ являются контравариантными векторными плотностями весов p и q соответственно. Тогда b^{ij} — дважды контравариантная тензорная плотность веса $q - p$, а c_t^{rs} и d_t^r геометрическими объектами не являются. Но имеет место соотношение

$$\theta u^r = b^{ij}\underset{2}{E}{}^r_{ij} + c_t^{ks}\underset{1}{E}{}^{rt}_{ks} + d_r^t u^r,$$

где все величины справа—тензорные плотности (псевдотензоры по терминологии автора) и E зависит от u^r и их производных.

Г. К. Энгелис

8865. О независимости аксиом полупрямой. Нёймейстер (Sur l'indépendance des axiomes de la demi-droite. Neumeister R.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public., 1956, **36**, № 180, 113—115 (франц.)

Доказывается порядковая независимость аксиом полупрямой, данных автором в более ранней работе (РЖМат, 1957, 3500). Используются последовательно три интерпретации: прямая из одной точки; прямая из трех точек, за полупрямые принимаются пары точек; прямая — множество всех рациональных чисел, за полупрямые I и II, определяемые данной точкой, принимаются: для целого числа e — $x \in (\mathrm{I}_e)$, если $x \leqslant e$, $y \in (\mathrm{II}_e)$, если $y \geqslant e$, а для дробного числа r, заключенного между целыми n и $n+1$, — $x \in (\mathrm{I}_r)$, если $n < x \leqslant r$, $y \in (\mathrm{II}_r)$, если $y \geqslant r$ или $y \leqslant n$. Текст аксиомы 1,4 сильно перепутан, следует читать: если $A \in E$, $B \in E$, $\mathrm{I} \in [AB]$, то $\mathrm{I}\,\overline{A} = -\mathrm{I}\,\overline{B}$.

Е. Г. Гонин

8866. Обобщенные групповые операторы. Ястребов (Узагальнені групові оператори. Ястребов Ю. М.), Наук. зап. Чернівецьк. ун-т, 1956, 19, 124—148 (укр.; рез. русск.)

Решается задача: найти на многообразии $(x_1, \ldots, x_n)$ всевозможные совокупности линейных дифференциальных операторов $A_1, \ldots, A_n$; $B_1, \ldots, B_n$, обладающие свойством — операторы каждой совокупности линейно несвязаны и $[A_iB_j] = p_jA_i + q_iB_j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Указан геометрический смысл задачи. По-видимому, статья была написана на русском языке и неудачно переведена на украинский. Этот перевод в ряде мест искажает смысл.

Г. И. Дринфельд

8867. Сокращение аксиом конгруэнтности Гильберта. Белецкий А., Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, **4**, № 6, 313—316

Автор показывает, что аксиома III_3 и часть аксиомы III_4, приведенные в VII издании „Оснований геометрии" Гильберта, излишни, т. е. аксиомы конгруэнтности Гильберта не являются независимыми.

Отбрасывая аксиому III_3 Гильберта, касающуюся конгруэнтности сумм отрезков и часть аксиом III_4, утверждающую, что каждый угол конгруэнтен самому себе, автор доказывает независимость каждой из аксиом III_1, III_2, III_4 и III_5 от остальных и от аксиом инцидентности и порядка, построив оригинальную схему модели. Отмечается, что значительно более простая модель была построена Валькером (Walker R., Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. (Math.-naturwiss. Kl.), 1943, 95, 151—170).

М. П. Черняев

8868. Угловые соотношения на симплексе и эйлерова характеристика. Пешль (Winkelrelationen am Simplex und die Eulersche Charakteristik. Peschl Ernst), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. 1955. München, 1956, 319—345 (нем.)

Обозначения: x_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, n$ — декартовы координаты в евклидовом пространстве E^{n+1}; C_n — объем единичной сферы $S^n: \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu^2 = 1$; $\mathfrak{S}^n$—сферический симплекс, определяемый уравнениями $l_\mu = \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}x_\nu \geqslant 0$, $\mu = 0, 1, \ldots, n$, $\sum_{\nu=0}^{n} x_\nu^2 = 1$, $\|a_{\mu\nu}\| \neq 0$; $l_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_k}$ — объем сферической области $\left\{l_{\nu_0} > 0,\ l_{\nu_1} > 0, \ldots, l_{\nu_k} > 0,\ \sum_0^n x_\nu^2 = 1\right\}$; $a_{\nu_0\ldots\nu_k} = \frac{1}{c_n} l_{\nu_0\ldots\nu_k}$ — k-мерный (относительный) внутренний угол $\mathfrak{S}^n$ на $(n-k-1)$-мерном симплексе $\mathfrak{S}^{n-k-1} = \left\{l_{\nu_0} = l_{\nu_1} = \ldots = l_{\nu_k} = 0,\ l_{\nu_{k+1}} \geqslant 0, \ldots, l_{\nu_n} \geqslant 0,\ \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu^2 = 1\right\}$, называемом „вершиной" угла ($\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n$ — перестановка чисел $0, 1 \ldots n$; при

$k=0$, $\frac{1}{c_n} l_{\nu_0}=\frac{1}{2}$; при $k=n-1$ „вершиной“ является вершина симплекса $\mathfrak{S}^n$); $\omega_k=\sum_{\nu_0<\nu_1<\ldots<\nu_k} a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_k}$, $\omega_0=\frac{n+1}{2}$, $\omega_{-1}=1$, $w=\sum_{\nu=-1}^{n-1}(-1)^{n-\nu-1}\omega_\nu$ — обобщенная сумма углов Пуанкаре — Хопфа.

Теорема. Для любого сферического симплекса $\mathfrak{S}^n$ справедливы соотношения:

$$\omega_{2l}+\sum_{h=0}^{l}(-1)^{h+1}a_{2h+1}\binom{n-2l+2h+1}{2h+1}\omega_{2l-2h-1}=0, \quad (1)$$

$$l=0,\ 1,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{2}\right],$$

где $a_{2h+1}=\frac{1}{h+1}(2^{2h+2}-1)(-1)^h B_{2h+2}$, $h=0,\ 1,\ \ldots$; B_{2h+2} — числа Бернулли.

Соотношения (1) образуют полную систему линейно независимых линейных связей между ω_ν, которые можно получить из известных формул Пуанкаре (C. r. Acad, sci., 1905, 1).

Для симплексов в пространстве постоянной кривизны $k=1,\ 0,\ -1$ определение угла дополняется по Хопфу (Hopf H., Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., 1925, 131—141). Устанавливается, что соотношения (1), при $0\leqslant 2l<n$ верны для всех трех геометрий и что при $n=2m$ к этим соотношениям добавляется еще одно — разного вида для разных геометрий. Рассматривается симплициальное разложение замкнутого многообразия (Raumform) R^n Клиффорда — Клейна постоянной кривизны $K=1,\ 0,\ -1$ в метрические симплексы $\mathfrak{S}^n_\nu$ для каждого симплекса $\mathfrak{S}^n_\nu$ ($\nu=1,\ \ldots,\ \alpha^n$) образуются суммы углов $\omega_{l,\nu}$ измерения l и обобщенная сумма углов W_ν, число k-мерных симплексов обозначается через α^k. Обозначим через v_n n-мерный объем R^n и положим $\frac{v_n}{c_n}=\Omega_n$. Тогда (Александров — Хопф „Топология“)

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha^n}\omega_{n-l-1,\nu}=\begin{cases}\alpha^l, & l=0,\ 1,\ \ldots,\ n\\ \Omega_n; & l=-1\end{cases}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha^n}W_\nu=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\lambda\alpha^\lambda=\chi,$$

где χ — эйлерова характеристика разложения (и тем самым R^n).

Доказываются соотношения:

$$\alpha^{n-2l-1}+\sum_{h=0}^{l}(-1)^{h+1}a_{2h+1}\binom{n-2l+2h+1}{2h+1}\times$$
$$\times\,\alpha^{n-2l+2h}=0,\ 0\leqslant 2l<n$$

$$\frac{1}{2}\chi=\sum_{h=0}^{n}(-1)^h a_{2h+1}\alpha^{2h};\ n=2m$$

и ряд других. Библ. 21 назв. Г. И. Дринфельд

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

8869. Об одной геометрической задаче теории режущих инструментов. Каган В. Ф., Тр. семинара по вектор. и тензор. анализу. МГУ, 1956, вып. 10, 23—29

При изготовлении одного из режущих инструментов приходится в канавки, вырезанные в цилиндре определенного радиуса, вставлять режущие вкладыши. Нужно определить отклонение вкладыша от стенок канавки.

Стенки канавки можно рассматривать как пары сопряженных винтообразных поверхностей, а вкладыши — как сечение двух сопряженных винтообразных поверхностей парой горизонтальных поверхностей и парой цилиндрических поверхностей, соосных с винтообразной поверхностью. Вложение вкладыша в различные канавки можно рассматривать как перенос точки вкладыша с расстояния R на расстояние R_1 от оси и поворот на угол $\varphi-\varphi_1$. Тогда максимальное отклонение δ точек вкладыша от стенок не соответствующей ему канавки определяется формулой

$$\delta=\left(u\cos\frac{2\pi k}{h}-r\sin\frac{2\pi k}{h}+R_1-R\right)\cos\frac{2\pi k}{h}+$$
$$+\left[k\sin(\varphi-\varphi_1)+\left(u\sin\frac{2\pi k}{h}+r\cos\frac{2\pi k}{h}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\cos(\varphi-\varphi_1)\right]\sin\frac{2\pi k}{h}-r,$$

где r — радиус цилиндра винтообразной поверхности канавки, u — расстояние точки образующей винтообразной поверхности до точки касания образующей с цилиндром, h — шаг винтообразной поверхности канавки, k — расстояние точки вкладыша от оси.

А. М. Левинов

8870. О нормальной кривизне дорожных и аналогичных покрытий. Симонен (Sur la courbure normale des revêtements routiers ou analogues. Simonin Raymond F.), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 17, 1187—1190 (франц.)

Эволюция четырехколесных тележек связана с развитием современных дорог и в этом развитии играет роль нормальная кривизна дорожных покрытий. Допускается, что кривые качения (C. r. Acad. sci., 1956, **242**, 2621), следующие за двумя правыми (левыми) колесами, совпадают в одну правую (левую) кривую, которые геометрически определяются в каждой своей точке M нормальной кривизной ${}_d y(S)$ (в функции криволинейной координаты S точки M).

Определяется средняя кривизна для каждой кривой качения:

$${}_d y_m=\frac{1}{S}\int_0^S dy\,dS,\ {}_g y_m=\frac{1}{S}\int_0^S {}_d y\,dS$$

и определяется средняя кривая, средняя кривизна которой

$$y_m=(1/2)({}_d y_m+{}_g y_m).$$

Средняя из кривизн двух кривых качения в каждой точке M может быть рассматриваема как кривизна Y некоторой кривой качения, расположенной между правой и левой: $Y=(1/2)({}_d y+{}_g y)$, именно в середине заднего хода тележки.

Кривизна средней кривой качения исследуется клинографом, диаграмма которого в декартовых прямоугольных координатах (ордината точки y является величиной кривизны, а абсцисса $x=S$) дает геометрическое место точек с кривизной нуль. Функции $y(S)$ или $Y(S)$ удовлетворяют уравнению

$$y(1+y'^2)^{3/2}\pm y''=0.$$

Для частного случая кривых качения, когда $y'=dy/dx$ и $y'=dy/ds$ и можно пренебречь y'^2, получают $y\pm y''=0$ и тогда особенности на пути S, например, выпуклости и вогнутости, образуются полуволнами синусоиды.

По начальным гипотезам всякая кривая качения составлена из частей линии с кривизной нуль, полуволн синусоиды, выпуклых и вогнутых с неправильно изменяющимися по длине и по амплитуде участками, и это делает случайным характер функции кривизны, которая определяет кривые качения и их представление в декартовых координатах. На диаграмме, доставляемой клинодографом, алгебраическая сумма площадей между двумя точками диаграммы представляет по величине и по знаку генеральную среднюю кривизну линии качения между этими точками. Если эта сумма постоянна и равна нулю на каких-нибудь участках, составляющих S, то получается спрямление.

Если средняя линия качения, пробегаемая очень быстро тележкой, представляет две выпуклости, разделенные расстоянием, равным ширине между передними и задними колесами, если кривизна в точках опоры колес и скорость тележки достаточны, то силы трения колес на дорожном покрытии становятся ничтожными. Направление тележки необеспечено и все происходит так, как если бы карета катилась по гололедице.

Одновременность таких вероятностей объясняет некоторые случаи вращения с большой скоростью на выравненной прямой, причина которых до сих пор оставалась неизвестной.

В статье имеются опечатки. В. С. Люкшин

8871. Проблема пирамиды. Хирвонен (Pyramidiprobleemasta. Hirvonen R. A.), Maanmittaus, 1956, **31**, № 3—4, 61—72 (финск.; рез. англ.)

Дается новое аналитическое решение фотограмметрической задачи об определении ориентации пирамиды по координатам трех точек и постоянной камеры.

И. Я. Депман

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8872. Параллелограммы с целыми сторонами и диагоналями. Бруккел (Parallelograms with integer sides and diagonals. Brueckel Frank J.), School Sci. and Math., 1956, **56**, № 9, 687—696 (англ.)

Излагается метод нахождения всех параллелограммов $(a, b; c, d)$, у которых стороны a и b $(a \geqslant b)$ и диагонали c и d $(c \geqslant d)$ — целые числа. Устанавливаются равенства

$$\begin{aligned} c &= a + b - 2k, \\ d &= a - b + 2l, \end{aligned} \tag{1}$$

где k и l — целые положительные числа, которые — в силу соотношения $c^2 + d^2 \equiv 2(a^2 + b^2)$ — должны удовлетворять неравенствам

$$k \geqslant 1,\ l > k,\ k + l \leqslant b \tag{2}$$

(если $k + l = b$ — параллелограмм прямоугольный). При этих условиях сторона a определяется равенством

$$a = b - (k + l) + \frac{2k(b - k)}{l - k} \tag{3}$$

и будет выражаться целым числом, если будет целым

$$r = \frac{2k(b - k)}{l - k}. \tag{4}$$

Исходя из какого-либо целого значения $b\ (\geqslant 3)$, находят пары значений (k, l), удовлетворяющие условиям (2) и придающие r целое значение. В статье рассматриваются примеры для $b = 3, 4, 5, 10$. При $b = 5$ искомыми параллелограммами оказываются: ромб (5,5; 3,6), прямоугольник (12,5; 13,13) и параллелограмм (10,5; 13,9). Из двух параллелограммов с целыми сторонами и диагоналями (a, b, c, d) и $(a', b'; c', d')$, если они удовлетворяют соотношению

$$cc' + dd' = 2(aa' + bb') \tag{5}$$

путем их линейного комбинирования

$$m(a, b; c, d) + n(a', b'; c', d')$$

также получается параллелограмм с целыми сторонами и диагоналями. А. Г. Школьник

8873. Нео-пифагоровы треугольники. Таусситт-Фрейтаг, Фрейтаг (Neo-Pythagorean triangles Taussig Freitag Herta, Freitag Arthur H.), Scripta Math., 1956, **22**, № 2, 122—131 (англ.)

Треугольник в комплексной евклидовой плоскссти называется нео-пифагоровым, если его стороны связаны условием $a^2 + b^2 + c^2 = 0$. Доказывается ряд свойств таких треугольников (в виде необходимых и достаточных условий). Разобран пример. Ю. Е. Пензов

8874. Геометрия на досуге: треугольник. Тебо (Recreational geometry — the triangle. Thébault Victor), Scripta Math., 1956, **22**, № 2, 97—105 (англ.)

Продолжение статьи (РЖМат, 1957, 7298). Рассматриваются некоторые теоремы, связанные с высотами треугольника, и приводятся аналогичные теоремы, касающиеся высот тетраэдра. Вводятся в рассмотрение симмедианы (прямые, симметричные медианам треугольника относительно его биссектрис, выходящих из той же вершины) и приводятся некоторые теоремы, связанные с ними. Н. В. Наумович

8875. О новом способе вычисления объемов и поверхностей круглых тел. Кованько (Про новий спосіб обчислення об'ємів і поверхень круглих тіл. Кованько А. С.), Наук. зап. Львівськ. держ. пед. ін-т, 1956, **6**, 3—14 (укр.)

Пусть конус рассечен плоскостями, параллельными его основанию, на n тел с равными высотами. Если V_n' (V_n'') — сумма объемов цилиндров с такими же высотами, построенных на больших (меньших) основаниях этих тел, V — объем конуса, то $V_n' > V > V_n''$ и $V = \lim V_n' = \lim V_n''$, когда $n \to \infty$. V_n' вычисляется с помощью формулы для суммы квадратов чисел $1, 2 \ldots, n$. Аналогично выведены известные формулы для объема шарового слоя, шара, тора.

Пусть дана часть S гладкой поверхности и построена эквидистантная относительно S поверхность S' с дистанцией ε. Площадь $|S|$ поверхности S определяется автором так: $|S| = \lim (V_\varepsilon/\varepsilon)$, когда $\varepsilon \to 0$, где V_ε — объем, ограниченный поверхностями S, S' и поверхностью, образованной нормалями к S в точках ее края. Выведены формулы для площади боковой поверхности цилиндра, боковой поверхности конуса, сферической поверхности шарового слоя, поверхности тора.

Автор рекомендует ввести описанные выше методы в курс преподавания элементарной геометрии.

А. С. Смогоржевский

8876. Об эллипсах, ассоциированных прямыми Симсона треугольника. Гурматай (Sur des ellipses associées aux droites de Simson d'un triangle. Goormeghtigh R.), Mathesis, 1956, **65**, № 7—9, 395—401 (франц.)

Если точка M пробегает окружность с центром O, описанную около треугольника ABC, то точка, симметричная середине отрезка OM относительно прямой Симсона для M и треугольника ABC, описывает эллипс E, центр которого совпадает с центром окружности девяти точек.

Пусть N — точка медиатрисы OM, из которой OM виден под углом 2θ; тогда точка, симметричная N относительно обобщенной прямой Симсона для M (проходящей через основания наклонных под углом θ из M

к сторонам треугольника), описывает при переменной M эллипс E_θ, подобный и подобно ориентированный с E. Центр E_θ расположен на медиатрисе отрезка HO (H — ортоцентр треугольника), видимого из него под углом 2θ.

Исследуется оказывающаяся центральным коническим сечением огибающая семейства E_θ при переменном параметре θ. Г. С. Бархин

8877. Столетие гипоциклоиды Штейнера. Ламбахер (Die hundertjährige Steinersche Hypozykloide. Lambacher Th.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956, 9, № 7, 295—296 (нем.)

„Если из каждой точки описанной около треугольника окружности опустить перпендикуляры на его стороны, то каждые три проекции лежат на одной прямой G, а огибающая этих прямых является кривой третьего класса и четвертой степени, имеющая несобственную прямую двойной касательной“ — таким образом в 1856 г. Штейнер ввел свою гипоциклоиду. Автор статьи рассматривает специальный случай, когда две вершины треугольника совпадают. С. П. Фиников

8878. К. Задачи по тригонометрии для штурманских отделений морских училищ. Изд. 2-е. Крум (Oppgaver i trigonometri for sjømannsskolens styrmannsavdeling. 2. oppl. Krum Bjarne. Grøndahl, Grøndahl & søns boktr., 1956, 15 + upg. s., 1,50 kr.). Norsk bokfortegnelse, 1956, № 2, 14 (норв.)

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8879. Один класс конфигураций и коммутативность умножения. Аль-Дхахир (A class of configurations and the commutativity of multiplication. Al-Dhahir M. W.), Math. Gaz., 1956, **40**. № 334, 241—245 (англ.)

Мёбиусом была доказана теорема: Если $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ — два тетраэдра, расположенные так, что вершины $B_1B_2B_3B_4$ лежат соответственно в плоскостях $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$, а вершины $A_1A_2A_3$ — в плоскостях $B_2B_3B_4$, $B_1B_3B_4$, $B_1B_2B_4$ (неполная M-конфигурация), то — если имеет место теорема Паппа — вершина A_4 необходимо должна лежать в плоскости $B_1B_2B_3$ (полная M-конфигурация). Автор доказывает, что в трехмерном проективном пространстве S_3 над кольцом R всякая неполная M-конфигурация будет полной в том и только том случае, когда R коммутативно. Требование коммутативности R может быть заменено требованием компланарности двух соответствующих пар ребер тетраэдров. Доказывается, что теорема Мёбиуса эквивалентна двум равносильным теореме Паппа предложениям: „теореме о восьми прямых“ и „теореме о двух четырехугольниках“. Отсюда следует, что конфигурация Мёбиуса и конфигурации „восьми линий“ и „двух четырехугольников“ естественно эквивалентны (т. е. могут быть получены одна из другой путем некоторого числа объединений и пересечений). А. Г. Школьник

8880. Инволюционное преобразование в связке прямых пространства S_r. Турри (Trasformazioni involutorie con stella unita di rette in un S_r. Turri Tullio), Rend. Seminar. Fac. sci. Univ. Cagliari, 1956, 26, № 1—2, 58—63 (итал.)

Рассматривается инволюционное бирациональное преобразование T в пространстве S_r, которое устанавливает инволюцию J в связке прямых пространства S_r с центром в точке O. Показано, что когда J является тождественным или проективным преобразованием, то ее можно рассматривать как проекцию из O инволюции, устанавливаемой T в гиперплоскости $S_{r-1} \subset S_r$, не содержащей точки O. Если J не является таким преобразованием, то найдется в S_r такая точка, отличная от O, что инволюция, устанавливаемая T в связке прямых пространства S_r, с центром в этой точке является тождественным или проективным преобразованием. Автор отмечает, что рассмотренная им инволюция есть инволюция Жонкьэра (De Jonquières) в пространстве S_r. В. А. Маневич

8881. Применение эквидистант к решению задач. Глоговский В. В., Науч. зап. Львовск. политехн. ин-та, 1956 (1957), вып. 38, 119—125

В предшествующей статье автора (РЖМат, 1956, 8213) множество точек n-мерного пространства, равноудаленных от заданных алгебраических многообразий, названо эквидистантным множеством или эквидистантой; при решении некоторых метрических задач использованы эквидистанты второго порядка.

В реферируемой статье применяются эквидистанты высших порядков к решению двух задач.

1. Даны две скрещивающиеся перпендикулярные прямые и шар. На одной из прямых найти точки, равноудаленные от другой прямой и шара.

2. Даны две пересекающиеся прямые и цилиндр вращения. Построить шар, соприкасающийся с цилиндром и одной из прямых и имеющий центр на другой прямой. А. Г. Дорфман

8882. О катеноиде в пространстве Лобачевского. Беляев (Про катеноїд в просторі Лобачевского. Беляев М. Г.), Наук. зап. Чернівецьк. ун-т. 1956, **19**, 60—63 (укр.; рез. русск.)

Показано, что в пространстве Лобачевского уравнение катеноида в прямоугольных координатах выражается через элементарные функции и эллиптические интегралы. Есть опечатки. А. С. Смогоржевский

8883. Графический способ определения углов наклона координатных осей к аксонометрической плоскости проекций. Задорожный А. М., Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1956, вып. 14, 55—58

Если известны углы наклона двух координатных осей, то угол наклона третьей координатной оси может быть найден аналитически элементарным способом. Автором построены графики, которые дают возможность заменить аналитическое решение графическим. Построения немногочисленны и просты. Нет анализа получаемой точности. В. Н. Журавлева

8884. Об упрощении построений при нахождении линии пересечения некоторых линейчатых поверхностей в случае ограниченной площади чертежа. Сутормин А. М., Сб. научно-исслед. работ. Ташкентск. текстильн. ин-т, 1956, вып. 3, 119—120

Предлагаемый способ нахождения линии пересечения двух конусов является вариантом элементарной задачи на отыскание следа плоскости, если след одной из прямых, определяющих эту плоскость, находится за пределами чертежа. В. Н. Журавлева

8885. Неевклидова циклография и плоская инверсионная геометрия (геометрия Лагерра, Ли и Мебиуса). I. Фладт (Die nichteuklidische Zyklographie und ebene Inversionsgeometrie (Geometrie von Laguerre, Lie und Möbius). I. Fladt Kuno), Arch. Math., 1956, **7**, № 5, 391—398 (нем.)

В опубликованной в 1882 г. работе „Zyklographie“ Фидлер указал способ отображать окружности плоскости в пространстве, который является средством решения геометрических задач на построение при помощи стереометрического исследования. Э. Мюллер во втором томе своей книги „Vorlesungen über Darstellende Geometrie“ (1922) развил далее циклографию Фидлера и получил ряд интересных ее приложений. Автор показывает, что методы Фидлера и Мюллера могут быть перенесены и в неевклидову геометрию. Используя

проективную метрику, он рассматривает ряд преобразований, с помощью которых и обосновывает основные положения циклографии в неевклидовой геометрии.
М. П. Черняев

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8886. Арифметическое изучение геометрии на алгебраической кривой. Арреги-Фернандес (Estudio aritmético de la Geometría sobre una curva algebraica. Arregui Fernández Joaquín), Rev. Real. acad. cienc. exact., fis. y natur. Madrid, 1956, **50**, № 1, 11—17 (исп.)

Доказательство теоремы Римана — Роха для сепарабельного степени трансцендентности единица расширения Σ поля констант k. Вводятся понятия кольца валюаций и места в Σ, дивизоры определяются, как формальные конечные произведения степеней мест. Пусть a — дивизор, $g(a)$ — его степень и $l(a)$ — размерность линейного пространства элементов $x \in \Sigma$, удовлетворяющих соотношению $\delta(x)\, a = e$, где $\delta(x)$—представление x через дивизоры и e — целый дивизор. Тогда, при целом a и достаточно большом n, $l(a^n) - g(a^n)$ не зависит от n. Эта разность обозначается через $1-p$; p называется жанром поля Σ, а $\lambda(a) = l(a) - g(a) + p - 1$ — индексом специальности a. Показывается, что если Σ алгебраически замкнуто, и $\lambda(a) = s > 0$, то найдется такое место p, что $\lambda(ap) = s - 1$. Отсюда быстро следует, что $l(a) = g(a) - p + 1 + l(ea^{-1})$ — теорема Римана — Роха. В. В. Морозов

8887. О пучке поверхностей 2-го порядка, проходящих через 6 данных точек в пространстве. Hure (Über das Gebüsch der durch 6 Punkte im Raum bestimmten Flächen 2. Ordnung. Ničе Vilko), Bull. scient. Conseil acad. RPEY, 1953, **1**, № 3, 69 (нем.)

Рассматривается пучок ∞^3 поверхностей 2-го порядка, определяемых 6 точками в пространстве. Среди этих поверхностей имеется ∞^2 конусов, в том числе ∞^1 таких, у которых образующие, проходящие через 6 основных точек пучка, образуют три пары инволюции. Геометрическое место вершин таких конусов есть правильная поверхность 4-го порядка XII рода. На этой поверхности 4-го порядка находится 15 кривых 5-го порядка, на которых лежат вершины тех конусов пучка, образующие которых, проходящие через 6 основных точек, образуют инволюцию на каждом этом конусе. Эти пространственные кривые 5-го порядка имеют ∞^1 четверных касательных, являющихся образующими одной системы образующих правильной поверхности 2-го порядка. Вторая система образующих на этой поверхности образует инволюцию на этих конусах. Если основные точки пучка попарно мнимы, то имеется только 3 или 1 такая кривая. Н. В. Наумович

8888. О теории простых интегралов 3-го рода на поверхности или алгебраическом многообразии. Северн (Sulla teoria degl' integrali semplici di 3-a specie sopra una superficie o varietà algebrica. Severi Francesco), Rend mat. e applic., 1955, **14**, № 4, 551—563 (итал.)

Опираясь на лемму (Math. Ann, 1906, **62**, 194—225, § 4): „Необходимое и достаточное условие, чтобы алгебраические неприводимые кривые $C_1, C_2, \ldots, C_l$ на алгебраической поверхности F были алгебраически зависимы, состоит в существовании на F простого интеграла 3-го рода, логарифмическими кривыми которого были бы только $C_1, C_2, \ldots, C_n''$", автор доказывает теоремы.

Число простых интегралов 3-го рода, существенно независимых, у которых их логарифмические кривые входят в данную группу алгебраических кривых $C_1, C_2, \ldots, C_l$, равно $\lambda - \rho$, где λ — число кривых в наименьшей группе, входящей в группу C_1, C_l и ρ — наибольшее число алгебраически независимых кривых среди данных кривых.

Необходимое и достаточное условие, чтобы всякий простой интеграл 3-го рода на поверхности приводился к линейной комбинации рациональной функции и логарифмов от рациональных функций состоит в том, чтобы поверхность была регулярна. М. П. Черняев

8889. О числе нечетных обходов действительной алгебраической кривой, лежащей на алгебраической поверхности нечетного порядка, свободной от особенностей. Розина (Sul numero dei circuiti dispari delle curve algebriche reali situate sopra superficie algedriche d'ordine dispari prive di singolarità. Rosina Bellino Antonio), Bol. Unione mat, ital., 1956, **11**, № 3, 419—421 (итал.)

Распространяются на действительную алгебраическую кривую C произвольного порядка без кратных точек, расположенную на алгебраической поверхности S нечетного порядка, свободной от особенностей, результаты Пьяццолла-Белоч (Piazzolla-Beloch M., C. r. Acad. sci., 1929, **189**, 1226; Rend. Circolo mat. Palermo, 1931, **55**, 1—20; Atti Accad. maz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1950, ser. 8, fasc. 6, 576—578) для поверхности 3-го порядка и Комесати (Comessatti A., Bol. Unione mat. ital., 1933, **22**, 289—293) для действительной рациональной поверхности, допускающей действительное отображение на плоскость.

Из условий, наложенных на поверхность S, следует, что она обладает только одной нечетной полостью, односторонней (Standt), и возможно четными полостями второго рода, т. е. не допускающими обходов нечетного порядка (подобно эллипсоиду); полости первого рода допускают их (подобно гиперболоидам).

Основная теорема: число нечетных обходов действительной алгебраической кривой C произвольного порядка, свободной от кратных точек, лежащей на поверхности S, не может превышать порядка связности z нечетной полости поверхности.

Иначе: число нечетных обходов кривой C на поверхности S не может превышать порядка полной связности поверхности, увеличенного на двойное число четных полостей (второго рода), которые принадлежат той же поверхности. С. П. Фиников

8890. Бирациональные преобразования на плоскости с периодом 2. Гутвирт (Transformations birationnelles planes de période deux. Gutwirth Azriel), Rend. mat. e applic., 1953, **12**, № 3—4, 347—359 (франц.)

Дается полная классификация кремсновых пресбразований на плоскости с периодом 2. Они принадлежат одному из 6 классов. 1. Пресбразования, сохраняющие индивидуально кривые одного пучка рациональных кривых. Модель: пресбразование Жонкьэра (Jonquieres) порядка $n > 4$.

2. Преобразования, сохраняющие индивидуально кривые нескольких пучков. Модель: I_3.

3. Пресбразования, сохраняющие гомалоидную сеть. Модель: гармоническая гомология.

4. Преобразования, сохраняющие каждую кривую одного пучка эллиптических кривых. Модель: инволюция Бертини (Bertini).

5. Преобразования, сохраняющие каждую кривую сети эллиптических кривых. Модель: инволюция Гейзера (Geiser).

6. Преобразования, сохраняющие кривые одного пучка рациональных кривых и нескольких пучков эллиптических кривых. Модель: I_4, если кривые совпадающих точек жанра 2 и специальное I_5, если эти кривые жанра 3. С. П. Фиников

8891. Изучение бирационального преобразования комплексного S_5, определяемого квадратичным

бидуальным преобразованием. Бальсимелли (Studio di una trasfofmazione birazionale dell S_5, complesso determinata da una trasformazione quadratica biduale. Balsimelli Pio), Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, 1954 (1953), **20**, 273—278 (итал.)
Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 510.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА И ОБОБЩЕНИЯ

8892. Исправление к статье „К вопросу об образовании поверхностей линиями“. (УМН УШ, вып. 2 (54), (1953), 147—156). Щербаков Р. Н., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 1, 259—261

Автор исправляет ошибочное заключение, что только плоские линии поверхности дают нетривиальное решение вопроса (РЖМат, 1953, 880). В исправленном виде: образование поверхности линиями посредством проективных преобразований последних возможно для любой поверхности. При этом линии должны принадлежать некоторому классу, который содержит ∞^1 линий, в том числе и плоские линии поверхности. С. П. Фиников

8893. Непрерывные отображения ограниченной вариации. Погорелов А. В., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 4, 757—759

Автор рассматривает непрерывные отображения $\{f\}$ поверхности Φ на $\bar{\Phi}$ (гладкие поверхности). Отображение f-ограниченной вариации, если сумма площадей образов любой конечной совокупности попарно не пересекающихся замкнутых множеств на Φ равномерно ограничена. Абсолютная вариация отображения f на открытом множестве G определяется как $\sup \sum_k \mu f(F_k)$, где $\mu f(F_k)$ — площадь образа F_k, а верхняя грань берется по всем конечным совокупностям попарно не пересекающихся замкнутых множеств $F_k \subset G$. Абсолютная вариация $f_f^0(H)$ отображения f на множестве H — нижняя грань абсолютных вариаций на открытых множествах, содержащихся в H. Устанавливаются следующие теоремы.

Теорема 1. Абсолютная вариация — вполне аддитивная функция на кольце борелевских множеств.

Теорема 2. Функция $n_H(X)$ — число прообразов точки $X \in \bar{\Phi}$ в $H \subset \Phi$, H — борелевское множество — измерима и $\int_{\bar{\Phi}} n_H(X)\,dX = v_f^0(H)$ (dX элемент площади $\bar{\Phi}$, интегрирование по Лебегу).

Далее вводится понятие регулярной точки X поверхности Φ относительно отображения f (точка, для некоторой окрестности которой отображение однолистно). Указанная окрестность называется нормальной. Степенью точки X относительно ориентированной кривой γ, охватывающей X (γ принадлежит гомеоморфной кругу нормальной окрестности) — называется число обходов вокруг X по γ. Пусть степень X относительно γ равна $+1$. Тогда степень $f(X)$ относительно $f(\gamma)$ называется индексом $i(X)$ точки X относительно отображения f. Положительная $v_f^+(H)$ (отрицательная $v_f^-(H)$ вариация отображения f на H — абсолютная вариация f на подмножестве точек H с положительным (с отрицательным) индексом.

$v_f(H) = v_f^+(H) - v_f^-(H)$ — полная вариация отображения f на H.

Теорема 3. Положительная, отрицательная и полная вариации — вполне аддитивные функции на кольце борелевских множеств.

В теореме 4 устанавливается выражение для полной вариации отображения на G (гомеоморфная кругу область на Φ, ограниченная простой кривой γ с равной нулю абсолютной вариацией относительно f): $v_f(G) = \int_{\bar{\Phi}-f(\gamma)} q_{f(\gamma)}(X)\,dX$, где $q_{f(\gamma)}(X)$ — степень X на $\bar{\Phi}$ относительно $f(\gamma)$ с соответствующей γ ориентацией.

Пусть Φ — ориентируемая гладкая поверхность, а f — отображение Φ на сферу по параллельности нормалей. Если f — отображение ограниченной вариации, то Φ называется поверхностью ограниченной внешней кривизны. Для таких поверхностей вводятся понятия положительной, отрицательной и полной внешних кривизны, как соответствующие классификации сферического отображения. Регулярные точки разделяются на эллиптические ($i(X) = +1$), параболические ($i(X) = 0$), гиперболические ($i(X) = -1$) и точки уплощения ($i(X) < -1$). Если все точки регулярны, то поверхность называется квазирегулярной.

Теорема 5. Пусть отрицательная кривизна поверхности Φ равна нулю и α — плоскость, пересекающая Φ. Тогда любая часть Φ, на которые ее разбивает α, не содержащая границы Φ, есть выпуклая поверхность. Если Φ полная поверхность, то она либо замкнутая, либо бесконечная выпуклая поверхность.

Теорема 6. Если положительная и отрицательная кривизны Φ равны нулю, то Φ — развертывающаяся (в обычном смысле) поверхность. Если Φ полная, то она цилиндрическая. Э. Г. Позняк

8894. Распространение теоремы Гаусса о сферическом изображении на случай поверхностей ограниченной внешней кривизны. Погорелов А. В., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 5, 945—947

Пусть $\sigma^+(H)$, $\sigma^-(H)$, $\sigma(H)$ — положительная, отрицательная и полная внешние кривизны поверхности на борелевском множестве H (см. реф. 8893), а $\omega^+(H)$, $\omega^-(H)$, $\omega(H)$ — положительная, отрицательная и полная внутренние кривизны этой поверхности. Тогда справедливы соотношения:

$$\sigma^+(H) = \omega^+(H), \quad \sigma^-(H) \leqslant \omega^-(H).$$

Если поверхность замкнутая, то имеют место соотношения:

$$\sigma^+(H) = \omega^+(H), \ \sigma^-(H) = \omega^-(H), \ \sigma(H) = \omega(H).$$

Такие же соотношения справедливы для любого борелевского множества H достаточно малой окрестности каждой регулярной точки. Если поверхность квазирегулярна, то эти соотношения справедливы для любого H (теоремы 1, 2, 3, 4).

С помощью теоремы 5 и 6, сформулированных в предыдущем реферате, устанавливаются следующие предложения:

Теорема 5. Пусть Φ — поверхность ограниченной внешней и неотрицательной внутренней кривизны. Тогда, если край Φ плоский, то Φ — выпуклая поверхность. Если, при этом Φ полная поверхность, то она замкнутая выпуклая, либо бесконечная выпуклая поверхность.

Теорема 6. Поверхность ограниченной внешней кривизны, локально изометричная плоскости, имеет обычное для развертывающейся поверхности строение, с прямолинейными образующими и стационарной касательной плоскостью вдоль каждой образующей. Если поверхность полная, то она цилиндрическая.
Э. Г. Позняк

8895. Параллельный перенос вектора и кривые на нерегулярных гладких поверхностях. Бори-

сов Ю. Ф., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 141—142

Краткие тезисы доклада, содержащие определение и перечень ряда свойств параллельного переноса вектора вдоль кривых на нерегулярных гладких поверхностях F, для которых

$$\lim_{M \to N} \frac{\theta(M, N)}{\sqrt{\rho(M, N)}} = 0,$$

где $\rho(M, N)$ — расстояние между точками M и N на F, а $\theta(M, N)$ — угол между нормалями к F в этих точках. Отмечаются связи параллельного перенеса с геодезическим поворотом кривой и возможные особенности поверхностей указанного класса. В. А. Залгаллер

8896. Линейчатые многообразия комплекса прямых. Кованцов (Лінійчасті многостатності комплексу прямих. Кованцов М. І.), Наук. зап. Запорізьк. держ. пед. ін-т, 1956, 2, 97—123 (укр.)

Статья посвящена применению метода внешних форм Картана в метрической теории комплексов. Общепринятые обозначения (Фиников С. П., Метод внешних форм Картана, М. — Л., 1948) ниже не расшифровываются.

I. Нормальная конгруэнция. Уравнением нормальной конгруэнции является $\omega_1 = a\omega_{32}$; комплекс распадается на ∞^1 нормальных конгруэнций, если $3a^2x_1 + 2ax_3 - x_6 + x_4 = 0$, где a — кривизна комплекса, x_i — коэффициенты в разложении форм $\omega_{12}, da, \omega_3$ по формам базиса. Класс таких комплексов зависит от двух функций двух аргументов и главными плоскостями (в данном случае совпадающими с фокальными) являются биссектрные плоскости координатных углов репера. Последнее имеет место для любой конгруэнции, фокусы которой симметричны относительно центра луча комплекса.

II. Параболическая конгруэнция. Уравнением параболической конгруэнции, фокус которой совпадает с центром луча комплекса, является $\omega_1 = 0$. Комплекс распадается на ∞^1 таких конгруэнций при условии $2ax_3 - x_6 = 0$. Приводятся уравнения асимптотических линий фокальной поверхности: $\omega_{31} = 0$; $a\omega_{31} + \omega_3 = 0$. Для первой из них кривизна и кручение, соответственно, равны:

$$k = (ax_3)^{-1}, \quad \varkappa = -\omega_{13}\omega_3^{-1}; \text{ для второй } \varkappa' = a^{-1}.$$

III. Развертывающиеся поверхности. Из развертывающихся поверхностей, ребра возврата которых пересекают луч комплекса в точке M, рассматриваются конус с вершиной в M и совокупность S прямых комплексов, лежащих в плоскости, касательной к конусу. Вычисляются кривизны: кривой l, по которой конус пересекается с плоскостью, перпендикулярной лучу комплекса, и кривой, огибаемой прямыми S. Центром луча является такая его точка, для которой расстояние от соответствующей точки кривой l будет наибольшим; кривизна комплекса обратна этому максимальному расстоянию.

IV. Центральные кривые. Всякий комплекс является совокупностью касательных некоторого двупараметрического семейства кривых, причем точками касания являются центры лучей комплекса. Эти кривые, следуя Хааку, автор называет центральными. Указано условие, при котором заданное двупараметрическое семейство кривых в пространстве является семейством центральных кривых некоторого комплекса. В качестве примера приводится семейство винтовых линий $x = u\cos t$, $y = u\sin t$, $z = f(u)t + v$ (u, v — параметры семейства), которое является семейством центральных линий.

Г. И. Дринфельд

8897. К дифференциальной геометрии пространства Римана двух и трех измерений. Тутаев Л. К., Уч. зап. Минск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 5, 65—77

Выделяя пространства Римана (двух, а затем и трех измерений) из плоских моделей проективных пространств и пользуясь методом внешних форм Картана, автор рассматривает понятия, аналогичные основным понятиям элементарной дифференциальной геометрии кривых и поверхностей. К. К. Мокрищев

8898. К теории поверхностей в пространстве Лоренца трех измерений. Тутаев Л. К., Уч. зап. Минск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 5, 59—64

При помощи метода внешних форм Картана изучаются в трехмерном пространстве Лоренца основные соотношения, реперы поверхности, линии кривизны, аналоги теоремы Менье и индикатрисы Дюпена, сопряженные сети, асимптотические и геодезические линии.

К. К. Мокрищев

8899. Замечания о паре пространственных криволинейных элементов. Террачини (Osservazioni sulle coppie di elementi curvilinei spaziali. Terracini Alessandro), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, 17, 293—297 (итал.)

Рассматриваются проекции $\overline{C}$ и $\overline{C}'$ двух криволинейных элементов C и C' с общим началом O и общей касательной t, причем для каждого элемента выбирается свой центр проектирования (G и G'). В качестве плоскостей проекций рассматривается любая плоскость α, проходящая через прямую t, не являющаяся соприкасающейся с данными элементами (случай, когда α — главная плоскость Альфана, рассмотрен в предыдущей работе автора — РЖМат, 1957, 3459).

Проекции $\overline{C}$ и $\overline{C}'$ имеют соприкосновение 2-го порядка тогда и только тогда, когда плоскости tG и tG' соответствуют в проективитете, в котором двойными плоскостями являются главная плоскость и плоскость α, а соприкасающиеся плоскости элементов C и C' соответствуют.

Проекции $\overline{C}$ и $\overline{C}'$ имеют соприкосновение 3-го порядка тогда и только тогда, когда лучи OG и OG' соответствуют в некотором бирациональном квадратическом соответствии. Это соответствие становится коллинеацией лишь тогда, когда плоскость α является плоскостью, которая образует с соприкасающимися плоскостями элементов C и C' и главной плоскостью Альфана сложное отношение, равное инварианту Бомпиани двух касающихся криволинейных элементов E_3 (Bompiani E., Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1935, 22, № 6, 490). При этом коллинеация является гомологией, ось и плоскость которой являются главными осью и плоскостью. Р. Н. Щербаков

8900. О точечных изгибаниях конгруэнций прямых. Чех Эдуард, Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 2, 234—273 (рез. франц.)

Исследуются соответствия между трехмерными многообразиями точек V_3 и V_3', лежащих в S_r на ∞^2 прямых (на конгруэнциях L, L') и обладающих касательными коллинеациями, постоянными вдоль каждой прямой.

Касательным пространством конгруэнции L называется линейное пространство $\tau(u, v)$ точек x, y, x_u, x_v, y_u, y_v вдоль прямой $p(u, v)$, $p = (x, y)$; его размерность m принимает значения $3 \leqslant m \leqslant 5$. При $m = 5$ фокусы отсутствуют. Касательное подпространство $\tau_3(u, v)$ в заданном направлении $du : dv$ и касательное подпространство $\tau_3'(u, v)$ в заданной точке $z = \alpha x + \beta y$ луча — различны.

При $m = 4$ и $\dfrac{dx}{du} - \dfrac{dy}{dv} = ax + by$ касательное τ_3' в точке $\alpha x + \beta y$ совпадает с касательным τ_3 в направлении $dv : du = -\alpha : \beta$. При $m = 4$ и $\dfrac{\partial x}{\partial u} = hx + ky$, $k \neq 0$ единственный фокус луча p описывает двумерную

фокальную поверхность. При $m=4$ и $k=0$ конгруэнция L принадлежит одной связке конических поверхностей с вершинами на кривой — директрисе конгруэнции. При $m=3$ конгруэнция обладает развертывающими поверхностями

$$A\,du^2+B\,du\,dv+C\,dv^2=0.$$

В зависимости от характера этих двух семейств конгруэнции L подразделяются еще на 4 типа.

Взаимно однозначное соответствие T между лучами L и L' $p(u,v)\longleftrightarrow p'(u,v)$ называется точечным изгибанием L в L', если его можно расширить до точечного соответствия T^* между $V_3(L)$ и $V_3(L')$ так, чтобы для каждой пары лучей p и p' существовала коллинеация между $\tau(u,v)$ и $\tau'(u,v)$, осуществляющая совпадение точек z и z' этих лучей и их первых дифференциальных окрестностей.

Для изгибания необходимо, чтобы обе конгруэнции L и L' принадлежали к одному типу. Внутри одного типа конгруэнции L и L' вообще могут быть произвольными. Произвол же соответствия T зависит от типа конгруэнций L и L'. Л. М. Семиусова

3901. Обобщенные кривые Дарбу в подпространстве евклидова пространства. Мишра (Generalised Darboux curves in a subspase of a Euclidean space. Mishra R. S.), Istanbul Üniv. fen. fak. mec., 1956, A21, № 1, 25—31 (англ.; рез. турецк.)

Кривые Дарбу на n-поверхности V_n в евклидовом m-пространстве E_m определяются как линии, соприкасающаяся гиперсфера которых касается V_n в каждой точке, и, следовательно, один из нормальных векторов V_n в точке P одинаково направлен с вектором, соединяющим P с центром соприкасающейся гиперсферы кривой в точке P.

Если в E_m задано $m-n$ конгруэнций кривых таких, что через каждую точку V_n проходит кривая каждой конгруэнции, то обобщенными кривыми Дарбу называются кривые V_n, соприкасающаяся гиперсфера которых в каждой точке P кривой такова, что один из направляющих векторов конгруэнции одинаково направлен с вектором, соединяющим P с центром соприкасающейся гиперсферы. Находятся дифференциальное уравнение обобщенных кривых Дарбу и некоторые их свойства. Ю. Е. Пензов

8902. О B-кривизнах кривых на поверхностях евклидова пространства. Трюк (On B-curvatures of curves on surfaces of the Euclidean space. Tryuk K.), Ann. polon. math., 1955, 2, № 1, 14—28 (англ.)

В 1934 г. (Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу Н.-и. ин-та матем. при МГУ, 1937, 4) референт ввел так называемые B-кривизны для кривых на поверхностях, погруженных в пространство линейной связности. Автор реферируемой статьи рассматривает подробнее B-кривизны кривых на поверхностях, погруженных в трехмерное евклидово пространство.

Сначала она дает условия для кривой быть B-прямой, B-плоской или B-пространственной. Вслед за этим выводит формулы B-кривизны для B-плоской кривой и обоих B-кривизн для B-пространственной кривой.

Далее автор устанавливает отношения между B-кривизной, с одной стороны, и геодезической кривизной, нормальной кривизной и геодезическим кручением — с другой.

Наконец, она исследует, в частности, B-кривизны кривых на развертывающихся поверхностях. На плоскости все кривые — B-прямые. Образующие всех развертывающихся поверхностей также B-прямые. На цилиндрах все кривые, отличные от образующих, — B-плоские. На конусах и поверхностях с ребром возврата нет B-плоских кривых. S. Gołąb

8903. О неголономной сфере и неголономной плоскости. Мирон (Asupra sferei neolonome şi planului neolonom. Miron R.), An. ştiinţ. Univ. Iaşi. Sec. I, 1955, 1, № 1—2, 43—52 (рум.; рез. русск., франц.)

В трехмерном евклидовом пространстве берется трехпараметрическое семейство нормальных трехгранников $\bar{R}$, I_1, I_2, I_3, так что $d\bar{R}=\omega_0^i I_i$, $dI_1=rI_2-qI_3$, $dI_2=pI_3-rI_1$, $dI_3=qI_1-pI_2$, где $p=p_i\omega_0^i$, $q=q_i\omega_0^i$, $r=r_i\omega_0^i$. Для неголономного многообразия V_3^2 определяемого уравнения $\omega_3=0$ подсчитываются величины: $T_m=p_1+q_2$ (среднее кручение), $K_t=p_1q_2-p_2q_1$ (полная кривизна), $M=p_2-q_1$ (средняя кривизна), $K_g=K_t-(1/4)T_m^2$ (гауссова кривизна), $T_t=K_t-(1/4)M^2$ (полное кручение). Неголономная сфера $\sum_3^2$ была ранее определена Моисилом как такое V_3^2, у которого вторая фундаментальная форма пропорциональна первой, а в таком случае будут иметь место равенства $p_1-q_2=p_2+q_1=0$. Эти равенства позволяют автору вывести некоторые соотношения между введенными выше величинами, а также сформулировать ряд предложений о свойствах тех или иных линий на $\sum_3^2$ (линий кривизны, асимптотических, изотропных, односторонне и двусторонне сопряженных линий, геодезических). Подобным же образом исследуются и свойства неголономной плоскости π_3^2, определяемой тождественным обращением в нуль второй фундаментальной формы. Для такой плоскости выполнены равенства $p_1-q_2=p_2=q_1=0$. Откладывая на нормали к неголономной поверхности $\bar{R}$ достаточно малый отрезок, получают другую неголономную поверхность $\bar{R}'$. Автор находит ряд интерпретаций для некоторых инвариантов на $\bar{R}$, пользуясь предельным переходом $\bar{R}'\to\bar{R}$. Наконец, он строит на V_3^2 индикатрису нормальных кривизн (индикатрису Дюпена) и индикатрису геодезических кручений (он присваивает ей название индикатрисы Бонна) и исследует их взаимное расположение для различных частных типов неголономных многообразий. Н. И. Кованцов

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

8904. К интегрированию изотропных комплексов в R_5. Пинль (Zur Integration der isotropen Komplexe in R_5. Pinl M.), Monatsh. Math., 1956, 60, № 4, 298—312 (нем.)

Решается задача о безынтегральном представлении изотропных кривых евклидова комплексного пятимерного пространства R_5, являющихся, как известно, интегралами некоторого уравнения Монжа. Известно, далее, что с каждым дифференциальным уравнением Монжа может быть связано определенное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка (уравнение Гамильтона). Беря полный интеграл последнего уравнения, составляют какое-либо однопараметрическое семейство решений R_l из этого интеграла, а общее решение уравнения Гамильтона получают как огибающую этого семейства. Тогда ребро возврата такой огибающей и будет представлять собой некоторое частное решение соответствующего уравнения Монжа. Получаемое таким образом решение будет представлять собой то, что называют свободным от интегралов решением уравнения Монжа. При этом, если R_l — линейные многообразия, l — их размерность,

а p — порядок высших производных их базисных векторов (Stellungsvektoren) и произвольных функций, входящих в решение, то безынтегральное представление называется представлением типа (l, p). Автор решает поставленную задачу с помощью представления типа (2, 1) и получает следующие уравнения, определяющие изотропные кривые пространства R_5:

$$x_1 = tf' \cos t + t \sin t\,(g' \cos\psi + h' \sin\psi),$$
$$x_2 = -tf' \sin t + t \cos t\,(g' \cos\psi + h' \sin\psi),$$
$$x_3 = f - (g' \cos\psi + h' \sin\psi), \qquad t = \sqrt{-1} \quad (1)$$
$$x_4 = g + f' \cos\psi, \quad x_5 = h + f' \sin\psi,$$

где функции $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $\psi(t)$ подчинены единственному условию:

$$f'\psi' = g' \sin\psi - h' \cos\psi. \qquad (2)$$

Автор показывает, что кривые (1) в общем случае не принадлежат одной четырехмерной гиперплоскости.

Полагая $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2 = r^2$ ($r = \text{const}$), автор получает сферическую изотропную кривую, которая в случае $r = 0$ становится дважды изотропной кривой. Если радиус — вектор е точки такой кривой принять за базисный вектор некоторой гиперплоскости R_4, то получают безынтегральное представление максимального типа (4,4).

В заключение рассматриваются такие решения проблемы Монжа, у которых исчезает первая вариация (diskriminierende Lösungen). Автор доказывает, что такие изотропные кривые евклидова n-мерного пространства, не принадлежащие ни одному из его неизотропных линейных подпространств, суть изотропные прямые. Н. И. Кованцов

8905. Об одном типе тензоров в римановом пространстве. Чаки (On a type of tensor in a Riemannian space. Chaki M. C.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1956, A22, № 2, 89—97 (англ.)

В римановом пространстве V_n рассматривается тензор F_{ijkl}, удовлетворяющий всем алгебраическим тождествам тензора кривизны, т. е.

$$F_{ijkl} + F_{ijlk} = 0, \quad F_{ijkl} - F_{klij} = 0. \qquad (1)$$

Известно, что для V_2 и V_3 наиболее общий вид тензора F_{ijkl}, удовлетворяющего соотношениям (1), есть

$$F_{ijkl} = g_{ik}a_{jl} + g_{jl}a_{ik} - g_{il}a_{jk} - g_{jk}a_{il},$$

где a_{ij} — симметрический тензор. Автор указывает, что при заданном римановом пространстве V_n и произвольной аффинной связности Γ_{ij}^k тензор

$$F_{ijkl} = {}^1/_4\,(K_{ijkl} + K_{ijlk} + K_{klij} + K_{lkij}), \qquad (2)$$

где $K_{ijkl} = g_{i\alpha}K^{\alpha}_{\cdot jkl}$, а $K^{i}_{\cdot jkl}$ — тензор кривизны связности Γ_{ij}^k, удовлетворяет условиям (1).

Далее, V_n называется гомогенным относительно тензора a_{ij}, если $a_{ij} = \sigma g_{ij}$, $\sigma \neq \text{const}$, g_{ij} — метрический тензор V_n.

В статье рассмотрены некоторые свойства тензора F_{ijkl}, удовлетворяющего условиям (1) для V_1, V_3 и V_4, а также (2) для V_1 и V_3 при некоторых условиях на связность Γ_{ij}^k. Наконец, получены необходимые и достаточные условия гомогенности V_2, V_3, V_4 относительно тензора $F_{ij} = g^{\alpha\beta}F_{i\alpha\beta j}$. Н. С. Синюков

8906. О самосопряженных дифференциальных формах на римановом пространстве. Элиану (Asupra formelor diferentiale autoadjuncte pe spaţiul lui Riemann. Elianu I. P.), Lucrările consfat. geom. diferenţ. 1955, Timişoara Acad. RPR., 1956, 223—230 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются некоторые свойства самосопряженных дифференциальных форм на римановом ориентируемом пространстве V_n (размерности n). Форма ω называется самосопряженной, если $\omega^* = \omega$ (переход к сопряженным формам определяется известным образом с помощью римановой метрики). Для существования такой формы необходимо, чтобы $n = 2p$ и $p = 2m$ где p — степень формы. Тензор, определяющий форму, в локально геодезической системе координат, должен удовлетворять условию: $a_{i_1 \ldots i_p} = a_{i_{p+1} \ldots i_n}$. Предположим, что пространство V_n компактно. Используя ортогональное разложение пространства форм, автор записывает сопряженную форму в виде: $\omega = \alpha + \beta + \gamma$, где α гомологична нулю, β когомологична нулю и γ — гармоническая форма (причем $\alpha^* = \beta$, $\beta^* = \alpha$, $\gamma^* = \gamma$). Показывается, что самосопряженная форма, гомологичная или когомологичная нулю, тождественно равна нулю. Отсюда выводится, что каждая из них принадлежит одному из трех типов: 1) $\omega = \alpha + \beta + \gamma$; 2) $\omega = \alpha + \beta$; 3) $\omega = \gamma$. Эффективно строятся формы этих типов.

Для гармонических самосопряженных форм должно удовлетворяться дополнительное условие:

$$\delta^{j_1 \ldots j_{p+1}}_{i_1 \ldots i_{p+1}} a_{j_1 \ldots j_p\, j_{p+1}} = 0.$$

Линейно независимых среди этих форм (ввиду теоремы Ходжа) может быть не более, чем R^p, где R^p — p-мерное число Бетти пространства V_n.

В заключение доказывается, что периоды ω^l ($l = 1, 2, \ldots, R^p$) формы ω удовлетворяют условию: $\varepsilon^p_{ij}\omega^i\omega^j > 0$, где ε^p_{ij} — матрица, обратная матрице пересечений R^p независимых p-мерных циклов пространства V_n. Поэтому периоды не могут, вообще говоря, быть взятыми произвольно. И. З. Розенкноп

8907. Зависимость между основными тензорами поверхности (гиперповерхности) уровня. Катков Г. Ф., Сб. науч. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1956, вып. 6, кн. 2, 211—220

Основными тензорами поверхности уровня

$$\varphi(u^1, u^2, u^3) = C$$

скалярного поля φ в трехмерном евклидовом пространстве E_3 автор называет тензоры $\frac{\varphi_\alpha}{\sqrt{\Delta\varphi}}$, $\frac{\varphi_{\alpha\,|\,\beta}}{\sqrt{\Delta\varphi}}$ и $\omega_{\alpha\beta} = \bar{N}_\alpha \bar{N}_\beta$, где $\bar{N}_\alpha$ — частные производные единичной нормали $\bar{N}$ к поверхности. Выводится формула

$$\omega_{\alpha\beta} = K\left(\frac{\varphi_\alpha\varphi_\beta}{\Delta\varphi} - g_{\alpha\beta}\right) - 2H\frac{\varphi_{\alpha\,|\,\beta}}{\sqrt{\Delta\varphi}} - E^{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}\frac{\varphi_{\alpha_1\,|\,\beta_1}\varphi_{\alpha_2\,|\,\alpha}\varphi_\beta\varphi_{\beta_2}}{(\Delta\varphi)^2}.$$

Здесь $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор пространства E_3, H и K средняя и полная кривизны поверхности уровня и

$$E^{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} = \begin{vmatrix} g^{\alpha_1\beta_1} & g^{\alpha_1\beta_2} \\ g^{\alpha_2\beta_1} & g^{\alpha_2\beta_2} \end{vmatrix}.$$

Кроме этого, для гиперповерхности $\varphi(u^1, u^2, u^3, u^4) = C$ в E_4 выводится довольно громоздкая формула, связывающая симметрические функции главных кривизн и инварианты тензоров $g_{\alpha\beta}$, φ_α, $\varphi_{\alpha\,|\,\beta}$, $\omega_{\alpha\beta}$.

Применения формул не указаны. Л. Л. Вербицкий

8908. Омбилические индикатрисы единичных касательных векторов, главных нормалей и

бинормалей кривой в римановом пространстве (Нагаратхнамма (Umbilical indicatrices of the unit tangent vector and the principal normal and binormal vectors of a curve in Riemannian space. Nagarathnamma H. S.), Proc. Indian Acad. Sci., 1956, **A44**, № 5, 351—359 (англ.)

Пусть C — кривая в римановом пространстве V_{n+1}, принадлежащая $V_n \subset V_{n+1}$. Концы единичных касательных к ней векторов дают кривую $\bar{C}$, которая называется омбилической индикатрисой кривой C. Показывается, что $ds^2 = \frac{1}{\rho^2} d\bar{s}^2$, где $\frac{1}{\rho}$ — первая кривизна C, s и $\bar{s}$ — длины дуг c и $\bar{c}$ соответственно. Затем устанавливается, что единичный касательный вектор кривой $\bar{C}$ коллинеарен единичному вектору бинормали к C, а радиус кручения C равен геодезической кривизне $\bar{C}$ в соответствующей точке.

Аналогичные результаты получены для индикатрисы единичных векторов нормали и бинормалей кривой C.

Н. С. Синюков

8909. О внутренних римановых геометриях поверхностей проективного пространства. Тевзадзе Г. Н., Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1956, **22**, 103—128

В первой главе выводятся формулы, позволяющие определить положение ребра и оси Грина сети, заданной уравнением вида

$$g_{ij}\, du^i\, du^j = 0$$

на поверхности трехмерного проективного пространства, находящейся в произвольной нормализации в смысле Нордена (Норден А. П., Пространства аффинной связности. ГИТТЛ, 1950).

Положение указанных прямых определяется заданием ковариантных векторов

$$h_i = (t_m - \tau_m - T_m)\, a_i^m \cos 2\varphi + (1/2)\, a_i^m \partial_m \lg \operatorname{tg} \varphi - \\ - (1/2)\, \partial_i \lg \operatorname{tg} 2\varphi + \tau_i + T_i, \qquad (1)$$

$$\gamma_i = (t_{on} - \tau_m + T_m)\, a_i^m \cos 2\varphi - (1/2)\, a_i^m \partial_m \lg \operatorname{tg} \varphi - \\ - (1/2)\, \partial_i \lg \operatorname{tg} 2\varphi + t_i - T_i,$$

где a_{ij} — тензор сопряженной сети аполярной тензору g_{ij}, а индексы поднимаются с помощью бивектора ε_{ij} с существенной компонентой

$$\varepsilon_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{22}^2}$$

t_i и τ_i — чебышевские векторы первого и второго рода сети a_{ij}, T_i — чебышевский вектор первого рода асимптотической сети, а 2φ — угол между направлениями сети g_{ij} в метрике, определенной тензором асимптотической сети. Рассматриваются различные частные случаи и приложения формул (1).

Во второй главе ставится задача разыскания нормализаций, индуцирующих на поверхности пару сопряженных римановых связностей, равносильная задаче разыскания таких сетей, ребра и оси Грина которых образуют конгруэнции гармонические и соответственно сопряженные поверхности.

На основе формул (1) автор составляет систему дифференциальных уравнений, характеризующих искомые сети в любой системе координат и при любой нормализации. В асимптотических параметрах эта система принимает следующий вид:

$$\partial_2 (2\beta e^{-\rho} \cos 2\varphi + \partial_1 \rho) = \partial_1 (2\gamma e^{\rho} \cos 2\varphi - \partial_2 \rho) \\ \partial_1 (e^{-\rho} \partial_1 \lg \operatorname{tg} \varphi - \beta e^{-2\rho}) = \partial_2 (e^{\rho} \partial_2 \lg \operatorname{tg} \varphi - \gamma e^{2\rho}), \qquad (2)$$

где $a_{11} = e^{\rho}$; $a_{22} = -e^{-\rho}$, φ имеет прежний смысл, а β и γ коэффициенты в выражении проективного линейного элемента поверхности.

Анализ системы (2) показывает, что множество искомых сетей на любой поверхности зависит от четырех произвольных функций одного аргумента.

Указываются различные частичные решения проблемы.

А. П. Норден

8910. Алгебраическая теория касательных пространств высших порядков. Вагнер В. В., Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу, МГУ, 1956, вып. 10, 31—88

Рассматривается свободная нильпотентная коммутативная алгебра $W_{(v,\,n)}$ класса нильпотентности v и псевдоразмерности n над полем действительных чисел. Истинная размерность этой алгебры: $N = \binom{v+n}{n} - 1$. Алгебра $W_{(v,\,n)}$ изоморфна алгебре $Q_v(x^1, \ldots, x^n)$, являющейся множеством всех полиномов степени не выше v от n переменных с равными нулю свободными членами, причем все операции с полиномами определяются обычным образом, только при умножении двух таких полиномов следует в произведении отбрасывать все члены порядка выше v (если таковые получаются при обычном умножении). Каждый изоморфизм $\varkappa$ алгебры $W_{(v,\,n)}$ на алгебру $Q_v(x^1, \ldots, x^n)$ есть вместе с тем взаимно однозначное отображение $W_{(v,\,n)}$ на N-мерное арифметическое пространство и может рассматриваться как координатная система. Тем самым множество всех таких изоморфизмов определяет на $W_{(v,\,n)}$ координатную структуру, превращая алгебру $W_{(v,\,n)}$ в простое геометрическое пространство Клейна $K_{(v,\,n)}$. Фундаментальная группа $A_{(v,\,n)}$ пространства $K_{(v,\,n)}$ является собственным линейным представлением дифференциальной группы $\mathfrak{D}_{N_{vn}}$ порядка v. Далее изучаются алгебраические свойства алгебры $W_{(v,\,n)}$, в частности, регулярные подалгебры (сами являющиеся свободными нильпотентными коммутативными алгебрами класса нильпотентности $v+1$), идеалы и гомоморфизмы алгебры $W_{(v,\,n)}$ в алгебру $W_{(v,\,m)}$. Рассматривается множество $T_{(v,\,n,\,m)}$ всех гомоморфизмов алгебры $W_{(v,\,n)}$ в алгебру $Q_v(y^1, \ldots, y^m)$. Каждому изоморфизму алгебры $W_{(v,\,n)}$ в алгебру $Q_v(x^1, \ldots, x^n)$ соответствует некоторое взаимно однозначное отображение множества $T_{(v,\,n,\,m)}$ на арифметическое $n\left[\binom{v+m}{m} - 1\right]$-пространство, что дает возможность рассматривать множество $T_{(v,\,n,\,m)}$ как простое геометрическое пространство Клейна $K_{(v,\,n,\,m)}$. При $m = 1$ получается пространство $K_{(v,\,n,\,1)}$ размерности $v \cdot n$ с фундаментальной группой $\mathfrak{D}_{N_{vn}}$ порядка v.

Пусть S — коммутативная обобщенная группа (РЖМат, 1953, 1089) с аддитивной записью композиции. Если, кроме того, определено умножение элементов из S на действительные числа, удовлетворяющее аксиомам умножения элементов векторного пространства на числа, то S называется обобщенным векторным пространством (над полем действительных чисел). Обобщенное векторное пространство с заданной бинарной операцией умножения называется обобщенной алгеброй, которое и изучается в реферируемой работе. В особенности рассматриваются обобщенные алгебры функций в арифметическом и геометрическом n-пространстве X_n.

Полученные результаты применяются для чисто алгебраического определения ковариантных и контравариантных касательных пространств в точке X_n. Обычно

контравариантное касательное пространство порядка v в точке X_n определяется как пространство дифференциалов до порядка v включительно от координат точки пространства X_n; ковариантное касательное пространство как пространство частных производных скалярных функций от координат точки X_n; сни совпадают соответственно с пространствами $K_{(v,\,n,\,1)}$ и $K_{(v,\,n)}$.

А. Е. Либер

8911. Аффинная дифференциальная геометрия гиперповерхностей. Фернандес (Geometría diferencial afín de hipersuperficies. Fernández Germán), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, **17**, 29—38 (исп.)

Обобщения известных понятий и формул трехмерной аффинной дифференциальной геометрии (приведенных в курсе Бляшке) на случай гиперповерхности $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ в $(n+1)$-мерном пространстве. Используется метод подвижного репера и внешних дифференциальных форм.

Г. И. Дринфельд

8912. О групповом пространстве группы непрерывных преобразований с римановой метрикой. Хориэ (On the group-space of the continuous transformation group with a Riemannian metric. Horie Nobuo), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1956, A-Math., **30**, № 1, 23—42 (англ.)

Рассматривается групповое пространство группы G_r непрерывных преобразований. Известно, что по первой теореме Ли следует

$$\frac{da_3^\alpha}{da_2^\beta} = A_b^\alpha(a_3)\, A_\beta^b(a_2) \quad (b, \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r).$$

Автор вводит в групповом пространстве риманову метрику

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, da^\alpha\, da^\beta, \quad g_{\alpha\beta} = \sum_a A_\alpha^a A_\alpha^a, \qquad (1)$$

связанную с выбранной системой координат.

Устанавливается зависимость связности, выведенной из метрики (1), от связностей, которые рассматривались Л. П. Эйзенхартом (Непрерывные группы преобразований, М., Изд-во ин. лит., 1947).

Исследуются геодезические линии метрики (1), вычисляется тензор кривизны. Показывается, что метрика (1) тогда и только тогда евклидова, когда группа G_r — абелева. Приводятся примеры. Библ. 4 назв.

Н. С. Синюков

8913. Об одной геометрии трехмерного пространства с алгебраической метрикой. Тонооka (On a geometry of three-dimensional space with an algebraic metric. Tonooka Keinosuke), Tensor, 1956, **6**, № 1, 60—68 (англ.)

Пусть $F_n^{(p)}$ есть n-мерное финслерово пространство, метрика в котором определяется p-ичной n-арной дифференциальной формой: $ds^p = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\, dx^{\alpha_1} \ldots dx^{\alpha_p}$. Автор рассматривает случай $n = 3$, $p = 3$, т. е. пространство $F_3^{(3)}$, в предположении, что основной тензор $a_{\alpha\beta\gamma}$ имеет дискриминант, отличный от нуля. Строятся некоторые алгебраические комитанты основного тензора, используя которые автор определяет внутренним образцом аффинную (несимметричную) связность в $F_3^{(3)}$. Найдены необходимые и достаточные условия существования в $F_3^{(3)}$ метрической аффинной связности (теорема 1), а также необходимые и достаточные условия вырождения пространства $F_3^{(3)}$ в плоское пространство (теорема 2). Следует заметить, что в условиях теоремы 2 пропущено требование: тензор кручения внутренней связности должен быть равен нулю. В иной форме результат теоремы 2 имеется у Крамлета (Cramlet C. M., Ann. Math., 1930, **31**, 134—150).

Далее рассматриваются двухмерные подпространства пространства $F_3^{(3)}$, для которых определены как индуцированная, так и внутренняя связности. Указано соотношение между объектами индуцированной и внутренней аффинной связности двухмерного подпространства $F_3^{(3)}$.

Примечание референта. В формуле, определяющей объект внутренней аффинной связности двухмерного подпространства, пропущен множитель: $\frac{1}{3!\mathfrak{A}}$. Можно показать, что эта связность является связностью Вагнера (Вагнер В. В., Уч. зап. Саратовск. ун-та, 1938, I (XIV), вып. 1, 29—40), на работу которого автор не ссылается.

А. Е. Либер

8914. Заметка о непростых K^*-пространствах. Сен (Note on non-simple K^*-spaces. Sen R. N.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1956, **A22**, № 2, 82-85 (англ.)

Для римановых K-пространств, характеризующихся условиями (см., например, Ruse H. S., Proc. London Math. Soc., 1951, **53**, 212—229)

$$R_{hijk,\,l} = R_{hijk}\lambda_l$$

или

$$R_{hijk}\lambda_l + R_{hikl}\lambda_i + R_{hilj}\lambda_k = 0, \quad R_{hijk,\,l} = 0,$$

за счет подходящего конформного преобразования получена модификация этих условий, но при ковариантно постоянном λ_i.

Н. С. Синюков

8915. Об одной геометрической интерпретации проективной связности. Кастольди (Appunti per una interpretazione geometrica del formalismo delle connessioni proiettive. Castoldi Luigi), Rend. mat. e applic., 1953, **12**, № 3—4, 426—439 (итал.)

Пусть L_{ij}^k — аффинная связность с кручением a_{ij}^k вида

$$L_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + a_{ij}^k, \qquad (1)$$

где Γ_{ij}^k — связность риманова пространства с метрическим тензором a_{ij} $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$. Рассматривается преобразование связности (1), сохраняющее параллельное перенесение векторов вдоль любой кривой, не выводящее из этого класса, т. е. для новой связности $\tilde{L}_{ij}^k$

$$\tilde{L}_{ij}^k = L_{ij}^k + 2\psi_i \delta_j^k, \qquad (2)$$

где ψ_i — произвольный вектор. В то же время

$$\tilde{L}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \tilde{a}_{ij}^k,$$

где $\tilde{a}_{ij}^k$ — тензор кручения. Вводя векторы $a_i = a_{i\alpha}^\alpha$, $\tilde{a}_i = \tilde{a}_{i\alpha}^\alpha$, автор показывает, что при $f_i = \partial_i f - (1/2n)\, a_i$ из (2) получается связность $\overset{\circ}{L}{}_{ij}^k$, тензор кривизны, которой (инвариантный относительно преобразований (2), совпадает с тензором Томаса связности L_{ij}^k, т. е.

$$\overset{\circ}{L}{}_{ijh}^k = T_{ijh}^k \equiv L_{ijh}^k - (1/n)\, V_{ij}\delta_h^k,$$

где $V_{ij} = L_{ija}^\alpha$. Связность $\overset{\circ}{L}{}_{ij}^k$ названа основной связностью для данной связности L_{ij}^k.

Аналогичный результат при аналогичных условиях получен относительно проектных преобразований аффинной связности без кручения и тензора Вейля.

Получено также обобщение этих результатов на псевдосвязность.

Н. С. Синюков

8916 Д. Математическое исследование приближений в общей теории относительности и единой теории Йордана — Тири. Энкен (Étude mathématique des approximations en relativité générale et en théorie unitaire de Jordan — Thiry. Thèse Doct. Sci. math. Hennequin Francoise), Ann. Univ. Paris, 1956, 26, № 4, 594—596 (франц.)

Идея исследования решений уравнений поля в релятивистской теории тяготения по приближениям зародилась давно и в своем развитии пошла, в основном, по двум направлениям: о работах Эйнштейна и Инфельда, с одной стороны, и работах Фока с сотрудниками и Папапетру, — с другой. В статье, представляющей краткое изложение докторской диссертации автора, исследуется теория приближенных решений в теории тяготения и в варианте Йордана — Тири единой теории поля. Автор связывает свое исследование с результатами Дармуа и Лихнеровича, относящимися к решению задачи Коши в этих двух теориях.

В гл. I напоминаются основные положения релятивистской теории тяготения и, используя изотермические координаты, автор показывает физический смысл закона сохранения энергии — импульса.

В гл. II вводится предположение, что потенциалы $g_{\alpha\beta}$, определяемые метрикой $ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$, допускают разложение по степеням $1/c^2$ такое, что первые члены разложения определяют метрику Минковского и поле слабо отличается от ньютоновского. Исследуется уравнение $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ в предположении, что тензор материи имеет вид $pu^\alpha u^\beta$, где u^α — вектор касательной к траектории движения элементарной частицы, $u^0 = dt/ds$, $m = pu^0\sqrt{-g}$, $g = |g_{\alpha\beta}|$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$).

Гл. III посвящена вычислению двух первых аппроксимаций уравнения движения, отвечающих общему случаю, с приложением к случаю сферически-симметрического тела (задача, рассмотренная Папапетру) и задаче двух сферических тел.

Затем (гл. IV) ставится вопрос об аппроксимациях в единой теории Йордана — Тири, для чего рассматривается пятимерное риманово многообразие с аксиоматикой, определяющей этот вариант единой теории (гл. V): а) условия консервативности уравнений движения; б) заряженные частицы должны двигаться по геодезическим V_4 ($d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta < 0$). Это приводит к уравнениям типа Максвелла. При этом систематически используются изотермические координаты. В гл. VI при этих предположениях проводятся вычисления аппроксимаций аналогично тому, как это делалось в гл. III, ограничиваясь первыми членами разложений. При таком рассмотрении чисто гравитационное поле включается как частный случай и представляется семейством изотермических многообразий V_4 в V_5. А. З. Петров

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

8917. Определение инвариантного элемента длины и антисимметричного тензора, который является обобщением единичного вектора касательной к кривой, когда эта последняя находится в движении. Дюран (Définition d'un élément de longueur invariant et d'un tenseur antisymétrique qui généralise le vecteur unitaire de la tangente à une courbe, quand cette dernière est en mouvement. Durand Émile), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 6, 570—572 (франц.)

Продолжение предыдущих работ автора (РЖФиз. 1957, 8380, 8381). Обобщая определение элемента длины кривой с помощью вектора $d\mathbf{l} = \boldsymbol{\lambda}\,dl$, которым пользуются в системе покоя рассматриваемой кривой, автор вводит четырехмерный тензор второго ранга $dl^{pq} = \lambda^{pq}\,dl$ ($p, q = 1, 2, 3, 4$). Введенный автором антисимметричный 4-тензор второго ранга λ^{pq} является обобщением единичного вектора касательной $\boldsymbol{\lambda}$. Показано, что при таком определении элемента кривой в системе покоя мы возвращаемся к обычному определению в виде $d\mathbf{l} = \boldsymbol{\lambda}\,dl$. А. Я. Темкин

8918. Кривые в симплектическом пространстве Яглом И. М., Тр. Семинара по вектор. и тензор. анализу, МГУ, 1956, вып. 10, 119—137

Пусть дано аффинно-симплектическое пространство AS_{2n} и кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ в нем. Соприкасающимся обобщенным линейным элементом кривой называется последовательность $\{L_1, \ldots, L_{2n}\}$ линейных подпространств, натянутых на производные вектора $\mathbf{r}$ по t. Точнее $L_k = \{\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ldots, \overset{(k)}{\mathbf{r}}\}$. Предполагается, что $L_{2n} = AS_{2n}$. Пусть r_k есть ранг L_k. Определим

$$\delta_k = \begin{cases} 0, \text{ если } r_k = r_{k-1} \text{ или } k = 1 \\ 1, \text{ если } r_k = r_{k-1} + 2 \end{cases}$$

(других возможностей не представляется). $\{\delta_1, \ldots, \delta_{2n}\}$ назовем характеристикой обобщенного линейного элемента в точке кривой или, коротко, самой точки. Точки кривой можно классифицировать по их характеристикам. Только вполне определенные характеристики таковы, что могут принадлежать каждой точке некоторой кривой.

В работе подробно исследованы два крайних частных случая: когда соприкасающийся обобщенный линейный элемент зависит от максимально возможного и минимально возможного числа параметров (характеристики соответственно, $\{0, 1, 0 \ldots 0, 1\}$ и $\{0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1\}$). Для этих случаев определен натуральный параметр на кривой, введен сопровождающий (канонический) репер, написаны формулы Френе для него, определены кривизны и кручения кривой. Доказано, что задание подходящих кривизн и кручений определяет кривую с точностью до симплектического преобразования. Такие же результаты сформулированы и для общего случая. Д. В. Беклемишев

8919. Касательные плоскости к дифференцируемому многообразию. Ньюнс, Уокер (Tangent planes to a differentiable manifold. Newns W. F. Walker A. G.), J. London Math. Soc., 1956, 31, № 4, 400—407 (англ.)

Шевалле (Chevalley C., Theory of Lie Groups I, 1946) Теория групп Ли I, М., Из-во ин. лит., 1948) определяет аналитическое многообразие в терминах допустимых функций и строит тангенциальные векторы и касательную плоскость с помощью независимых линейных функционалов. В точке p многообразия U класса C^r (r — целое не отрицательное, или $r = \infty$ или $r = \omega$ — аналитическое многообразие) существует класс $A(p)$ допустимых функций, определенных в окрестности p так, что $A(p)$ содержит всякую C^r-функцию любых членов $f^1, \ldots, f^m$ из $A(p)$. Если U n-мерно, то существуют в $A(p)$ члены $x^1 \ldots x^n$ — координаты, отображающие окрестность точки p гомеоморфно на евклидов куб, и для всякой точки $q \in V$ каждый член $f \in A(q)$ есть C^r-функция

$$f = F(x', \ldots, x^n), \quad \partial f/\partial x^i = F_i(x', \ldots, x^n).$$

Если в точке p обозначить $A(p) = A$, $f = f_0$, $\partial f/\partial x^i = f_{(i)}$ и $f_{(i)} = 0$ ($i = 1, \ldots, n$), то f стационарно в p. Подкласс стационарных в p функций обозначается A_s. Соотношение $f - g \in A_s$ для $f, g \in A$ определяет на A эквивалентность; фактор-множество A/A_s есть векторное пространство V_T ко-тангенциальное в p; оно n-мерно

Дуальное пространство V^T — касательная плоскость в p; его элементы — касательные векторы. Касательный вектор λ — линейный функционал на V_T, именно: $L = \lambda \circ \Phi$ — линейный функционал на A, исчезающий на A_8. Для координат (x^i) имеем $L(f) = L(f_{(i)}x^i) = f_{(i)}L(x^i)$. Вообще, если $f', \ldots, f^m \in A$ и $f = F(f', \ldots, f^m)$ — C^r-функция, то

$$f - F_\rho(f'_0, \ldots, f^m_0) f^\rho \in A_8$$

и следовательно

$$L(f) = F_\rho(f'_0, \ldots, f^m_0) L(f^\rho) \qquad (1)$$

в частности

$$L(fg) = f_0 L(g) + g_0 L(f). \qquad (2)$$

Шевалле принял для определения тангенциальных векторов условие (2) и в аналитическом случае из него следует (1); оно следует и для класса C^∞ (РЖМат, 1955, 4688), но не для C^r $(0 < r < \infty)$. При условии (1) линейный функционал L определяет D-вектор; их совокупность V^D — векторное пространство: D-плоскость в p. Касательная плоскость V^T — подпространство D-плоскости V^D. С. П. Фиников

8920. Относительно пары связностей, обладающих геодезическими параллелограммами. Ястребов (Про пари зв'язностей, що мають геодезичні паралелограми. Ястребов Ю. М.), Наук. зап. Чернівецьк. ун-т, 1956, 19, 109—123 (укр.; рез. русск.)

Если в многообразии $(x', \ldots, x^n)$ заданы две связности $\overset{1}{\Gamma}{}^\alpha_{\mu\nu}$ и $\overset{2}{\Gamma}{}^\alpha_{\mu\nu}$ без кривизны и для двух геодезических $b = MB$ и $l = ML$ соответственно первой и второй связности геодезическая a первой связности, проходящая через точку L параллельно b, и геодезическая m второй связности, проходящая через точку B параллельно l, пересекаются, то существуют ковариантные векторы $\overset{1}{\omega}_\mu = \overset{1}{\omega}_\mu(x', \ldots, x^n)$ и $\overset{2}{\omega}_\mu = \overset{2}{\omega}_\mu(x', \ldots, x^n)$, удовлетворяющие соотношению

$$\overset{1}{\Gamma}{}^\alpha_{\mu\nu} + \delta^\alpha_\mu \overset{1}{\omega}_\nu = \overset{2}{\Gamma}{}^\alpha_{\nu\mu} + \delta^\alpha_\nu \overset{2}{\omega}_\mu \quad (\alpha, \mu, \nu = 1, \ldots, n).$$

Из резюме автора

8921. Одна теорема о группах голономии. Номидзу (Un théorème sur les groupes d'holonomie. Nomizu Katsumi), Nagoya Math. J., 1956, 10, June, 101—103 (франц.)

Доказывается теорема: Если $P(B, G)$ — главное расслоенное пространство с базой B размерности $\geqslant 2$ и структурной группой Ли G, и структурная группа G может быть сведена к связной подгруппе Ли H, то существует на P инфинитезимальная связность, в которой ограниченная группа голономии будет точно группа H.

При этом под словами „структурная группа G сводится к подгруппе H" понимается, что существует главное расслоенное пространство $Q(B, H)$ с базой B и структурной группой H, снабженное дифференцируемым изоморфизмом пространства Q на пространство P.

Из теоремы следует, что всякая связная группа Ли G может быть реализована как ограниченная группа голономии в некоторой инфинитезимальной связности главного расслоенного пространства на базе некоторого многообразия. С. П. Фиников

8922. Псевдоаналитические векторы на псевдокелеровых многообразиях. Сасаки, Яно (Pseudo-analytic vectors on pseudo-Kählerian manifolds. Sasaki Shigeo, Yano Kentaro), Pacif. J. Math., 1955, 5, Suppl. № 2, 987—993 (англ.)

Псевдокелерова структура на римановом многообразии M_{2n} класса C^r определяется заданием поля невырожденного тензора I_{ij} класса C^{r-1} такого, что

$$I_{ij} = -I_{ji},\ I_{jk,\,i} = 0,\ I^i_{\cdot k} I^k_{\cdot j} = -\delta^i_j \quad (i, j = 1, \ldots, 2n).$$

Здесь индексы поднимаются при помощи метрического тензора многообразия M_{2n}, запятая означает ковариантное дифференцирование в римановой связности. Если M_{2n} — вещественно аналитическое многообразие, то псевдокелерова структура на нем является келеровой.

Пара функций (φ, ψ) называется псевдоаналитической, если $I^k_{\cdot j}\varphi_{\cdot k} = \psi_{\cdot j}$. Ко- и контравариантные векторные поля u^i и v_i псевдоаналитичны, если

$$I^i_{\cdot j} u^j_{\cdot,\,k} = u^i_{\cdot,\,j} I^j_{\cdot k},\quad I^i_{\cdot j} v_{i,\,k} = I^j_{\cdot k} v_{j,\,i}.$$

Эти соотношения эквивалентны уравнениям Коши — Римана, если многообразие келерово.

Авторы доказывают для псевдоаналитических полей на компактных псевдокелеровых многообразиях факты, обобщающие известные теоремы об аналитических полях на келеровых многообразиях (РЖМат, 1957, 2658). Д. В. Беклемишев

8923. Почти эрмитова структура S^6. Фуками, Исихара (Almost Hermitian structure on S^6. Fukami Tetsuzo, Ishihara Shigeru.), Tohoku Math. J., 1955, 7, № 3, 151—156 (англ.)

В алгебре C чисел Кэли рассматривают S^6 как многообразие единичных чисто мнимых векторов. На сфере естественным образом определяются метрический тензор g_{ij} и тензор φ^i_j, задающий почти комплексную структуру. Рассматриваются свойства полученной почти эрмитовой структуры по отношению к группе G всех автоморфизмов алгебры C. Тензоры g_{ij} и φ_{ij} оказываются инвариантными по отношению к G. Обратно, группа всех изометрических преобразований S^6, оставляющих инвариантным φ^i_j, изоморфна G. Авторы находят выражение через g_{ij} и φ^i_j инвариантной аффинной связности, в которой g_{ij} и φ_{ij} ковариантно постоянны. Такая связность оказывается единственной; тензоры ее кручения и кривизны ковариантно постоянны в ней, причем тензор кручения нигде не обращается в нуль. Д. В. Беклемишев

8924. Симметрические гармонические пространства. Леджер (Symmetric harmonic spaces. Ledger A. J.), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 1, 53—56 (англ.)

Риманово пространство V_n называется гармоническим относительно данной точки O (центрально-гармоническим), если в нем существует решение уравнения Лапласа

$$\Delta V = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(g^{ki} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V}{\partial x^i}\right) = 0, \quad g = \det |g_{ij}|,$$

зависящее только от геодезического расстояния s от точки O до произвольной точки P из некоторой окрестности точки O, т. е. постоянное на геодезических сферах с центром в O, лежащих в этой окрестности. V_n называется вполне гармоническим, если оно гармонично относительно каждой своей точки.

Автор определяет симметрические пространства Э. Картана, которые являются вполне гармоническими. При этом предполагается, что метрика положительно определенная и рассматриваемое пространство неприводимо. (Известно, что приводимое симметрическое пространство является вполне гармоническим только в евклидовом случае). Ранг симметрического пространства определяется как максимальное число линейно независимых операторов фундаментальной группы простран-

ства, коммутирующих с общим сператором группы. Доказывается, что вполне гармоническое симметрическое неприводимое пространство имеет ранг, равный единице. Далее выводится, что компактные пространства этого класса являются двуточечно однородными, т. е. их фундаментальная группа переводит каждую пару точек в любую другую пару точек с тем же геодезическим расстоянием между ними. Г. И. Кручкович

8925. О псевдогармонических и псевдокиллинговых векторах в метрическом многообразии с кручением. Голдберг (On pseudo-harmonic and pseudo-Killing vectors in metric manifolds with torsion. Goldberg S. I.), Ann. Math., 1956, **64**, № 2, 364—373 (англ.)

Рассматривается компактное ориентируемое многообразие V_n, снабженное полсжительно определенной метрикой и метрической связностью E^i_{jk} с кручением $S^{\cdot\cdot k}_{ij}$, причем предполагается, что $S^{\cdot\cdot k}_{ik} = 0$.

Получены условия, при которых многообразие не допускает псевдогармонических тензорных полей или не допускает псевдокиллинговых тензорных полей. Получены также условия, при которых V_n допускает только ковариантно постоянные псевдогармонические векторные поля.

Подробнее изучено псевдоэйнштейново многообразие, определяемое равенством $E_{ij} + E_{ji} = \lambda g_{ij}$, где E_{ij} — тензор Риччи связности E^k_{ij}. Если для такого многообразия $E = E_{ij}g^{ij} \geqslant 0$, то кривизна Риччи его римановой связности неотрицательна. Отсюда делаются заключения о гармонических и киллинговых векторах на псевдоэйнштейновом многообразии. Д. В. Беклемишев

8926. Интегрируемые динамические системы, допускающие инфинитезимальные преобразования в инволюции. Дебеве, Каэн (Systèmes dynamiques intégrables qui admettent des transformations infinitésimales en involution. Debever R., Cahen M.), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci., fis. mat. natur., 1956, **21**, № 3—4, 185—188 (франц.)

Рассматривается динамическая система — многообразие V_{2n+1}, на котором определена внешняя форма Ω степени 2 и ранга $2n$. Система допускает r инфинитезимальных преобразований, порождаемых векторами ξ_α ($\alpha = 1, \ldots, r$), касательными к V_{2n+1}:

$$\theta(\xi_\alpha)\Omega = i(\xi_\alpha)\, d\Omega + di(\xi_\alpha)\Omega = 0,$$

где $i(\xi_\alpha)$ — сператор внутреннего умножения (Де Донде, А. Картан). Система интегрируема, $d\Omega = 0$, а потому,

$$d \cdot i(\xi_\alpha)\Omega = 0,$$

следовательно, формы Пфаффа $\pi_\alpha = i(\xi_\alpha)\Omega$ замкнуты; это первые интегралы характеристической системы Σ формы Ω. r преобразований ξ_α линейно независимы и в инволюции; то же для форм π_α.

Выводится

$$0 = \pi_\alpha \wedge \pi_\beta \wedge \Omega^{n-1}$$

значит ранг Ω понижается по модулю π_α на $2r$ единиц и можно написать:

$$\Omega = \pi_\alpha \wedge \omega^\alpha + \Omega^*,$$

где Ω^* ранга $2n - 2r$ не зависит от π_α, замкнута по модулю π_α, она не зависит также от ω^α:

$$\frac{\partial \Omega^*}{\partial \omega^\alpha} = 0.$$

Если φ_i — $(2n - 2r)$ независимых форм, из которых составлена Ω^*, то π_α, ω^α образуют по модулю φ_1 вполне интегрируемую систему. Взяв такую систему координат, что

$$\xi_\alpha : 0, \ldots, 1_\alpha, \ldots, 0,$$

можно ω^α, взятые по модулю φ_i, представить в виде

$$\omega^\alpha = dq^\alpha.$$

Назовем p_α интегральные многообразия системы $\pi_\alpha = 0$. Соотношения

$$p_\alpha = C_\alpha, \quad q^\alpha = C'^\alpha$$

определяют некоторое подмногообразие $V_{2n-2r+1}$. Форма $[\Omega^*]$, определенная на V_{2n+1}, имеет следующие свойства:

1) ранг $2n - 2r$; 2) $d[\Omega^*] = 0$; 3) $\dfrac{\partial [\Omega^*]}{\partial\, dq^\alpha} = 0$,

откуда и $\dfrac{\partial [\Omega^*]}{\partial q^\alpha} = 0$.

Таким образом, многообразие $V_{2n-2r+1}$ с формой $[\Omega^*]$ является новой интегрируемой динамической системой.

Авторы отмечают, что полученный результат может найти применение в геометрии Финслера.

Приложения к механике:

1. Для формы

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt,$$

допускающей при $\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} = 0$ ($\alpha = 1, \ldots, r$) r инфинитезимальных преобразований в инволюции, вычисляется форма $[\Omega^*]$.

2. Иллюстрируется значение этих формальных выкладок для топологической классификации траекторий динамической системы в задаче Кеплера.

К. Н. Тихоцкий

8927 К. Кривизна и числа Бетти. Яно К., Бохнер С. М., Изд-во ин. лит., 1957. 152 стр., 7 р. 25 к.

Перевод с английского (РЖМат, 1957, 2658).

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

8928. О понятии непрерывной кривой без параллельных паратинжант. Хаупт (Sur la notion de courbe continue dépourvue de paratingentes parallèles. Haupt Otto), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 3, 297—299 (франц.)

Прямая P называется (по Булигану) паратинжантом плоского множества M в точке p, если в M имеются такие последовательности точек $p_n \to p$, $p'_n \to p$, что последовательность прямых $p_n p'_n$ сходится к P. Ранее автором было показано (Sitzungsber Bayer Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1955, 26), что плоский континуум без параллельных паратинжантов либо есть выпуклая дуга, либо состоит из конечного или счетного множества отрезков с общим концом. В реферируемой заметке рассматривается понятие параметрической плоской кривой без параллельных паратинжантов, в частности, обсуждается вопрос о том, следует ли считать параллельными два паратинжанта, которые совпадают, как прямые, но отвечают различным значениям параметра. Законченных определений или результатов заметка не содержит, В. А. Рохлин

8929. Общая теорема относительно основных понятий евклидовой геометрии. Тарский (A general theorem concerning primitive notions of Euclidean geometry. Tarski Alfred), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. 1956, **A59**, № 4, 468—474; Indagationes math., 1956, **18**, № 4, 468—474 (англ.)

Пусть R — тернарное соотношение, связывающее точки евклидовой плоскости π и могущее служить единственным основным понятием при ее построении. Рассматривая π как комплексную плоскость, обозначим через C множество комплексных чисел c, удовлетворяю-

щих соотношению $R(a, b, c)$ для каких-либо $a, b \in \pi$. Тогда подполе, порожденное множеством $a \cup b \cup C$, совпадает с π. Л. А. Скорняков

8930. Теоретико-групповая система аксиом обобщенной евклидовой геометрии. Шютте (Gruppentheoretisches Axiomensystem einer verallgemeinerten euklidischen Geometrie. Schütte Kurt), Math. Ann., 1956, **132**, № 1, 43—62 (нем.)

Рассматривается группа G, порожденная множеством $H=(a, b, c, \ldots)$, состоящим из инволюторных элементов, называемых прямыми (РЖМат, 1955, 5296). Инволюторные произведения двух прямых образуют множество элементов $Z=\{P, Q, R, \ldots\}$, называемых точками. Будем писать $a \perp b$ и $P \mid a$, если соответственно инволюторны элементы a, b, или P, a. Требуется выполнение следующих аксиом: I, 1. Если $P, Q \mid a, b$, то $P=Q$ или $a=b$; I, 2. Для любых P и Q существует такая a, что $P, Q \mid a$; I, 3. Для любых P и a существует такая b, что $P \mid b$ и $a \perp b$; I,4 $aba \in H$. I,5. Существуют три неколлинеарные точки; II, 1. Произведение трех точек является точкой; II, 2. Для любых двух прямых a и b существуют или точка $P \mid a, b$ или прямая $c \perp a, b$; III, 1. Если $abc, abd \in H$ — и $ab \neq ba$, то $bcd \in H$; III, 2. Если $a, b, c, d \mid P$, то существует такая прямая u, что $abu, cdu \in H$; IV, 1. Существуют такие три прямые a, b и c, что $a, b, c \mid P$, но $abc \notin H$; IV, 2^*. Существуют такие прямые a и b, что $ab \neq ba$, а множество прямых x, для которых $abx \in H$, состоит в точности из четырех элементов. Если H — множество зеркальных отображений действительной плоскости, то IV, 1 и IV, 2^* не имеют места. Аксиомы же I—III, очевидно, выполняются.

Точки и прямые группы G, удовлетворяющей перечисленным аксиомам, с инцидентностью образуют аффинную плоскость.

Если группа G удовлетворяет аксиомам I—III, то множество элементов вида ab и abc, где $a, b, c \mid P$ для фиксированной точки P, образуют группу G_P. Группы G_P и G_Q изоморфны. Элементы 1 и P образуют нормальный делитель N группы G_P. Группа $K(G)=G_P/N$ называется кинематическим пространством группы G. Если G удовлетворяет аксиомам I—III, IV, 1 и отрицанию аксиомы IV, 2^*, то с $K(G)$ действительно связывается определенное трехмерное проективное пространство. Сама же группа $K(G)$ оказывается изоморфной группе Q^*/Φ^*, где Q — тело кватернионов над полем Φ характеристики $\neq 2$, а Q^* и Φ^* — соответствующие мультипликативные группы. Л. А. Скорняков

8931. Алгебраико-геометрические замечания к теории представлений классических групп. Бурау (Algebraisch-geometrische Bemerkungen zur Darstellungstheorie der klassischen Gruppen. Burau Werner), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1956, **59**, № 1, 1. Abt., 1—6 (нем.)

Рассматриваются неприводимые линейные представления классических групп G (над полем комплексных чисел) и отвечающие им группы преобразований проективного пространства P_N. Каждому представлению ставится в соответствие алгебраическое (рациональное) многообразие в P_N, транзитивно преобразуемое операторами представления. Для представлений полной линейной группы эти многообразия, введенные автором в предыдущей работе (РЖМат, 1956, 2411), связаны с сериями убывающих подпространств пространства P_n, в котором действует группа:

$$P_{n_1} \supset P_{n_2} \supset \ldots \supset P_{n_s}. \qquad (1)$$

Для представлений симплектической и ортогональной групп (в последнем случае целочисленных) берутся серии подпространств (1), подчиненные дополнительным условиям: а) Каждое P_{n_i} принадлежит поляритету или нуль-корреляции, связанным с рассматриваемой группой (т. е. P_{n_i} содержится в пространстве P'_{n-1-n_k}, которое ему при этой корреляции соответствует);

б) $\left[\frac{n-1}{2}\right] \geqslant n_1 > n_2 > \ldots > 0.$

Для полуцелых представлений ортогональных групп также указаны соответствующие многообразия.

Отмечается, что с этой точки зрения можно получить описание всех неприводимых представлений классических групп. Доказательств не приводится.

И. З. Розенкноп

8932. О некоторых полугруппах преобразований. Лёвнер (On some transformation semigroups. Loewner Charles), J. Rational Mech. and Analysis, 1956, **5**, № 5, 791—804 (англ.)

Пусть p — точка и l — гиперплоскость, проходящая через точку p в n-мерном проективном пространстве. Автор называет (p, l)-переносом проективное преобразование, двойные точки которого являются точками l и двойные гиперплоскости которого — гиперплоскости, проходящие через p. Если D — выпуклая область проективного пространства, то каждая точка p границы D содержится в некоторой гиперплоскости l, не пересекающей область D и называемой опорной гиперплоскостью. С точкой p границы и опорной гиперплоскостью l, проходящей через p, автор связывает непрерывное семейство (p, l)-переносов, преобразующих область D саму в себя. Множество (p, l)-переносов выпуклой области D порождает посредством композиций и перехода к пределу, полугруппу P_D.

Аналогичным образом с каждой областью D конформного пространства, ограниченной жордановой гиперповерхностью класса C^1 и отличающейся тем, что каждая окружность, ортогональная к границе D, имеет с D общую связную дугу, автор связывает полугруппу M_D преобразований Мёбиуса.

Преобразования полугрупп P_D или M_D являются сжатиями, так как они уменьшают объемы области D, Автор дает мажоранты якобианов этих преобразований. Что касается структуры полугруппы P_D, то она транзитивная полугруппа в D. Если D — круг на плоскости, то M_D транзитивна в D, но не транзитивна на множестве векторов области D. C. Teleman

8933. Конфигурационные теоремы при ортогональных отображениях евклидовой плоскости. Шютте (Schließungssätze für orthogonale Abbildungen euklidischer Ebenen. Schütte Kurt), Math. Ann., 1956, **132**, № 2, 106—120 (нем.)

Аффинная плоскость называется евклидовой, если в ней введено соотношение ортогональности ($\perp$), подчиненное следующим требованиям: 01. $g \perp h$ влечет $h \perp g$; 02. Для каждых точки P и прямой g существует одна и только одна прямая h такая, что $h \in P$, $h \perp g$. Кроме аксиомы трапеций (реф. 8930), рассматриваются такие аксиомы: I. Если треугольник ABC имеет ортоцентр, то каждый треугольник ABD, где $DC \perp AB$, обладает ортоцентром; II. Если четыре высоты пятиугольника (высота пятиугольника — перпендикуляр, опущенный из вершины на противоположную сторону) $A_1 \ldots A_5$ проходят через одну точку O и треугольник OA_1A_3 обладает ортоцентром, то и пятая высота проходит через O.

Если в евклидовой плоскости π диагональные точки полного четырехвершинника всегда не коллинеарны и имеет место аксиома трапеций, то π оказывается альтернативной плоскостью над альтернативным телом K характеристики $\neq 2$. При этом $[y=xa] \perp [x=(k\bar{a})\,y]$, где $k \neq 0$, а $a \to \bar{a}$ — взаимнооднозначное отображение,

для которого $\overline{1}=1$, $\overline{a+b}=\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a^{-1}}=a^{-1}$, $\overline{ka}=ak$. Если дополнительно потребовать выполнения в π аксиом I и II, то $a\to\overline{a}$ оказывается инволюцией тела K, причем $\overline{k}=k$ и все самосопряженные элементы принадлежат центру тела K. Для получения сформулированных результатов изучаются корреляции φ соответствующей проективной плоскости такие, что а) $\varphi(L)=O_1\notin L$ (L — несобственная прямая плоскости π), б) если $P\neq O_1$, то $\varphi(P)\perp O_1P$, в) если $g\neq l$, $\varphi(O_2)=l$, то $g\perp O_2\varphi(g)$.

Л. А. Скорняков

8934. О разложениях евклидовых пространств. Мыцельский. (On the decompositions of Euclidean spaces. Mycielski Jan), Bull. Acad. polon. Sci., 1956, Cl. 3, **4**, № 7, 417—418 (англ.); Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, **4**, № 7, 409—410

Информационная заметка о некоторых новых результатах автора относительно разложений евклидовых пространств E^n на конгруэнтные множества. Сформулированы три теоремы. 1. Существует свободная группа ранга $2^{\aleph_0}$ движений евклидового пространства, которые, за исключением тождественного, не имеют неподвижных точек.

2. Если M и N абстрактные множества мощности $\leqslant 2^{\aleph_0}$, то всякая система соотношений вида

$$\sum_{\nu\in P_\mu} A_\nu \simeq \sum_{\nu\in Q_\mu} A_\nu;\quad \mu\in M,$$

где $\{P_\mu\}_{\mu\in M}$ и $\{Q_\mu\}_{\mu\in M}$ — семейства непустых и неравных N подмножеств множества N, реализуема как система сохраняющих ориентацию конгруэнтностей между множествами, причем A_ν — непересекающиеся множества, представляющие разложение пространства E^3. Отсюда сразу получается (при помощи операции надстройки цилиндров), что этим свойством обладают также пространства E^n для $n>3$.

3. Свойством, аналогичным предыдущему, обладает также плоскость ($n=2$) с тем, что в этом случае фигурирующее в нем состояние следует рассматривать как конгруэнтность, после предварительного разложения каждого из множеств на две соответственные части.

H. Fast

8935. О соединении линейных элементов и элементов кривизны дугами монотонной кривизны. Островский (Über die Verbindbarkeit von Linien- und Krümmungselementen durch monoton gekrümmte Kurvenbogen. Ostrowski Alexander), Enseign. math., 1956, **2**, № 4, 277—292 (нем.)

Ориентированная дуга плоской кривой называется Г-дугой, если вдоль нее радиус кривизны непрерывен, положителен, монотонно убывает, кроме, быть может, конечного числа интервалов постоянства, и в конечной точке дуги меньше чем в начальной, причем полная кривизна дуги меньше 2π.

Доказываются две теоремы.

Теорема 1. Если α и β — два ориентированных линейных элемента, заданных соответственно в точках A и B, причем элемент α ориентирован вправо от направления вектора AB, а β — влево, то для возможности соединения A и B Г-дугой, касающейся α в точке A и β в точке B и направленной от A к B, необходимо и достаточно, чтобы угол между α и вектором AB был меньше угла между вектором AB и β.

Эта теорема дополняет теорему Фогта (Vogt W., J. reine and angew. Math., 1914, **144**, 239—248), в которой доказана только необходимость условия. Доказательство необходимости автор проводит тремя различными способами, более общими, чем способ Фогта, так как они не требуют дифференцируемости кривизны. Достаточность получается как следствие второй теоремы, являющейся дальнейшим дополнением теоремы Фогта.

Теорема 2. Пусть выполняются предположения теоремы 1 и угол между α и вектором AB меньше угла между AB и β. Если при этом a — точка на обращенной к точке B части перпендикуляра, восстановленного к α в точке A и B — точка на обращенной к A части перпендикуляра, восстановленного к β в точке B, то для соединения A и B Г-дугой, направленной от A к B и имеющей a и b центрами кривизны соответственно в точках A и B, необходимо и достаточно неравенство

$$|ab|+|bB|<|aA|.$$

Теорема доказывается при помощи установленной автором леммы.

Г. В. Корицкий

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

8936. О хорде выпуклой кривой. Сантало (Sobre las cuerdas de una curva convexa. Santaló L. A.), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, **17**, 217—222 (исп.)

Пусть замкнутая выпуклая кривая K имеет единственную общую точку с каждой опорной прямой. Доказывается, что расстояния c между точками прикосновения K к опорным прямым, образующим со стороны K угол θ, и среднее значение $\overline{c}$ этих расстояний удовлетворяют неравенствам

$$c\geqslant 2r_0\cos(\theta/2),\qquad 2\sqrt{2}\,\pi\overline{c}\geqslant L(1+\sin\theta+\cos\theta),$$

где L — длина кривой, а r_0 — ее наименьший радиус кривизны. Первое неравенство (см. также РЖМат, 1955, 422) установлено в предположении существования и непрерывности радиуса кривизны вдоль K. Из второго неравенства следуют оценки $\overline{c}$ через площадь и ширину ограниченной K области. (Другие оценки $\overline{c}$ см. Green I. W., Portug. math. 1951, **10**, 121—123; 1952, **11**, 51—55).

Для замкнутой выпуклой поверхности K, имеющей единственную общую точку с каждой опорной плоскостью, проектированием ее на плоскости всевозможных направлений устанавливается оценка

$$4\pi\sqrt{2}\,\overline{c}\geqslant M(1+\sin\theta+\cos\theta),$$

где $\overline{c}$ — среднее значение расстояний между точками прикосновения K к двум опорным плоскостям, образующим угол θ, а M — интегральная средняя кривизна поверхности K. Из последнего неравенства следует оценка $\overline{c}$ через площадь поверхности K.

В. А. Залгаллер

8937. Соседние вершины выпуклого многогранника. Гейл (Neighboring vertices on a convex polyhedron. Gale David), Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 255—263 (англ.)

Выпуклый многогранник P есть выпуклая оболочка конечного множества вершин $a_1,\ldots,a_n$ в евклидовом пространстве. Если a_i и a_j — различные вершины, то сегмент a_ia_j называется ребром, если он является пересечением многогранника P с опорной гиперплоскостью. В этом случае вершины a_i, a_j — соседние. Для каждого положительного целого n существует многогранник P в $2m$-мерном пространстве с n вершинами, каждые m из которых — соседние.

Множество $2j+k$ точек на поверхности единичной k-сферы S_k в $(k+1)$-мерном пространстве равномерно распределено, если каждая открытая полусфера на S_k содержит по крайней мере j точек. Для каждой пары положительных целых чисел k и j существует множество $2j+k$ равномерно распределенных точек на S_k.

С. П. Фиников

8938. Замечание к теореме Коши о жесткости выпуклых многогранников. Эглов (Eine Bemerkung zu Cauchy's Satz über die Starrheit konvexer Vielflache. Egloff Werner), Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1956, **20**, № 3—4, 253—256 (нем.)

Автор доказывает известную теорему. Если у двух выпуклых n-угольников $n-1$ сторон равны и внутренние углы первого при этих сторонах не превосходят соответствующих углов второго, то n-я сторона второго многоугольника не меньше n-й стороны первого многоугольника. Для доказательства автор проводит через точку P_0 первого многоугольника, наиболее удаленную от n-й стороны $A_\mu B_\nu$, параллельную ей прямую t. Точка P_0 разбивает многоугольник на части от P_0 до A_μ и от P_0 до B_ν. Второй многоугольник можно получить из первого деформацией указанных частей, сводящейся к вращениям вокруг вершин с увеличением углов между сторонами. При такой деформации длины проекций $P_0 \dots A_\mu$ и $P_0 \dots B_\nu$ увеличиваются (проекции берутся с учетом знака). Сумма длин указанных двух проекций и даст n-ю сторону соответственно первого многоугольника (до деформации) и второго (после деформации). Э. Г. Позняк

8939. Интегральная геометрия: обобщение формул Крафтона, Лебега и Сантало. Мазотти-Биджоджеро (Sulla geometria integrale: generalizzazione di formule di Crofton, Lebesgue e Santaló. Masotti Biggiogero Giuseppina), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fis. argent., 1955, **17**, 125—134 (итал.)

Пусть ω — угол между касательными PA и PA_1 к овалу; R и R_1 — радиусы кривизны овала в точках касания A, A_1; T, T_1 — длины касательных PA, PA_1 и L — длина овала.

Если интегралы

$$h = \int_0^\pi \frac{f(\omega)}{\sin\omega}\, d\omega, \quad k = \int_0^\pi \frac{\varphi(\omega)}{1-\cos\omega}\, d\omega$$

конечны, то справедливы формулы

$$\int \frac{f(\omega)}{TT_1}\, dP = 2h\pi, \quad \int \frac{f(\omega)}{TT_1}\,(R+R_1)\, dP = 2hL,$$

$$\int \varphi(\omega)\,(T^{-1}+T_1^{-1})\, dP = 2kL,$$

где dP — плотность точки и интегралы распространены на область, внешнюю относительно овала. Формулы Крофтона, Лебега и Сантало следуют из приведенных при $f(\omega)=\sin\omega$, $f(\omega)=\sin^m(\omega)$ $(m>0)$, $\varphi(\omega)=1-\cos\omega$.
Г. И. Дринфельд

8940. К аффинной геометрии овалов и овалоидов. Бляшке (Zur Affingeometrie der Eilinien und Eiflächen. Blaschke Wilhelm), Math. Nachr., 1956, **15**, № 4, 258—264 (нем.)

Устанавливаются некоторые свойства эллипса и эллипсоида. В первую очередь рассматриваются P-линии и R-линии. P-линии — овалы, имеющие однопараметрическое замкнутое семейство максимальных вписанных четырехугольников (четырехугольники, вариация площади которых равна нулю), R-линии — центральные P-линии. Вводится понятие сопряженных диаметров овала — диаметры, касательные в концах каждого из которых параллельны другому. P-линии характеризуются тем свойством, что для каждого диаметра можно указать сопряженный. R-линии характеризуются тем, что существует корреляция K, переводящая их в себя и такая, что ее квадрат представляет зеркальное отражение относительно центра. Далее автор устанавливает некоторые свойства эллипсоида: 2) эллипсоид представляет собой единственную поверхность, все границы тени которой плоские, 2) если любая тень овалоида на какой-либо плоскости представляет собой R-линию, то этот овалоид—эллипсоид. Указанные результаты связаны некоторыми вариационными задачами. Э. Г. Позняк

8941. Приложение топологии к выпуклым телам. Стейн (An application of topology to convex bodies. Stein S.), Math. Ann., 1956, **132**, № 2, 148—149 (англ.)

Используя топологические методы (теорему о существенных отображениях и теорему о неподвижных точках), автор получает следующие результаты. Пусть K^n выпуклое n-мернсе тело, имеющее в каждой точке своей границы B^{n-1} единственную опорную гиперплоскость. Часть тела K^n (поверхности B^{n-1}), лежащую по одну сторону некоторой гиперплоскости, условимся называть телесным (соответственно поверхностным) сегментом. Пусть, далее, на K^n и на B^{n-1} заданы некоторые строго положительные плотности распределения масс. Тогда справедливы следующие предложения: 1) для любой внутренней точки Q тела K^n существует такой (однозначно определенный) телесный сегмент и такой (однозначно определенный) поверхностный сегмент, центры тяжести которых (при выбранных распределениях масс) находятся в точке Q; 2) существует по крайней мере один телесный сегмент, имеющий с соответствующим поверхностным сегментом общий центр тяжести. Первое из этих предложений при $n=2$ было доказано Крафтом (Krafft M., Math. Ann., 1926—1927, **97**, 430—453).
В. Г. Болтянский

См. также: 8364, 8370, 8382, 8414, 8522, 8614, 8704, 8752

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

8942. О численном решении одной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Саульев В. К., Докл. АН СССР, 1957, **112**, № 6, 1002—1004

Система дифференциальных уравнений

$$a_i \frac{d^2u_i}{dx^2} + \sum_{j=1}^n b_{ij}u_j + \lambda \sum_{j=1}^n c_{ij}u_j = 0, \quad x \in (0, R), \quad x \neq r_k,$$

с условиями:

$$u_i(0) = u_i(R) = 0; \quad u_i(r_k-0) = u_i(r_k+0);$$

$$a_i(r_k+0)\frac{du_i(r_k+0)}{dx} - a_i(r_k-0)\frac{du_i(r_k-0)}{dx} = \frac{a_i(r_k+0)-a_i(r_k-0)}{r_k}u_i(r_k),$$

$$0 = r_0 < r_1 < \dots < r_k < \dots < r_{s-1} < r_s = R,$$
$$k = 1, 2, \dots, s-1; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(неизвестными являются u_i и λ) аппроксимируется конечноразностной системой с шагом h. При некоторых предположениях относительно коэффициентов уравнения справедлива оценка $|\lambda - \lambda^{(h)}| < ch^2$, где c от h не зависит, λ и $\lambda^{(h)}$ — первые собственные значения исходной и аппроксимирующей системы. Дан ход доказательства этого утверждения.

Автор подчеркивает то обстоятельство, что хотя первые производные аппроксимируются с точностью $O(h)$, окончательная же оценка имеет более высокую точность.
Я. И. Алихашкин

8943. Решение операторным методом некоторых дифференциальных уравнений с запаздывающим

аргументом, встречающихся в технике авторегулирования. Муравьев П. А., Сб. научн. тр. Ивановск. энерг. ин-та, 1957, вып. 7, 5—11

При помощи операционного исчисления решается начальная задача для уравнений с запаздывающим аргументом

$$y''(t) - \lambda y(t) + s y(t-\tau) = 0,$$
$$y'''(t) + M y'(t) + N y(t) + S y'(t-\tau) + R y(t-\tau) = 0$$

(все коэффициенты и запаздывание τ постоянны) при нулевой начальной функции. Окончательные формулы получаются такими же, как при интегрировании уравнений последовательно на интервалах $0 \leqslant t \leqslant \tau$, $\tau \leqslant t \leqslant 2\tau$, ... В промежуточных вычислениях пропущен множитель $e^{-np\tau}$.

Отметим, что тем же методом в значительно более общем случае аналогичные формулы были получены в диссертации И. И. Рябцева (РЖМат, 1956, 423Д), а несколько иным методом — в работе Р. Я. Шостака (Тр. МВТУ им. Баумана, сб. „Математика", 1948, 89—164).

А. Д. Мышкис

8944. Применение матриц к решению линейных дифференциальных уравнений. Барретт, Уайли (A simple matrix approach to linear differential equations. Barrett L. C., Wylie C. R., Jr), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 7, 472—478 (англ.)

Рассматривается применение матричных операций к решению систем линейных дифференциальных уравнений, не приведенных к каноническому виду.

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}(D)\,x_1 + \ldots + a_{1n}(D)\,x_n &= f_1(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}(D)\,x_1 + \ldots + a_{nn}(D)\,x_n &= f_n(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $a_{ik}(D)$ — полиномы с постоянными вещественными коэффициентами, $D \equiv d/dt$ (в статье не делается указания на необходимость вещественных коэффициентов полиномов $a_{ik}(D)$, но без этого условия многие выводы статьи неверны).

Решение матричного уравнения

$$A(D)\,X = F, \qquad (2)$$

эквивалентного системе (1), находится при $F = 0$ в виде

$$X = \sum_{j=1}^{n} b_j X_j,$$

где X_j — столбцовые матрицы, зависящие от корней уравнения

$$|A(m)| = 0, \qquad (3)$$

а b_j — произвольные постоянные.

Каждому вещественному простому корню этого уравнения m_1 соответствует матрица X_1, равная $X_1 = C_1 e^{m_1 t}$, где C_1 определяется из уравнения $A(m_1)\,C_1 = 0$.

Каждой паре простых комплексных сопряженных корней $m_{1,2} = p \pm iq$ отвечают две матрицы

$$X_1 = e^{pt}\{\mathrm{Re}\,[C_1]\cos qt - \mathrm{Im}\,[C_1]\sin qt\},$$
$$X_2 = p^{pt}\{\mathrm{Im}\,[C_1]\cos qt + \mathrm{Re}\,[C_1]\sin qt\}.$$

Если m_1 — вещественный или комплексный корень второй кратности, то

$$X_1 + X_2 = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_1 t} t,$$

где C_1 и C_2 находятся из условия

$$A(m_1)\,C_1 = 0,$$
$$A(m_1)\,C_2 + A^1(m_1)\,C_1 = 0.$$

Аналогично и в случае более высокой кратности корней.

Если $F \neq 0$, то дополнительно находится частное решение системы (1) методом неопределенных коэффициентов или методом вариации произвольных постоянных. Приводятся примеры.

К. Б. Окунева

8945. О методе конечных разностей в нелинейных граничных задачах. П. Шредер (Über das Differenzenverfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben. II. Schröder Johann), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 11—12, 443—455 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 4365. Рассматриваются дифференциальные уравнения видов

$$\varphi'' + f(x, \varphi) = 0, \quad \varphi'' + f(x, \varphi, \varphi') = 0$$

при граничных условиях типа Штурма. Изучается оценка погрешностей у приближенных решений, полученных методом конечных разностей. Эта погрешность оценивается суммой двух различных по смыслу членов. Первый из них вычисляется непосредственно по полученным приближенным значениям решения; он обычно сводится к нулю при многоточечном методе, однако при обычном разностном методе, вообще говоря, отличен от нуля. Второй же член зависит от оценки старших производных решения $\varphi(x)$ дифференциального уравнения; он имеет более высокий порядок малости, нежели первый член. Приводится оценка производной $\varphi'(x)$, причем имеются ссылки на другие работы автора (см., например, РЖМат, 1957, 1827). Частично рассматривается знак погрешности приближенного решения, а также включение значения $\varphi(x_i)$ между двумя приближениями (x_i — точка, использованная в методе конечных разностей). Приводится числовой пример.

Н. А. Бразма

8946. Вычисление ошибки в одном шаге метода Рунге — Кутта. Морель (Évaluation de l'erreur sur un pas dans la méthode de Runge — Kutta. Morel Henri), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 25, 1999—2002 (франц.)

Вычисляется ошибка, совершаемая в одном шаге метода Рунге — Кутта, с помощью величин, полученных в процессе интегрирования. При решении уравнений $y' = f(x, y)$ величина $K_n = \tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n$ дается в методе Рунге — Кутта как $K_n = \sum_{i=1}^{i=q} A_{n,i} K_{n,i}$, где $K_{n,i}$ — величины, соответствующие абсциссам $x_n + \theta_i h$ функции $hf(x, y)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$, в частности, $K_{n,1} = hf(x_n, \tilde{y}_n)$. Известны формулы для вычисления ошибки $\varepsilon = \tilde{y}_n - y_n$ в одном шаге с помощью одних величин $K_{n,i}$ в случае $q = 2$; исследование автора относится к случаям $q = 3$ и $q = 4$.

Использование величин $K_{n,i}$ при $i > 1$ сужает поле приложения формул, к которым они приводят, и не приносит упрощений; $K_{n,3}$ могут быть использованы в частном случае метода для четырех точек.

Ю. Ф. Харкеевич

8947. Критерий использования метода Рунге — Кутта. Ческино (Critère d'utilisation du procédé de Runge—Kutta. Ceschino Francis), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 15, 1553—1555 (франц.)

Критерий, полученный в предыдущей заметке автора (РЖМат, 1956, 1673), распространен им на дифференциальные системы первого порядка и на уравнения порядка выше первого. Рассматривается система

$$\left\{\begin{aligned} y_i' &= f\ (x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_i(x_0) &= y_{i,0} \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

Выводится формула роста ошибки ε после r шагов

$$\varepsilon\,(e^{rhG} - 1)/(e^{hG} - 1),$$

где h — шаг, $G = \left\| \dfrac{\partial f_i}{\partial y_m} \right\|$ $(i, m = 1, 2, \ldots, n)$.

Для получения в точке r ошибки интегрирования не выше допустимой, необходимо чтобы характеристические числа λ_i матрицы G были по модулю достаточно малыми, т. е. чтобы

$$\left|\frac{e^{rh\lambda_i}-1}{e^{r\lambda_i}-1}\right|, \quad (i=1, \ldots, n),$$

было относительно малым, а это будет выполнено, если λ_i находятся в нижней комплексной полуплоскости. В случае, когда (1) есть система, эквивалентная одному уравнению порядка n, матрица G принимает хорошо известную форму. Для уравнения первого порядка будем иметь условие $\frac{\partial f}{\partial y}<0$. Ю. Ф. Харкеевич

8948. Оценка ошибки формулы Рунге — Кутта. Вейвода (Odhad chyby Runge — Kuttovy formule Vejvoda Otto), Aplikace mat., 1957, **2**, № 1, 1—23 (чешск.; рез. русск., нем.)

Даются верхние границы ошибки метода Рунге—Кутта для решения системы n дифференциальных уравнений при трех различных предположениях о величине правых частей и их частных производных. Основная идея является общей для всех трех новых оценок ошибки и состоит в том, что в разложениях Тейлора точного и приближенного решения удерживаются члены до 6-го порядка включительно. Из резюме автора

8949. Исследование параметров в дифференциальном уравнении взрыва. Брейтер (Study of parameters in a differential equation related to blast. Breiter Mark C. Ballistic Res. Lab. Aberdeen Proving Ground, Md. Mem. Rept. 1954, № 822, 13pp.) (англ.)

Метод Рунге — Кутта используется для интегрирования линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами. Цель — исследование зависимости решения от двух критических констант, встречающихся в дифференциальном уравнении. Полностью описана автоматическая программа для численного решения. E. Isaacson

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 7, 752.

8950. Произведение композиции разностных операторов: приложение к вибрациям закрепленных пластин. Херш (Le produit de composition des opérateurs aux différences: application aux vibrations de plaques encastrées. Hersch Joseph), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 3, 299—312 (франц.)

Пусть $L[\varphi]=0$ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\varphi(x)$. Принципиально возможно определить разностное уравнение $L_h^*[\varphi]=0$, удовлетворяющееся точно дискретными значениями $\varphi(x)$ в точках x, $x+h$, $x+2h$, например с помощью такого метода: строим распределение T

$$L[\varphi]=\alpha_0\delta_{(x)}+\alpha_h\delta_{(x+h)}+\alpha_{-h}\delta_{(x-h)}+\cdots,$$

где L — присоединенный оператор, а $\delta_{(x)}$ — мера Дирака в точке x:

$$0=\langle T,\ L[\varphi]\rangle=\langle L[T],\ \varphi\rangle=\alpha_0\varphi(x)+\alpha_h\varphi(x+h)+$$
$$+\alpha_{-h}\varphi(x-h)+\ldots=L_h^*[\varphi].$$

Если вместо $L[\varphi]=0$ имеем $L[\varphi]=f(x)$, то нуль в левой части заменяем на $\langle T, f\rangle$. Этот метод может быть приспособлен к предельным условиям, которые, вообще говоря, не могут формулироваться одинаково для $L[\varphi]=0$ и для $L_h^*[\varphi]=0$.

Определим произведение композиции $L_1^*\star L_2^*$ двух разностных операторов L_1^* и L_2^*, относящихся к одному и тому же шагу h:

$$L_1^*[\varphi]=\sum_m \alpha_m^{(1)}\varphi(x+mh),\quad L_2^*[\varphi]=\sum_m \alpha_m^{(2)}\varphi(x+mh),$$
$$\left(L_1^*\star L_2^*\right)[\varphi]=\sum_k \alpha_k^{(1,2)}\varphi(x+kh),$$
$$\alpha_k^{(1,2)}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_m^{(1)}\alpha_{k-m}^{(2)};$$

практически все эти суммы имеют только конечное число членов. Доказана теорема: если L_1 и L_2 — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, то $(L_1L_2)=L_1^*\star L_2^*$; кроме того, если распределения T_{L_1} и T_{L_2} обеспечивают переход от L_1 к L_1^* и, соответственно от L_2 к L_2^*, то распределение $T_{L_1L_2}=T_{L_1}\star T_{L_2}$ обеспечивает переход от L_1L_2 к $(L_1L_2)^*$. Приведено числовое решение задачи о колебании шестиугольной пластины с одной закрепленной стороной.

Ю. Ф. Харкеевич

8951. Применение метода возмущений в проблемах пластинки. Соколовский (Application of the perturbation method to plate problems. Sokołowski Marek), Arch. Mech. Stos., 1953, **5**, 415—436 (англ.) См. РЖМех, 1956, 2352.

8952. О точности вычисления при помощи интерполяционного многочлена Ньютона с равноотстоящими узлами. Попович (Despre precizia calculului numeric in interpolarea prin polinomul lui Newton cu noduri echidistante. Popoviciu Tiberiu), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR Fil. Cluj. Ser. I., 1955, **6**, № 3—4, 27—35 (рум.; рез. русск., франц.)

8953. О приближенном вычислении производной. Блан (Sur le calcul approché d'une dérivée. Blanc Ch.), Bull. techn. Suisse romande, 1957, **83**, № 8, 109—113 (франц.)

Описываются известные численные методы нахождения производных различных порядков явной функции одной независимой переменной, заданной графически, таблично или экспериментально, основанные на параболической интерполяции с последующим улучшением результатов по способу наименьших квадратов. Оставляя в стороне вопрос об оценке погрешности, автор дает практические полезные указания по наиболее эффективному применению описанных методов.

Ю. Ф. Харкеевич

8954. Использование разностей при вычислении производных от полиномов в методе наименьших квадратов. Тримбл (Computing derivatives of least square polynomials using differences. Trimble George R., Jr., Techn. Note. Ballistic Res. Lab., Aberdeen Proving Ground, Md., 1954, № 898, 7 pp.) (англ.)

8955. Замечание об эмпирических формулах для двух табулированных величин. Мичка, Шмидт (Příspěvek k empirickým formulím pro dvě tabelované veličiny. Mička Jiří, Schmidt Oskar), Aplikace mat., 1957, **2**, № 2, 133—153 (чешск.)

Приводится новый метод определения функциональной зависимости для двух табулированных величин. Рассмотрены следующие 14 типов зависимостей, наиболее часто встречающихся в прикладной химии:

$$y=ab^x+c;\ y=ax^b+c;\ y=ab^xx^c;\ y=ax^2+bx+c;$$
$$y=(ax+b)/(cx+d);\ y+abc^x,\ y=ab^{x^c};$$
$$y=a/x^2+b/x+c;\ y=a\lg^2x+b\lg x+c;$$
$$y=1/(ax^2+bx+c);\ y=x/(ax^2+bx+c);$$
$$y=ab^{x^2}c^x;\ y=\sqrt{ax^2+bx+c};\ y=AB^{(ax+b)/(cx+d)}.$$

8956. Практическое решение линейных уравнений и обращение матриц. Фокс (Practical solution of

linear equations and inversion of matrices. Fox L.), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1954, № 39, 1—54 (англ.)

Обзорная статья, богато иллюстрированная числовыми примерами. Рассмотрены все основные методы решения систем линейных алгебраических уравнений и и обращения матриц, в частности методы простой итерации и Гаусса — Зейделя, детерминантный метод и метод исключения, включая компактные схемы, методы Жордана, Айткена, ортогонализации и пр. В заключение рассмотрены клеточное обращение матриц и комплексный случай. Библ. 21 назв. В. К. Саульев

8957. **О некоторых методах решения систем линейных алгебраических уравнений. Стоякович** (О неким поступцима за решаванье система линеарних алгебарских једначина. Стојаковић Мирко), Зб. Маш. фак. Ун-т Београду, 1954—1955 (1956), 19—27 (сербо-хорв.; рез. англ.)

В первой части дается подробное описание с указанием недостатков и преимуществ наиболее распространенных точных методов решения линейных систем (метода, основанного на теореме Крамера, и метода исключения Гаусса в развернутой и компактной системе). Для плохо обусловленных систем рекомендуется метод „regula falsi".

Во второй части автор обобщает метод „regula falsi" и при частных предположениях из него получает перечисленные выше методы.

Решение системы

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\mathbf{a}_i \equiv (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ищется в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{j=1}^{n-k} z_j \mathbf{u}_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где $\mathbf{y} \equiv (y_1, \ldots, y_n)$, z_j — числа и векторы $\mathbf{u}_j \equiv (u_{j1}, u_{j2}, \ldots, u_{jn})$ — линейно независимые. $\mathbf{y}$ и $\mathbf{u}_j$ выбираются так, чтобы удовлетворялись системы

$$\mathbf{a}_i\mathbf{y}_i = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$
$$\mathbf{a}_i\mathbf{u}_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, n-k).$$

Тогда для определения z_j имеем систему

$$\mathbf{c}_j\mathbf{z} = d_j,$$

где $\mathbf{z} \equiv (z_1, \ldots, z_{n-k})$, $\mathbf{c}_j \equiv (\mathbf{a}_j\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{a}_j\mathbf{u}_{n-k})$, $d_j = b_j - \mathbf{a}_j\mathbf{y}$. При $k = 1$, $\mathbf{u}_j \equiv (\underbrace{0 \ldots 0}_{j-1}, a_{1j+1}, -a_{1j}, 0 \ldots 0)$ получается метод исключения Гаусса; при $k = 1$ $\mathbf{u}_j = (A_{j1}, A_{j2}, \ldots, A_{jn})$ $j = 2, 3, 4, \ldots, n$, (A_{jm} — алгебраическое дополнение для a_{jm}) получается метод, основанный на теореме Крамера, при $k = n - 1$ получается метод „regula falsi".

В третьей части приводится числовой пример и дается геометрическая интерпретация метода.

В. Н. Кублановская

8958. **Решение больших систем уравнений и задач о собственных значениях матричным итерационным методом Ланчоса. Хорви** (Solution of large equation systems and eigenvalue problems by Lanczos' matrix iteration method. Horvay G., Gen. Electr Co., Knolls Atomic Power Lab. Schenectady, N. Y., Rept, 1953, № KAPL-1004, 113 pp.) (англ.)

Метод сеток приводит к решению систем линейных алгебраических уравнений. В этой связи в работе рассматриваются некоторые специальные вопросы линейной алгебры. Например, классический метод итераций и метод минимальной итерации для вычисления собственных значений, обращение матриц высокого порядка минимизацией итераций, обращение матриц при помощи полиномов Чебышева, обращение блочно-диагональных матриц.

8959. **Об обращении нормальных угловых матриц, содержащих четырехугольники с диагоналями. Джери** (Sull' inversione della matrice normale angolare per configurazioni contenenti quadrilateri con diagonali. Geri Gero), Boll. geod. e sci. affini, 1955, 14, № 3, 329—335 (итал.; рез. англ., франц.)

Рассматриваются конкретные матрицы, встречающиеся в геодезических расчетах, и даются некоторые приемы их обращения. В. Н. Кублановская

8960. **Обращение геодезических матриц. Бодевиг** (Die Inversion geodätischer Matrizen. Bodewig K. E.), Den Haag, 1954, 185. (нем.)

Геодезическая матрица G содержит большую подматрицу, состоящую „почти" из нулей. Автор дает способ явного обращения матрицы A без ошибок округления. Обращение исходной матрицы G осуществляется разбиением ее на соответствующие клетки. Рассматривается также непосредственное обращение матрицы G методом итераций.

Из Math. Revs, 1955, 16, № 6, 629

8961. **Решение алгебраических уравнений рекуррентным способом и способом итерации. Пырвулеску** (Rezolvarea ecuaţiilor algebrice printr-o metodă de recurenţă şi o metodă de iteraţie. Pîrvulescu N. S.), Studii şi cercetări mec. apl. Acad. RPR 1956, 7, № 1, 249—270 (рум.; рез. русск., франц.)

Уравнение $\sum_{i=0}^{n} a_i z^i = 0$ подстановкой $y = \frac{a_1 z}{a_0}$ (предполагается $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$) приводится к виду

$$-y = 1 + \sum_{i=2}^{n} a y^i. \qquad (1)$$

Возведение обеих частей в квадрат и исключение члена, содержащего y^2, приводит к уравнению:

$$-y = s_2 + \sum_{i=3}^{2h} a_{2,\,i} y^i.$$

С помощью аналогичных преобразований можно прийти к уравнениям вида

$$-y = s_t + \sum_{i=t+1}^{m} a_{t,\,i} y^i \quad (m = 2^{t-1}n) \qquad (2)$$

(в статье даны формулы для вычисления $a_{2,\,i}$, $a_{3,\,i}$, s_2, s_3). При некоторых условиях (если существует „корень с нулевым остатком") s_t стремится при $t \to \infty$ к одному из корней уравнения (1). При медленной сходимости автор рекомендует решать уравнение (1) или какое-нибудь из уравнений (2) способом итерации. Приведено несколько примеров. А. П. Доморяд

8962. **Об одном методе обращения матриц. Асценейтия** (Un método para el cálculo de la matriz inversa. Azpeitia A. G.), Rev. Real acad. cienc. exact., fís. y natur. Madrid, 1956, 50, № 4, 463—470 (исп.)

Предлагается метод для обращения матриц, подобный методу пополнения Двайера и основанный на идее: Если матрицы $A = [P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots, P_n]$ и $B = [P_1, P_2, \ldots, P'_k, \ldots, P_n]$ отличаются только одним столбцом и известна B^{-1}, то строки f'_i матрицы A^{-1} определяются по формулам

$$f'_i = f_i - \frac{(f_i, P'_k)}{(f_k, P_k)} f_k, \quad i = k,$$
$$f'_k = \frac{1}{(f_k, P_k)} f_k, \qquad (1)$$

где f_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — строки матрицы B^{-1}.

Матрица A рассматривается как последний член последовательности $A_0 = E, A_1, \ldots, A_n = A$ (n — порядок матрицы), причем переход от A_{p-1} к A_p осуществляется заменой p-го столбца A_{p-1} на p-й столбец A. Так что A^{-1} получается в результате n-кратного применения формул (1).

Доказывается, что число умножений и делений, необходимых для обращения матрицы n-го порядка, заключено в пределах $\frac{3}{2}n^3$ и $\frac{5}{3}n^3$. Встречается много опечаток, затрудняющих чтение текста.

В. Н. Кублановская

8963. Некоторые обратные задачи, связанные с собственными числами. Даунинг, Хаусхолдер (Some inverse characteristic value problems. Downing A. C., Jr, Householder A. S.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 3, 203—207 (англ.)

Рассматриваются три задачи, возникшие при изучении различных технических проблем.

1) Дана эрмитова матрица A n-го порядка и совокупность n чисел. Определить вещественную, не особую, диагональную матрицу D n-го порядка так, чтобы уравнение $|A - \lambda D^2| = 0$ имело бы корнями заданные числа, или аналогично, чтобы эрмитова матрица $D^{-1}AD^{-1}$ имела собственными числами заданные величины.

2) Дана эрмитова матрица A n-го порядка и совокупность n чисел. Определить вещественную диагональную матрицу D так, чтобы матрица $(A + D)$ имела бы собственными числами заданные величины.

3) Дана совокупность эрмитовых матриц n-го порядка A_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, m$) и совокупность вещественных чисел $\lambda_\nu^{(\mu)}$, где где $1 \leqslant \nu \leqslant \nu_\mu \leqslant n$ и

$$\sum_{\mu=1}^{m} \nu_\mu = \frac{n^2+n}{2}.$$

Определить эрмитову матрицу B такую, что каждый полином $P_\mu(\lambda) = |A_\mu - \lambda B^2|$ имеет корнями заданные числа $\lambda_\nu^{(\mu)}$.

Все три задачи решаются аналогичными итерационными методами.

Решение первой задачи: Пусть D_0 — некоторое приближение искомой матрицы D (вещественная, не особая диагональная матрица). Введем унитарную матрицу $U = \|u_{ji}\|_1^n$ столбцами которой служат собственные векторы матрицы $D_0^{-1}AD_0^{-1}$, и диагональную матрицу Λ, собственные числа которой равны заданным величинам. Из уравнения

$$D_0^{-1}AD_0^{-1} = U\Lambda(I + \varepsilon E)U^*$$

определяется диагональная матрица $E = \|e_i\delta_{ij}\|_1^n$ (ε — вспомогательный числовой параметр, величина которого выбирается произвольно и не влияет на сходимость итерационного процесса; I — единичная матрица).

Далее определяются элементы диагональной матрицы $G = \|g_j\delta_{ij}\|_1^n$ из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} |u_{ji}|^2 g_j = e_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Затем находится следующее приближение искомой матрицы DD_1 по формуле $D_1 = \left(I - \frac{1}{2}\varepsilon G\right)^{-1} D_0$.

Решение второй задачи отличается от решения первой только тем, что матрица E определяется из уравнения $A + D_0 = U(\Lambda + \varepsilon E)U^*$, а следующее приближение искомой матрицы D дается формулой

$$D_1 = D_0 - \varepsilon G.$$

Третья задача решается аналогично.

В работе рассматривается случай, когда элементы матрицы G найдены быть не могут из указанной системы уравнений, и исследуются условия сходимости итерационного процесса. К. Б. Окунева

8964. Собственные числа произвольных матриц. Лоткин (Characteristic values of arbitrary matrices, Lotkin Mark), Quart. Appl. Math., 1956, **14**, № 3, 267—275 (англ.)

Рассматривается новый метод определения собственных чисел матриц с комплексными элементами, основанный на том, что любая матрица с комплексными элементами может быть преобразована последовательными унитарными преобразованиями в треугольную матрицу с теми же собственными числами.

Пусть дана произвольная квадратная матрица A с комплексными элементами

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & b \\ \vdots & & \vdots \\ c & \cdots & d \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Указанное унитарное преобразование состоит в том, что последовательно определяются матрицы

$$A_{p+1} = T_p^* A_p T_p', \qquad A_0 \equiv A.$$

При $p \to \infty$ матрица A_p стремится к некоторой треугольной матрице.

На каждом шаге вспомогательная матрица T имеет вид

$$T = \begin{Vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ t & \cdots & (1-r^2)^{1/2} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (1-r^2)^{1/2} & \cdots & \bar{t} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix},$$

а

$$T^* = \begin{Vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ & \overline{t} \;\cdots\; (1-r^2)^{1/2} & \\ \vdots & & \vdots \\ & 1 & \\ \vdots & & \vdots \\ & -(1-r^2)^{1/2} \;\cdots\; t & \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix},$$

где $t = re^{i\theta}$; $r = (R^2+1)^{-\frac{1}{2}}$.

Величины R и θ определяются из системы уравнений $F(R, \theta) = 0$, $\partial F(R, \theta)/\partial\theta = 0$. Функция $F(R, \theta)$ имеет вид $F(R, \theta) = C_3R^3 + C_2R^2 + C_1R + C_0$, где $C_3 = |c|^2$;

$$C_2 = -2|c|[|d|\cos(\theta+\gamma-\delta) - |a|\cos(\theta+\gamma-\alpha)]:$$

$$C_1 = |d-a|^2 - 2|b||c|\cos(2\theta-\beta+\gamma) + \sum_{k=i+1}^{j-1}(|a_{ki}|^2 + |a_{jk}|^2);$$

$$C_0 = 2|b|[|d|\cos(\theta+\delta-\beta) - |a|\cos(\theta+\alpha-\beta)] + 2\sum_{k=i+1}^{j+1}[|a_{ik}||a_{jk}|\cos(\theta+\alpha_{jk}-\alpha_{ik}) - |a_{ki}||a_{kj}|\cos(\theta+\alpha_{ki}-\alpha_{kj})],$$

причем

$$a = a_{ii} = |a|e^{i\alpha};\quad b = a_{ij} = |b|e^{i\beta};\quad c = a_{ji} = |c|e^{i\gamma};$$
$$d = a_{jj} = |d|e^{i\delta},\quad a_{mk} = |a_{mk}|e^{i\alpha_{mk}}.$$

Приводится числовой пример. Имеются отдельные мелкие опечатки, в частности в индексах.

К. Б. Окунева

8965. Применение итерационных методов к определению собственных чисел и собственных векторов матриц. Уилкинсон (The use of iterative methods for finding the latent roots and vectors of matrices. Wilkinson J. H.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, 9, № 52, 184—191 (англ.)

В статье Бодевига (РЖМат, 1956, 762) утверждается, что итерационный метод часто практически не применим к решению задач, связанных с собственными числами матриц, и приводится пример матрицы, собственные числа которой не могут быть определены итерационным методом. Автор опровергает это утверждение Бодевига и описывает метод, которым на счетной машине *Pilot ACE*, снабженной специальным устройством, определены собственные числа и собственные векторы нескольких сотен матриц высоких порядков и нескольких тысяч матриц, порядок которых не превосходит десяти, и притом с весьма большой степенью точности.

В частности, указывается, что этим методом решен пример, указанный в статье Бодевига. К. Б. Окунева

8966. Итерационный метод вычисления собственных чисел и собственных векторов вещественных симметрических матриц. Хольдт (An iterative procedure for the calculation of the eigenvalues and eigenvectors of a real symmetric matrix. Holdt Richard Elton von), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, 3, № 3, 223—238 (англ.)

Рассматривается симметрическая матрица с вещественными элементами $A = \|a_{ij}\|_1^n$ и ее транспозиция A^*. Согласно условию, $A^* = A$. Вектор y рассматривается как строчная матрица $y = \|y_1, y_2, \ldots, y_n\|$. Соответственно через y^* обозначается столбцевая матрица.

Все операции над векторами производятся как над матрицами, в частности $|y| = \sqrt{y^*y}$.

Пусть λ_k $(k = 1, 2, \ldots, d)$ — совокупность всех различных собственных чисел матрицы A, E_n — n-мерное пространство. Обозначается: M_k — подпространство E_n, являющееся множеством всех собственных векторов, соответствующих собственному числу λ_k (M_k взаимно ортогональны в E_n). Если y_0 — произвольный вектор, то M_{k_i} — те подпространства M_k, в которых y_0 имеет ненулевую составляющую. $M(y_0)$ — подпространство E_n, состоящее из нулевого вектора и нормированных ортогональных векторов x_i таких, что

$$y_0 = \sum_{i=1}^{p} c_i x_i \,(c_i \neq 0,\ |x_i| = 1,\ x_i \in M_{k_i}),$$

$M^1(y_0)$ — ортогональное дополнение $M(y_0)$ в пространстве E_n.

Вводится скалярная функция вектора y:

$$r(y) = (y^*Ay)/|y|^2,$$

векторная функция

$$v(y) = (A - r(y)I)\,y/|y|,$$

обращающаяся в нуль тогда и только тогда, когда y есть собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу $r(y)$, скалярная функция $t(y, z) = |V(y)z + v(y)|^2$, где $V(y) = \|V_{ij}(y)\|_1^n$, а $V_{ij}(y) = \partial v_i(y)/\partial y_j$ и векторная функция $z(y)$, определяемая условиями: а) $t(y, z(y)) \leqslant t(y, z)$ при всех z, б) $|z(y)| \leqslant |z|$ при всех z, удовлетворяющих условию $t(y, z(y)) = t(y, z)$. Кроме того, $d(y) = |y|^2|V^*(y)\times v(y)|^2 - |v(y)|^4$.

Основным результатом работы является теорема 3: Если для произвольного вектора y_0 построить последовательность векторов $y_0, y_1, y_2, \ldots$ по следующему правилу: а) $y_{m+1} = y_m + z(y_m)$, если $d(y_m) \geqslant 0$, б) $y_{m+1} = \frac{y_m}{|y_m|} + \frac{v(y_m)}{|v(y_m)|}$, если $d(y_m) < 0$, то 1) $y_m \in M(y_0)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, 2) $\lim_{m\to\infty} r(y_m)$ существует и является собственным числом матрицы A, 3) $\lim_{m\to\infty} y_m$ существует и является собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному числу $\lambda = \lim_{m\to\infty} r(y_m)$.

Пользуясь этой теоремой, можно найти все различные собственные числа заданной матрицы. Если $x_1, x_2, \ldots, x_l$ $(l < d \leqslant n)$ — взаимно ортогональные собственные векторы матрицы A, то всегда найдется хоть один вектор y_0 такой, что $x_k \in M^1(y_0)$ $(k = 1, 2, \ldots, l)$. Построив последовательность векторов y_m в соответствии с условиями теоремы, начиная с y_0, получим $x_{l+1} = \lim_{m\to\infty} y_m$, причем вектор x_{l+1} будет ортогонален всем x_l.

Приводится пример определения собственных чисел матрицы восьмого порядка с точностью до седьмой значащей цифры. В формуле (6,1) имеется опечатка.

К. Б. Окунева

8967. Матрицы проектирования и итерационные способы. Фрейс де Вёбеке (Matrices de projection et techniques d'itération. Fraeys de Veubeke B.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1956, Ser. 1, 70, № 1, 37—61 (франц.)

В первой части работы вводятся понятия матриц простого и кратного проектирования и доказываются

их свойства; во второй — матрицы проектирования применяются к самосопряженным операторам для определения собственных векторов высших порядков.

С помощью матриц проектирования автор обобщает некоторые итерационные методы определения собственных векторов высших порядков (например, метод Дункана и Коллара и его видоизменения) и выясняет способы их применения. В третьей части приводится числовой пример. В. Н. Кублановская

8968. Расширение применимости итерационного процесса Лина для определения квадратичных множителей многочлена. Хед (Widening the applicability of Lin's iteration process for determining quadratic factors of polynomials. Head J. W.,) Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1957, **10**, № 1, 122—128 (англ.)

Пусть p_0 — исходное приближение, а p_1 и p_2 — приближения, полученные с помощью итерационного процесса Лина к корню p (действительному или комплексному) многочлена $F(x)$. Тогда, если итерационный процесс сходится, то, вообще говоря,

$$P = \frac{p_1^2 - p_0 p_2}{2p_1 - p_0 - p_2} \qquad (1)$$

представляет уточненное значение искомого корня.

Автор отмечает, что формула (1) применима для уточнения p и в том случае, когда итерационный процесс расходится, однако не слишком быстро, так что первые разности соответствующих коэффициентов последовательных приближений образуют примерно геометрическую прогрессию. А. Я. Белостоцкий

8969. Методы вычисления линейных сумм. Тримбл (Techniques for computing linear sums. Trimble George R. Jr. Ballistic Res. Labs, Aberdeen Proving Ground, Md, Techn. Note, 1954, № 897, 11 pp.) (англ.)

8970. Итерационные процессы для вычисления элементарных функций. Дейкстра (Iterative processes for the computation of elementary functions. Dijkstra Edsger W.), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, **4**, № 177—178, 222 (англ.; рез. нем.)

Разбираются вопросы составления стандартных подпрограмм для вычисления $a^{1/2}$ и a^{-1}, в случае машины с фиксированной запятой, работающей в двоичном исчислении. Предполагается, что в машине деление как элементарная операция отсутствует, а запятая фиксирована после знакового разряда, так что машина оперирует с числами, абсолютная величина которых меньше единицы. Для такой машины пишутся итерационные формулы, в которых непосредственное деление отсутствует. Затем эти формулы приводятся к такому виду, чтобы числа, получающиеся в промежуточных итерациях, были бы по модулю меньше единицы, без снижения точности окончательного результата.

М. А. Алексидзе

8971. Сравнение машинных методов для вычисления некоторых математических функций. Фриц (A comparison of machine methods for evaluating certain mathematical functions. Fritz W. Barkley, Mem. Rept. Ballistic Res. Lab. Aberdeen Proving Ground, Md., 1954, № 774, 13 pp.) (англ.)

8972. Перфокартные таблицы с переменным шагом. Райхль (Děrnoštíkové tabulky s proměnnou délkou kroku. Raichl Jiří), Stroje zpracov. inform., 1956, № 4, 297—303 (чешск.; рез. русск., англ.)

Интерполяционные формулы приводятся к такому виду и интерполяционные постоянные на перфокартах размещаются таким образом, чтобы число карт с таблицами при максимальной точности было по возможности меньшим. Из резюме автора

8973. О некоторых геометрических приближениях. Хазанов М. Б., Уч. зап. Кабардино-Балкарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 12, 8—13

Рассматриваются решения общим методом с любой степенью точности посредством циркуля и линейки следующих задач: построение радиана, спрямление дуги окружности, квадратура круга, трисекция угла, удвоение куба, построение стороны правильного вписанного в заданный круг семиугольника.

8974. Графические условия того, чтобы аргумент каждого из корней алгебраического уравнения содержался между $(\pi/2)+\mu$ и $(3\pi/2)-\mu$. Митрович (Conditions graphiques pour que l'argument de chacune des racines d'une équation algébrique soit compris entre $(\pi/2)+\mu$ et $(3\pi/2)-\mu$. Mitrović Dusan), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 12, 831—833 (франц.)

В уравнении

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \qquad (1)$$

с действительными коэффициентами и

$$z = \rho e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\mu\right)} = -\rho \sin\mu + i\rho\cos\mu = -\rho\zeta + i\rho\sqrt{1-\zeta^2} \qquad (2)$$
$$0 \leqslant \mu \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant 1,$$

автор, рассматривая коэффициенты a_1 и a_0 в качестве переменных ξ и η, причем в соответствии с (1)

$$\zeta = \sum_{j=2}^{n} a_j \varphi_j(\zeta)\,\rho^{j-1}; \quad \eta = -\rho^2 \sum_{j=2}^{n} a_j \varphi_j(\zeta)\,\rho^{j-2}, \qquad (3)$$

где полиномы $\varphi_j(\zeta)$ определяются посредством рекуррентных соотношений,

$$\varphi_j(\zeta) = -[2\zeta\varphi_{j-1}(\zeta) + \varphi_{j-2}(\zeta)],$$
$$\varphi_0(\zeta) = 0; \quad \varphi_1(\zeta) = 1,$$

устанавливает следующий необходимый и достаточный критерий графической проверки: аргумент каждого из корней уравнения (1) будет находиться между $(\pi/2)+\mu$ и $(3\pi/2)-\mu$, если точка $M(a_1, a_0)$ находится в 1-м квадрате и если, при изменении ρ от 0 до $+\infty$ кривая (Г), параметрически заданная (3), пересекает поочередно прямые $\eta = a_0$ и $\xi = a_1$, при этом прямую $\eta = \alpha_0$ пересекает первой и полное число точек пересечения будет равно m, где m — наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$m\frac{\pi}{2} + \frac{1-(-1)^m}{2}\mu < n\left(\frac{\pi}{2}+\mu\right).$$

При $\mu = \frac{\pi}{2}$, $m = 2(n-1)$ и получаем условие того что все корни (1) действительны и отрицательны. Случай $\mu = 0$ рассмотрен автором ранее (РЖМат, 1955, 6378). Н. А. Ронзина

8975. Графическое решение нелинейных разностно-дифференциальных уравнений. Каннингем (Graphical solution of certain nonlinear differential-difference equations. Cunningham W. J.), J. Franklin Inst., 1956, **261**, № 6, 621—629 (англ.)

Для разностно-дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = f[x(t), x(t-\tau)]$, где искомая функция $x(t)$ задана в промежутке $-\tau \leqslant t < 0$, дается графический способ последовательного построения в плоскости x, $\dot{x}$ точек $A_k[x(k\Delta t), \dot{x}(k\Delta t)]$, где $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$, а $\Delta t = \frac{1}{n}\tau$.

Если точки A_k $(k \leqslant m)$ известны, то следующая точка A_{m+1} определяется пересечением кривой $\dot{x} = f(x, \alpha)$, где $\alpha = x[(m+1)\Delta t - \tau]$, и прямой с угловым коэф-

фициентом $2/\Delta t$, проходящей через точку $[x(m\Delta t), \dot{x}(m\Delta t)]$.

Способ проиллюстрирован двумя примерами.

А. П. Доморяд

8976. Геометрическое решение квадратного уравнения по Штаудту. Ламбахер (Die geometrische Lösung der quadratischen Gleichung nach Chr. v. Staudt. Lambacher Th.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956, 9, № 5, 207—212 (нем.)

Дано видоизменение способа Штаудта графического решения уравнения

$$x^2 + px + q = 0. \qquad (1)$$

На окружности l единичного радиуса с центром в точке $O(0, 0)$ берутся точки $A(1,0)$, $B_1(0, 1)$, $B_2(0, -1)$ и на оси Ox откладываются $OP = p$ и $OQ = q$; на касательной к окружности l, проведенной в точке B_1, берется точка P', для которой $P'B_2 \perp B_2P$, а на оси Oy — точка Q' такая, что AQ' пересекается с B_1Q на окружности l. Проектирование точек пересечения прямой $P'Q'$ с окружностью l из точки B на Ox дает корни уравнения (1). Автор показывает также, как определяются мнимые корни уравнения (1).

А. П. Доморяд

8977 К. Элементы численного анализа. Рашкович (Osnovi numeričkog računanja. Raškovic Danilo P. Belgrade Gradev. Knjiga, 1954. VIII, 168s.) (сербо-хорв.)

Книга представляет собой элементарный и сокращенный курс численного анализа с точки зрения ручных вычислений. Рассматриваются: арифметика вещественных и комплексных чисел, приближенные вычисления, оценка погрешностей, интерполяция, численное решение уравнений и численное интегрирование. Книга насыщена примерами, но бедна теорией. Например, при описании метода Греффе случай комплексных корней не рассматривается.

D. H. Lehmer

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 7, 750.

8978 К. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. Хованский А. Н. М., Гостехиздат, 1956, 203 стр., 5 р. 25 к.

Монография состоит из пяти глав.

I глава посвящена изложению основных сведений из теории цепных дробей. Выводятся рекуррентные соотношения между числителями и знаменателями трех последовательных подходящих дробей и между последовательными подходящими дробями, откуда получается представление сходящихся непрерывных дробей равноценными рядами. Далее рассматриваются различные преобразования цепных дробей (умножение членов звеньев на множитель, позволяющее свести непрерывную дробь к дроби некоторого специального вида; преобразование сжатия и растяжения непрерывной дроби). Большое внимание уделяется вопросу преобразования ряда в равноценную цепную дробь и построения для ряда соответствующей и присоединенной цепных дробей. При этом в книге не приводятся обычные формулы, выражающие через коэффициенты ряда члены звеньев соответствующей и присоединенной дроби, а дается лишь метод получения их, принадлежащий В. Висковатому. Автор дает удобную схему построения соответствующей и присоединенной дроби по этому методу.

Подробно изучаются вопросы сходимости цепных дробей. Кроме широко известных классических признаков сходимости цепных дробей с положительными членами и цепных дробей с любыми числовыми членами звеньев, приводится ряд малоизвестных и интересных теорем о равномерной сходимости дробей вида

$$K(x) = [C_1/1,\ C_\nu x/1]_2^\infty.$$

Специально рассматривается случай предельно-периодических цепных дробей.

II глава посвящена разложению некоторых функций в цепные дроби. Здесь рассматриваются некоторые уравнения типа Риккати; их решения, обращающиеся в нуль, в нуле получаются в виде цепных дробей, для которых находятся общие выражения для членов звеньев.

Пользуясь полученным разложением, автор получает разложение в цепные дроби многих функций, как то: $(1+x)^\nu$, $\sqrt[\omega]{x}$, $\ln(1+x)$, e^x, обратных тригонометрических и обратных гиперболических функций, интеграла $\int_0^x \frac{dx}{1+x^k}$, отношения $\frac{I_m(x)}{I_{m-1}(x)}$, где $I_m(x)$ — бесселева функция m-го порядка.

Кроме того, непосредственно получается разложение в цепную дробь отношения двух гипергеометрических рядов

$$\frac{F(a, b+1, c+1, x)}{F(a, b, c, x)},$$

где

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{ab}{1-c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \ldots.$$

Приводится разложение в цепную дробь функции Прима, из которого получается разложение для интегральной показательной функции, интегрального логарифма и неполной гамма-функции.

Выражение общего члена звена не дает, вообще говоря, возможности получить общее выражение для подходящих дробей. Поэтому автор специально рассматривает случаи, когда возможно получить общее выражение для дробно-рациональных приближений.

В главе III автор с помощью формулы Обрешкова, являющейся обобщением формулы Тейлора, получает дробно-рациональные приближения для ряда функций: e^x, $\operatorname{th} x$, x^n, $\ln x$. В этой же главе рассматривается решение некоторого разностного уравнения с помощью цепных дробей, из которого получаются дробно-рациональные приближения для некоторых интегралов от эллиптических функций, в частности

$$\int_0^\infty e^{-xt}\operatorname{sn} t\,dt, \quad \int_0^\infty e^{-xt}\operatorname{th} t\,dt,$$

$$x\int_0^\infty e^{-xt}\operatorname{sn}^2 t\,dt, \quad x\int_0^\infty e^{-xt}\operatorname{th}^2 t\,dt.$$

Приводится таблица значений e^x, $\ln x$, вычисленных по дробно-рациональным приближениям и позволяющим судить о быстроте сходимости этих приближений.

Пользуясь обращением степенных рядов в непрерывную дробь по методу Висковатого, получаются дробно-рациональные приближения для интеграла вероятностей для $\Gamma(1+x)$.

IV глава посвящена некоторым обобщениям цепных дробей и их применениям к приближенным вычислениям. Подробно рассматривается метод, состоящий в последовательном применении некоторого матричного оператора к вектору. С помощью этого метода рассматривается извлечение квадратного корня и решение квадратного уравнения, извлечение корня третьей степени и решение кубического уравнения. Очень кратко дается метод решения уравнений высших степеней и извлечения корня любой степени с помощью матриц. Книга А. Н. Хованского является очень полезной благодаря хорошему изложению в ней многих малоизвестных вопросов из теории непрерывных дробей и интересным применениям к вопросам приближенного

анализа, так полно и цельно изложенным впервые Библ. 107 назв. А. Н. Иванов

8979 К. Практика дифференциальных уравнений. Занден (Praxis der Differentialgleichungen. 4. Aufl. Sanden Horst von. Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1955, 114 S., DM 6.80) (нем.)

Излагаются основные, наиболее употребительные методы численного и графического решения обыкновенных дифференциальных уравнений, пригодные в большинстве случаев, когда такие уравнения встречаются в инженерной практике. Эти методы изложены ясно и элементарно, так что для понимания книги достаточно знания курса высшей математики в объеме программы технических вузов. С целью упрощения изложения автор не формулирует точных предположений, в которых пригодны рассматриваемые методы, а также не исследует вопроса об оценке погрешности, отсылая по этому поводу читателя к более полным курсам. Взамен этого автор подробно разбирает ряд численных примеров на применение различных методов, поясняя каждый шаг вычислений, в частности детально занимаясь вопросом контроля и уточнения вычислений. Приведен ряд примеров инженерного характера.

Книга состоит из двух частей. В первой („Обыкновенные дифференциальные уравнения с начальными значениями") основными являются графический метод изоклин с поправками по методу последовательных приближений и численный метод Адамса. Во второй части („Обыкновенные дифференциальные уравнения как краевые задачи") излагаются вариационный метод Релея, метод итераций, применение функции Грина, переход от дифференциального уравнения к разностным, а также методы Ритца и Галеркина.

См. также: 8703, 8742, 8765. А. Д. Мышкис

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

8980. Некоторые особенности чехословацкой релейной счетной машины САПО. Облонский (Some features of the Czechoslovak relay computer SAPO. Oblonský Jan), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, **4**, 73—75, 224 (англ.; рез. нем.)

Приводятся основные сведения о большой счетной машине САПО (SAPO—SAmočinný POčítač), предназначенной для решения широкого класса вычислительных и логических задач. Машина отличается простотой программирования и надежностью работы. Имеются схемы для обнаружения и исправления ошибок и тройного контроля вычислений. Запоминающее устройство представляет собой магнитный барабан диаметром 14 *см* и длиной 16 *см*. Емкость барабана 1024 32-разрядных двоичных числа. Все арифметические действия выполняются в двоичной системе счисления с плавающей запятой, но возможен также ввод и вывод чисел в десятичной системе. Для ввода и вывода чисел применяется стандартное оборудование фирмы „Аритма" (Aritma). Система кодирования пятиадресная. Запоминающее устройство использует видоизмененную последовательность Коробова (РЖМат, 1957, 5220), что позволяет обойтись без синхронизации между вращением барабана и релейной частью машины. Вся счетная машина рассчитана так, что каждый шаг работы начинается лишь после того, как установлена правильность предыдущего числа. В случае сбоя предусмотрены следующие действия счетной машины. Если сбой таков, что может быть исправлен при помощи корректирующей схемы без повторения целого цикла действий, сбой исправляется и счетная машина продолжает работать без какой-либо потери времени. Если сбой не может быть исправлен при помощи корректирующей схемы, то весь цикл действий счетной машины автоматически повторяется и когда новый цикл дает правильный ответ, вычисления продолжаются дальше. И, наконец, если сбой произойдет в повторном цикле действий, что указывает на возможность систематического сбоя, вычисления обрываются. О каждом сбое, обнаруженном при помощи схем, автоматически сообщается оператору. Для одного полного периода барабана (около 20 *мсек*) период одного цикла действий равен 320 *мсек*. Половина этого времени затрачивается на управление релейными схемами. Скорость счета немного более, чем 10 000 операций в час или 3 действия в 1 сек. Скорость ввода и вывода данных приспособлена к этой сравнительно небольшой скорости счета. Запоминающее устройство наполняется данными с перфокарт в течение 10 мин. Машина содержит около 8000 реле и 350 электронных ламп. Хотя счетная машина еще не окончена, уже приготовлено несколько программ для различного рода научных и технических задач и подсчитано требуемое время для решения их машиной. Разработкой проекта машины руководил Свобода (Svoboda Antonin). Счетная машина находится в процессе монтажа и должна быть испытана в течение нескольких лет. В. Л. Евтеев

8981. Логическое построение вычислительной машины БИЗМАК фирмы „РКА" (RCA). Бирд, Бенский, Нетлтон, Пурт (Logic design of the RCA Bizmac computer. Beard A. D., Bensky L. S., Nettleton D. L., Poorte G. E.), IRE Convent. Rec., 1956, **4**, 81—87 (англ.)

Машина БИЗМАК (BIZMAC) входит в систему для обработки данных того же названия. Первые испытания машины были проведены в конце 1955 г. Вся система состоит из цифровой вычислительной машины, устройств ввода и вывода, сортировочных устройств, опрашивающего блока и переключающего блока. Последний осуществляет подключение перечисленных блоков к магнитным лентам при получении команды от центральной системы управления. В системе используется 3 вида кодов: 1) „знак" — состоит из 7 двоичных разрядов, 6 из которых являются разрядами числовой информации, а седьмой служит для контроля и используется при представлении алфавита, десятичных цифр или специальных символов; 2) „число" — состоит из одного или нескольких знаков, разделенных специальным разделительным знаком; 3) „блок" — одно или несколько чисел, выделенных специальными знаками начала и конца блока. БИЗМАК является последовательной 3-адресной машиной с кодами переменной длины. Внутренних запоминающих устройств два: основное на магнитных сердечниках на 2048 чисел со временем выборки 20 *мксек* и вспомогательное на 32 768 чисел со средним временем выборки 5 *мсек*. Вывод и ввод идет на частоте 10 *кгц*. В качестве устройств ввода и вывода применяются 15-канальные магнитные ленты. Рабочая частота машины 50 *кгц*. Время операции является функцией длины кода. Два 10-разрядных числа складываются за 500 *мксек*, а 5-разрядных — за 280 *мксек*. Операций 22, каждая из них имеет различные вариации. Основное запоминающее устройство разбито на два блока, связанных с сумматором, дешифраторными схемами и магнитными лентами через буферные регистры. Для указания адресов служат три счетчика, два из которых используются только со своими блоками запоминающего устройства, а третий —

с обоими. Благодаря этому в арифметический узел могут поступать два числа одновременно. Сумматор работает кодом с превышением 3 и выдает контролируемый результат, временно хранящийся в выходном регистре сумматора. Инструкция состоит из 8 знаков, 6 из которых отводятся для обозначения адресов (по 2 знака на каждый адрес) и 2 для обозначения кода операций. Один знак кода операций определяет одну из основных инструкций, а другой—знак ее разновидности. Основные инструкции машины БИЗМАК делятся на 3 категории: 1) инструкции обработки данных, выполняющие операции по передаче, чтению, записи и сортировке информации; 2) арифметические инструкции, куда входит десятичное сложение, вычитание, умножение и двоичное сложение и вычитание, использующееся при преобразовании инструкций; 3) логические инструкции, выполняющие безусловный и условный переходы. Для выполнения условного перехода существует несколько критериев. Информация с магнитной ленты поступает в оперативное запоминающее устройство через буферные регистры. Каждый знак передаваемой информации может помещаться на свой адрес. Передача данных внутри основного запоминающего устройства и между ним и вспомогательным запоминающим устройством осуществляется также через буферные регистры, где происходят контроль кодов по четности и расшифровка специальных знаков. При арифметических операциях информация из буферных регистров запоминающего устройства проходит сумматор, его выходной регистр и возвращается в запоминающее устройство непосредственно, минуя буферные регистры. Блок управления вырабатывает 3 вида управляющих напряжений: 1) напряжения, представляющие 22 операции и их разновидности; эти напряжения подаются на все логические элементы, необходимые для выполнения данной операции; 2) 12 управляющих напряжений, определяющих порядок выполнения элементарных действий внутри каждой операции (запись, чтение, вызов части инструкции и т. д.); 3) серии из 8 тактирующих импульсов, хронирующих элементарные действия, определяемые 12 уровнями. Для каждой выполняемой операции вид 12 управляющих напряжений, порядок их появления и критерии выбора указываются в программе. Это позволяет формировать внутри операции самостоятельные циклы и выбирать оптимальную последовательность выполнения каждой инструкции. Переменная длина кода дает более рациональное использование запоминающего устройства и экономит время. Переменная длина знака и блока, используемая также и в блоках магнитных лент, ведет к появлению между укороченными кодами пустых промежутков. Для их устранения применяется специальная операция „сжатия", при которой данные считываются с ленты, преобразуются и записываются вновь уже без промежутков.

А. И. Щуров

8982. Две новинки в области вычислительной техники (Two major new entries in the digital sweepstakes), Control Engng, 1956, **3**, № 6, 22—23 (англ.)

Сообщается о демонстрации: 1) новой системы обработки данных и управления процессами фирмы Beckman Instruments; 2) вычислительной машины на магнитных элементах фирмы Remington Rand. В системе обработки данных и управления используется запоминающее устройство в виде контактной панели, на которой программируется течение управляемого процесса. В ходе вычислений могут быть использованы операции линеаризации, интегрирования, пересчета, численного суммирования, ограничения и др. Отмечается надежность и компактность системы; приводятся фотографии отдельных частей установки. Сообщается, что вычислительная машина фирмы Remington Rand „Бэби—УНИВАК", разработка которой в течение нескольких лет была засекречена, демонстрировалась представителям прессы перед установкой в Кембриджском исследовательском центре военно-воздушных сил. Приводятся следующие данные: арифметический блок и запоминающее устройство машины размещены в шкафу размерами $1{,}8 \times 2 \times 0{,}45$ *м*; пульт управления, включая входной, выходной и печатающие блоки, имеет размеры $1{,}2 \times 1{,}8 \times 1$ *м*. Вся машина включает в себя 1000 специальных магнитных усилителей (названных „ферракторами") и 30 электронных ламп, которые вместе выполняют те же функции, что и 5400 ламп в машине УНИВАК. Запоминающее устройство выполнено на магнитном барабане, вращающемся со скоростью 16 500 об/мин и имеющем 4 группы магнитных головок, размещенных под углом 90° друг относительно друга. Это позволяет увеличить эффективную скорость вращения барабана до 66 000 об/мин. Машина может выполнять в секунду более 11 000 сложений или 3000 умножений 10-значных чисел.

З. Д. Доброхотова

8933. Добавление магнитного барабана к вычислительной машине „Гамма-3". Дрейфус, Фейссел, Леклер (A magnetic drum extension to the Gamma 3 computer. Dreyfus P. L., Feissel H. G., Leclerc B. M.), IRE Convent. Rec., 1956, **4**, № 4, 105—108 (англ.)

Логика машины „Гамма-3" позволяет добавить к ней запоминающее устройство на магнитном барабане. Добавляемый узел состоит из магнитного барабана, буферного запоминающего устройства и вспомогательных цепей. Магнитный барабан имеет 64 дорожки на 6144 разряда каждая, причем дорожка разбивается на 8 групп. Барабан может использоваться для запоминания чисел, алфавитного текста и инструкций. В качестве буферного запоминающего устройства используется 64 магнитострикционные линии задержки на 48 разрядов каждая. Все линии задержки разбиты на 4 группы по 16 линий. Емкость каждой группы линий задержки равна емкости одной группы на дорожке барабана. Передача информации ведется группами. Магнитный барабан и линии задержки работают на тактирующей частоте машины (280 *кгц*). В качестве линий задержки используются никелевые трубки, длиной 85 *см*, внешним диаметром 10 *мм* и внутренним диаметром 8 *мм*. Задержка трубки 170 *мксек*. Усиление усилителя регенерации 60 *дб*. В буферном запоминающем устройстве на 16 разрядов приходится 1 лампа. В запоминающем устройстве на магнитном барабане используется метод записи без промежутков между цифрами. Выбор дорожек как при записи, так и при чтении осуществляется дешифраторной матрицей на германиевых диодах. Для уменьшения вихревых токов экран магнитной головки состоит из нескольких изолированных между собой частей. Зазор между головкой и барабаном 0,02 *мм*, толщина оксидного покрытия 0,015 *мм*, ток записи через обмотку 200 *мкгн*—60 *ма*. Амплитуда читаемого сигнала на частоте 140 *кгц*—10 *мв*. Частота тактирующего генератора автоматически меняется в зависимости от величины задержки. Это позволило не применять для линий задержки температурной стабилизации. Для синхронизации барабана с линиями задержки используется специальная управляющая трубка, на которую подаются маркерные импульсы. Входные и выходные импульсы проверяются на совпадение, и получающийся сигнал ошибки используется для управления скоростью барабана. Синхронизация тактирующего генератора с маркерами осуществляется путем подачи другого сигнала ошибки на реактивную лампу, управляющую его частотой.

А. И. Щуров

8934. Фирма ИБМ выпускат новую вычислительную машину ИБМ-709, сконструированную спе-

циально для облегчения „выработки решений" (IBM announces new 709 data processing system, specifically designed to aid „decision-making"), Office Manag., 1957, **18**, № 2, 38, 47 (англ.)

Новая вычислительная машина ИБМ-709 предназначена для помощи правлениям фирм в текущем руководстве и планировании. На машине могут решаться задачи определения наиболее выгодного местоположения вновь проектируемых заводов, предсказания розничных цен, нахождения оптимальных распределений, а также выполняться обычные бухгалтерские операции и обработка большого количества данных. Продажная цена машины — порядка 3 млн. долларов, арендная плата — 56 тыс. долларов за месяц.

В числе вновь разработанных блоков машина содержит блок магнитной записи ИБМ-729 с автоматической проверкой записи и синхронизатор ИБМ-766, который позволяет машине одновременно производить считывание данных, вести запись и проводить вычисления. Предусмотрена возможность включения в машину трех таких синхронизаторов, причем каждый из них имеет по два канала для ввода и вывода данных и к каждому каналу может быть присоединено по 8 блоков магнитных лент, печатающее устройство, перфоратор и устройство для чтения перфокарт. Предусмотрена также возможность подсоединения двух блоков запоминающего устройства на магнитных барабанах и регистратора на электронно-лучевых трубках ИБМ-740. Всего в машине может быть использовано до 50 блоков ввода и вывода данных. Для обеспечения большей гибкости программирования предусмотрен ввод данных в машину в любой системе счисления.

Основное запоминающее устройство машины выполнено на магнитных сердечниках. Емкость его 32 768 чисел. Каждое число эквивалентно десятизначному десятичному числу. Время выбора 12 *мксек*. З. Д. Доброхотова

8985. Анализ кодов задач на машине МАНИАК / **Хербст, Метрополис, Уэлс** (Analysis of problem codes on the Maniac. Herbst Eugene H., Metropolis N., Wells Mark B.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, **9**, № 49, 14—20 (англ.)

Приводятся статистические данные о частоте появления в программах и частоте выполнения отдельных команд на одноадресной вычислительной машине МАНИАК Лос-Аламосской научной лаборатории. Для отдельных задач приводятся, для каждой из 36 команд машины, следующие данные: количество команд данного вида в программе (абсолютное и в процентах), общее количество обращений к команде данного вида и затраченное на это время в течение решения задачи (также абсолютное и в процентах). Подчеркивается значение накопления такого рода сведений для наиболее рационального проектирования новых вычислительных машин.

Описывается общая организация программы—„анализатора кодов", с помощью которой получались для отдельных задач эти сведения.

Приведены данные для четырех программ — задачи из гидродинамики, задачи, решенной методом Монте-Карло, задачи из математической логики и программы, состоящей из 37 стандартных программ машины.

Приведен список команд машины. А. П. Ершов

8986. Электронная вычислительная машина СИЛЛИАК Сиднейского университета (Sydney university's electronic computer SILLIAC), Erda, 1956, **29**, № 9, 17, 50 (англ.)

В популярной форме рассказывается о том, как работает электронная вычислительная машина СИЛЛИАК (SILLIAC). Сообщается, что ее постройка по чертежам машины ИЛЛИАК (ILLIAC) начата в г. Сиднее (Австралия) в январе 1954 г. и закончена в сентябре 1956 г. Машина оперирует с 40-разрядными двоичными числами. Запятая фиксированная. Система программирования одноадресная. Внутреннее запоминающее устройство—на электронно-лучевых трубках—1024 числа, внешнее—на магнитных лентах—1 000 000 чисел. Ввод данных в машину осуществляется с помощью перфоленты со скоростью 200 десятичных цифр в 1 сек. Вывод—на перфоленту (60 десятичных цифр в 1 сек.) и печатающее устройство (10 десятичных цифр в 1 сек.). Машина содержит 2800 ламп и потребляет мощность 30 *квт*. Скорость выполнения арифметических операций следующая: сложение и вычитание 60 *мксек*, умножение 600 *мксек*, деление 800 *мксек*. Стоимость машины—75 000 фунтов стерлингов. См. также РЖМат, 1955, 1992, 4625. Н. Н. Поспелов

8987. Обзор развития вычислительных машин за 1955 г. Наш (Review of electronic computer progress during 1955. Nash J. P.), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, **5**, № 1, 43—47 (англ.)

Указывается, что диапазон стоимостей машин, выпущенных в 1955 г., был чрезвычайно широк (от 60 000 долл. до нескольких миллионов долларов). Заметна тенденция фирм увеличить эксплуатационные удобства малых машин, благодаря чему малые машины отличаются от больших главным образом скоростью. Наиболее быстрой машиной, о которой объявлено, является ЛАРК (LARC). Машина строится фирмой „Сперри Рэнд" (Sperry Rand Corporation) для Ливерморской лаборатории Комиссии по атомной энергии (Livermore Laboratory of the Atomic Energy Commission). ЛАРК будет десятичной машиной на кристаллических триодах и магнитных усилителях с печатным монтажом. Оперативное запоминающее устройство на магнитных сердечниках состоит из 8 блоков, по 2560 кодов каждый. Магнитный барабан увеличивает общий объем запоминающего устройства до 96 000 кодов. Время сложения 4 *мксек*, умножения 8 *мксек*, деление будет, вероятно, выполняться за 28 *мксек*. В машине предполагается использовать 5000—8000 кристаллических триодов, 25 000—74 000 диодов и 10 000—16 000 магнитных усилителей. Фирма РКА (RCA) сообщила о системе для обработки коммерческой информации БИЗМАК. Машина системы имеет 3-адресный код, запоминающее устройство на магнитных сердечниках объемом 2048 или 4096 чисел с временем выборки 20 *мксек*, запоминающее устройство на магнитном барабане для запоминания команд и магнитные ленты. Ввод производится с перфолент или перфокарт; вывод—на быстродействующее электромеханическое или электронное устройство печати. Заметно быстрое число устройств, использующих печатный монтаж и кристаллические триоды. Фирма „Норт Америкен Авиэйшн" (North American Aviation Corporation) построила для ВВС США самолетную вычислительную машину с печатным монтажом весом около 56 *кг*, в которой используется 1000 кристаллических триодов. Машина занимает объем около 0,084 $м^3$ и потребляет не менее 100 *вт*. Вычислительные машины фирмы „Бендикс" (Bendix) G-15 (универсальная) и D-12 (дифференциальный анализатор) также собраны из субблоков с печатным монтажом. В самолетной машине „Транзак" (Transac) фирмы „Филко" (Philco Corp.) в арифметическом узле используется 1242 кристаллических триода с поверхностным барьером. Весь узел потребляет менее 6 *вт*. Среди запоминающих устройств наиболее распространенными являются запоминающие устройства на магнитных сердечниках. Подобное устройство на 4096 40-разрядных двоичных кодов было разработано фирмой „Интернейшнл Телеметр" (International Telemeter) в феврале 1955 г. для фирмы „Рэнд" (Rand). За 1070 рабочих часов этого устройства было зарегистрировано лишь 18 сбоев. Эта же фирма предполагает в 1956 г. закончить запоминающее устройство с еще большим объемом. Фирма ИБМ сообщила о скором выпуске устройства

на 32 768 кодов, со временем выборки 12 *мксек*, предназначенного для машины ИБМ-704. Такого же типа запоминающими устройствами снабжены машины УНИВАК и „УНИВАК-Сайнтифик" фирмы „Сперри Рэнд". Продолжались работы над запоминающими устройствами на электроннолучевых трубках и на магнитном барабане. Изучалась возможность использования для запоминания явления ядерного резонанса и ферро-электрических материалов. Большое внимание уделялось фирмами на разработку элементов на кристаллических триодах, работающих в напосекундном диапазоне. Наибольших успехов достигла фирма „Филко", разработавшая триод с поверхностным барьером, максимальная рабочая частота которого доходит до 60 *мгц*. Фирма ИБМ сообщила о кристаллическом триоде с характеристикой, подобной тиратрону. Триод способен переключать токи в 100 *ма* со скоростью до 1 *мгц*. В большем количестве появились быстропечатающие устройства. Фирма „Сперри Ранд" выпустила в продажу устройство, печатающее 1000 знаков в 1 сек. Фирмой „Хьюз Эйркраф" (Hughes Aircraft Corp.) разработана трубка „Типотрон" (Typotron), воспроизводящая знак за 40 *мксек*. Устройство печати фирмы „Берроуз" (Burroughs Corp.), в котором используется электрографический метод, имеет скорость 5000 знаков в 1 сек. Велись теоретические работы по логике машин, применению методов алгебры Буля для анализа и синтеза цепей и работы по использованию цифровых машин для управления. Объем работ, проводившихся в области моделирующих устройств, гораздо меньше. Приведена обширная библиография (124 наименования) за 1955 г. А. И. Щуров

8938. Обзор развития электронных вычислительных машин в течение 1956 г. (Review of electronic computer progress during 1956), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 1, 55—59 (англ.)

Дается обзор достижений и указываются тенденции развития цифровых и моделирующих вычислительных машин и связанных с ними областей науки и техники в течение 1956 г. Отмечается, что наиболее существенной чертой развития в области цифровых вычислительных машин за последние 2 года является тенденция к разработке более сложных и универсальных вычислительных систем с комплексным использованием новых и старых достижений в области схемной и логической структуры цифровых машин. В качестве примера приводятся сообщения о проектировании фирмой „Сперри-Рэнд" (Sperry Rand) сверхбыстродействующей цифровой вычислительной машины ЛАРК (LARC) и фирмой РКА (RCA) — машины БИЗМАК (BIZMAC), сделанные в 1955 г., а также сообщение фирмы ИБМ о начатой в 1956 г. разработке 10-мегагерцевой цифровой вычислительной машины СТРЕТЧ (STRETCH) на полупроводниковых и магнитных элементах. Такая же тенденция к объединению наблюдалась в области информационных машин в применении их в торговле и управлении производством. Несмотря на увеличение сложности и возможностей цифровых вычислительных машин, их размеры и потребление мощности не возросли или даже уменьшились, благодаря использованию высокочастотных полупроводниковых приборов и малогабаритных переключателей на магнитных сердечниках. Другой характерной чертой развития была дальнейшая специализация цифровых вычислительных машин для применения в области торговли, науки и автоматического управления. Кроме того, большое внимание было уделено разработке вспомогательного оборудования. В области моделирующих вычислительных машин развитие характеризуется увеличением скорости настройки машин, применением полупроводников и улучшением конструкции. Упоминается о приобретении Центром ВВС США в Райт-Филде большой моделирующей вычислительной машины (фирмы „Ривз"), состоящей из 400 усилителей и включающей в себя устройства для обнаружения и предупреждения ошибок оператора, проверки правильности установки задачи и регулировки режима работы оборудования в оптимальном диапазоне напряжений. На основании анализа фирменных сообщений делается вывод, что в Западной Европе ведущими странами в области моделирующих машин являются Франция и Англия и что разработка таких машин ведется также в Швеции, Германии, Бельгии, Югославии и Швейцарии. Указывается, что в Западной Европе было построено большое количество цифровых вычислительных машин, а машины таких английских компаний, как „Ферранти" и „Инглиш Электрик", изготовляются в массовом количестве и используются по всей Европе. Отмечается наличие цифровых вычислительных машин в Советском Союзе, Чехословакии и вероятное наличие их в Польше. Сообщается об установке вычислительной машины УНИВАК в организованном во Франкфурте (Германия) вычислительном центре. Кроме того, сообщается об учреждении американскими оккупационными войсками в Германии Центра математических исследований. Отмечается усиленное изучение цифровых вычислительных машин эксплуатационным и конструкторским составом и указывается на отсутствие до сих пор хорошего учебника или руководств по данному вопросу. Сообщается также о достижениях в области теории конструирования вычислительных машин. В части усовершенствования и облегчения программирования велись работы в двух направлениях: в направлении разработки компиляторов, ускоряющих автоматическое программирование, и в направлении разработки вычислительных машин с переменной длиной команд, характеризующихся тем, что требующиеся команды образуются из соответствующих комбинаций элементарных команд, предусмотренных в машине, а конструкция машины обладает нужной для этого гибкостью. В качестве новых элементов вычислительных машин отмечаются: трансфлюксор, криотрон, плоскостные полупроводниковые триоды, обладающие отрицательным сопротивлением, высокочастотные германиевые и кремниевые полупроводниковые триоды, специально предназначенные для выполнения функций переключения, а также новые улучшенные магнитные материалы. Указывается на большое внимание, уделявшееся разработке магнитных запоминающих устройств, основным направлением которой было уменьшение размеров и повышение быстродействия при малой потребляемой мощности. Сообщается о запоминающем устройстве на ферритовых платах с отверстиями, а также об использовании магнитных сердечников с тремя отверстиями. Упоминается о продолжении работ над ферроэлектрическими и электростатическими запоминающими устройствами. Указывается на большое количество работ по схемам цифровых и моделирующих вычислительных машин, бо́льшая часть которых связана с использованием полупроводниковых элементов. В части входных и выходных устройств вычислительных машин наблюдалось увеличение емкости и скорости работы с использованием трех видов запоминающих устройств: магнитных дисков, магнитных лент и магнитных сердечников. Характер развития логической структуры машин определялся требованиями увеличения скорости работы и сложности решаемых задач, в частности дифференциальных уравнений в частных производных (ЛАРК и СТРЕТЧ). Сообщается о применении существующих цифровых вычислительных машин для исследования работы новых цифровых вычислительных машин, перевода с одного языка на другой, моделирования поведения человека, управления производственными процессами и т. п. Особо отмечается развитие теории автоматов. Большое внимание было уделено изучению надежности работы машин и обучению обслуживающего персонала. В заключение приводится библиография

из 148 наименований по всем указанным выше вопросам. Б. И. Стрелков

8989. Требования, предъявляемые к автоматическим электронным счетным машинам. Голдстайн (Systematics of automatic electronic computers. Goldstine Herman H.), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, **4**, 1—4, 223 (англ.; рез. нем.)

Рассматриваются математические требования, предъявляемые различными задачами к объему запоминающих устройств и к скорости работы автоматических электронных счетных машин. Подсчитано время и число умножений ($10^7 \div 10^{11}$), необходимых для решения некоторых гиперболических и эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных, интегральных уравнений и систем линейных алгебраических уравнений. В частности, приводится нелинейное, 4-го порядка, частично эллиптическое, частично параболическое уравнение вязкой несжимаемой жидкости. Утверждается, что для получения решения этого уравнения требуется 2500 пространственных узловых точек. При решении этого уравнения надо выполнить 10^7—10^8 умножений. Приведены общие соображения о необходимости построения электронных машин, которые имели бы емкость запоминающих устройств 20 000÷50 000 40÷50-разрядных двоичных чисел и могли бы произвести в приемлемое время $5 \times 10^8 \div 10^{11}$ и более перемножений. Указывается, что общее время, необходимое для решения задачи на машине, примерно пропорционально времени, потраченному на все умножения, причем коэффициент пропорциональности лежит между 2,5 и 7,5. Отмечается, что при сложении в машине двух двоичных чисел, длиной n каждое, среднее число переносов из младшего разряда в старший не превышает $\log_2 n$. Построена модель сумматора с устройством, сигнализирующим об окончании переноса и о возможности перехода к следующей операции. В заключение приведена таблица, показывающая, как изменяются затраты времени на ввод данных из внешнего запоминающего устройства, в зависимости от емкости внутреннего запоминающего устройства. В. Л. Евтеев

8990. Перспективы развития автоматических электронных вычислительных машин. Эйкен (The future of automatic computing machinery. Aiken Howard H.), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, **4**, 31—35, 221 (англ.; рез. нем.)

Популярный очерк. Отмечается, что одной из главных проблем в развитии новых автоматических электронных машин является производство магнитных запоминающих устройств с емкостью более чем 10^{10} двоичных чисел. Выделены различия и сходство между машинами для решения научных задач и машинами для обработки данных. В. Л. Евтеев

8991. Вычислительные устройства в Великобритании. Уилкинсон (Computing facilities in Great Britain. Wilkinson J. H.), Petroleum, 1957, **20**, № 1, 23—24 (англ.)

Кратко излагается история развития современных вычислительных машин. Приводятся данные первой электронной вычислительной машины ЭНИАК, построенной в США в 1946 г. и предназначенной первоначально для расчета баллистических таблиц. В машине работало 18 000 электронных ламп и 1500 реле. В запоминающем устройстве использовались электронные лампы и его емкость составляла 20 десятизначных десятичных чисел. Операция сложения занимала 200 *мксек*, умножения 2,8 *мксек*. Отмечается, что дальнейшее развитие вычислительных машин шло по пути их автоматизации, увеличения объема и надежности запоминающих устройств и повышения быстродействия. Первая вычислительная электронная машина в Англии демонстрировалась в Манчестерском университете; ее модернизация привела к созданию в 1949 г. в Кембридже вычислительной машины ЭДСАК, которая сыграла важную роль в развитии вычислительной техники в Великобритании. Сообщается, что первыми вычислительными машинами, изготовленными промышленностью, были СЕАК (SEAC) в США и Pilot ACE в Англии, которые были введены в действие в 1950 г. Отмечается, что до настоящего времени положение с коммерческим выпуском вычислительных машин в Англии неудовлетворительное. З. Д. Доброхотова

8992. Электронная вычислительная машина (Electronic computer), Shipbuild. and Shiping Rec., 1957, 89, № 5, 149 (англ.)

Сообщается, что в 1957 г. фирма „Берроуз Корпорейшн" (Лондон) намеревается выпустить малогабаритную вычислительную машину Е-101. Размеры новой машины—порядка размеров письменного стола. Она предназначена для решения простых задач, которыми невыгодно загружать большие машины. Распределительная входная панель позволяет вводить в машину числа, содержащие до 11 знаков; программа устанавливается на регистре с помощью контактных штырьков. Контрольная панель позволяет отлаживать программу, а также вносить в нее добавления и изменения в процессе вычисления. З. Д. Доброхотова

8993. Электронная вычислительная машина на вашем рабочем столе (An electronic computer at your desk), Engineering, 1956, 182, № 4737, 785 (англ.)

Приводятся основные данные малой электронной вычислительной машины Е-101 (РЖМат, 1955, 4028; 1956, 4940, 7714). Передача чисел между блоками машины и осуществление арифметических операций производятся в последовательно-параллельной форме. Поразрядно число передается в параллельней форме, а передача цифры в разряде осуществляется в последовательной форме, соответствующим числом импульсов от 0 до 9.

Сообщается, что умножение матрицы тридцатого порядка на вектор происходит за 15 мин., а решение системы линейных алгебраических уравнений с девятью неизвестными — за 10 мин. Н. Н. Поснов

8994. Численный метод приближенного построения контуров. Мейсон (The digital approximation of contours. Mason Robert M.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 4, 355—359 (англ.)

Приводится краткий обзор методов использования вычислительных машин для получения контуров (линий уровня). Сообщается об экспериментах по построению линий уровня, выполненных на электронной вычислительной машине „Нарек" (Narec) с использованием нового метода. Отличие нового метода состоит в том, что вычисление функций, определяющих нужный контур, производится не по всему двумерному пространству, а лишь вдоль этого контура. Выбор точек, в которых вычисляются значения функции, определяется итерационным процессом. При перемене знака разности между значением функции в данной точке $f(x_0 + m\Delta x, y_0 + n\Delta y)$ и установленным уровнем k, отмечаются значения координат точки, ближайшей к контуру; направление движения к следующей точке, в которой должно быть вычислено значение $f(x,y)$, изменяется на 90° по часовой стрелке — снаружи контура и против — внутри. Такое изменение направления происходит в каждой последующей точке до пересечения контура. Таким образом вычисляются только значения функции вблизи заданного уровня, и точность воспроизведения контура определяется шагом Δx и Δy. Машина строит автоматически только один замкнутый контур; перестройка на другой контур или изменения величины уровня k производится с помощью оператора. З. Д. Доброхотова

8995. Автоматическое программирование для вычислительных машин. Хоппер (Automatic programming for computers. Hopper Grace Mur-

r a y), Punched Card Annual, 1956—1957, 5, 197—198 (англ.)

Статья общего характера. Автор кратко характеризует основные этапы решения задачи на машине: анализ задачи, программирование, кодирование, отладка (debugging), счет, анализ результатов. Вследствие того, что большинство американских вычислительных машин являются одноадресными машинами без „накопителя стандартных программ" и работают в системе фиксированной запятой, автор вкладывает в термин „программирование" смысл, несколько отличный от употребляемого в нашей литературе. Информация о задаче после программирования по степени детализации примерно соответствует готовой программе, составленной для трехадресной машины типа БЭСМ или „Стрела", но записанной в буквенных обозначениях. Получение окончательного вида программы в машинных командах автор относит к кодированию. К нему же относится ввод и „привязка" используемых подпрограмм. Существующие средства автоматизации составления программ автоматизируют главным образом кодирование и лишь частично программирование. Кратко списываются основные типы программирующих программ: интерпретирующих, компилирующих и генерирующих. Подчеркивается, что автоматизация программирования резко сокращает время отладки задачи. Указывается, что фирмой „Ремингтон Ранд" исследования по автоматизации программирования начались в 1949 г.; уже в 1950 г. для машины УНИВАК были созданы первые типы программирующих программ. Отмечается эффективность применения компилирующей системы А-2 (РЖМат, 1956, 6920). Указывается, что фирмой разрабатывается компилирующая система БИОР (BIOR), позволяющая автоматически находить ошибки в информации о задаче. А. П. Ершов

8996. Применение электронных машин в чистой математике. Миллер (Applications of electronic machines in pure mathematics. Miller J. C. P.), Automat. Digital Comput. London, 1954, 160—164. Discuss. 164—165 (англ.)

Обзор работ преимущественно английских математиков, посвященных применению вычислительных машин для решения задач „чистой" математики. К 1954 г. были построены программы решения следующих задач: действия над бесконечными степенными рядами; построение всех элементов группы, заданной определяющими соотношениями между образующими группы; определение порядка полученной таким образом группы и нахождение ее таблицы умножения; табулирование некоторых специальных теоретико-числовых функций, в частности дзета-функции для проверки гипотезы Римана; нахождение общих решений некоторых диофантовых уравнений; нахождение простых чисел и определение разложений составных чисел на простые множители, а также ряд других аналогичных проблем. А. П. Ершов

8997. Запоминающее устройство на магнитных сердечниках и полупроводниковых триодах (Transistorized magnetic core memory), Computers and Automat., 1957, 6, № 1, Part 1, 26—27, 36 (англ.)

Описываются схемы на полупроводниковых триодах, предназначенные для записи и считывания информации в запоминающем устройстве на магнитных сердечниках, основанном на принципе совпадения токов. Приводится полная блок-схема такой системы запоминающего устройства, предназначенного для использования в самолетном цифровом вычислительном устройстве. В канале записи информации используется три типа усилителей на полупроводниковых триодах: усилитель запрета разряда, усилитель установки ключа выборки строки или колонки матрицы и усилитель записи. Так как для перемагничивания сердечника требуется импульс 0,32 ампервитка длительностью не менее 4 *мксек*, то усилители записи и запрета разряда при одновитковых обмотках сердечников рассчитаны так, чтобы обеспечивать ток в импульсе записи не менее 160 *ма* и длительностью не менее 4 *мксек*. От усилителя установки ключа выборки требуется импульс тока 70 *ма* и длительностью не менее 5 *мксек*, благодаря многовитковым обмоткам переключающих сердечников. Схемы этих трех типов усилителей канала записи одинаковы и отличаются лишь номиналами элементов и питающих напряжений в соответствии с требуемыми их выходными токами. Приводится схема усилителя запрета разряда, представляющая собой двухкаскадный усилитель с непосредственной связью, в первом каскаде которого стоит маломощный полупроводниковый триод, а во втором — мощный, причем нагрузка (обмотка сердечников) включена в коллекторную цепь этого последнего каскада. Приводится также схема усилителя считывания совместно с выходной схемой совпадения, обеспечивающей восстановление считываемого сигнала во времени. Основными требованиями к этому усилителю являются: выходной ток около 1 *ма* и однополярный выходной сигнал при наличии на входе разнополярных сигналов. Это обеспечивается двухкаскадным усилителем, где первый полупроводниковый триод имеет такое смещение, что усиливает как положительные, так и отрицательные входные сигналы, а между каскадами имеется мостовая выпрямительная схема, создающая на входе нормально запертого второго каскада отпирающие отрицательные импульсы независимо от полярности входных сигналов. Усиленные считываемые сигналы подаются с выхода второго каскада на синхронизирующую схему совпадения, состоящую из двух нормально проводящих триодов, с выхода которой снимаются восстановленные во времени считываемые сигналы. Описываемое запоминающее устройство имеет емкость 1024 18-разрядных двоичных чисел и состоит из 18432 запоминающих сердечников, 48 переключающих сердечников, 98 маломощных и 62 мощных полупроводниковых триодов. Полная потребляемая мощность системы — меньше 50 *вт*.

Б. И. Стрелков

8998. Эшелонированные системы запоминающих устройств. Клейден (Echelon storage systems. Clayden D. O.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 117—118. Discuss., 118—120 (англ.)

На примере машины ACE Pilot рассматриваются общие соображения наиболее экономичного совмещения в вычислительной машине запоминающих устройств с разным временем выборки данных. А. Б. Залкинд

8999. Запоминающие устройства в электронных вычислительных машинах. Кумс („Memory" systems in electronic computers. Coombs A. W. M.), Sci. and Culture, 1956, 22, № 5, 249—256 (англ.)

Приводятся общие характеристики вычислительных машин непрерывного действия и цифровых вычислительных машин. Обосновывается необходимость запоминающих устройств в последних и формулируются требования к таким устройствам. Показываются преимущества запоминания в двоичной системе. Приводятся классификация по методу запоминания и подробное изложение принципа действия основных видов запоминающих устройств: магнитного барабана, линий задержки (электрических, магнитострикционных, звуковых), электроннолучевых трубок, магнитной проволоки и ленты, триггерных ячеек, ферритовых сердечников. З. Д. Доброхотова

9000. Выходное быстродействующее устройство, работающее со скоростью 10 000 знаков в секунду (Stromberg — Carlson; swift output: 10,000 characters per second). Computers and Automat., 1956, 5 № 12, 28 (англ.)

Сообщение фирмы „Стромберг — Карлсон" (Stromberg — Carlson) о выпуске быстродействующего выходного устройства (модель 100). Устройство позволяет за 30 сек. записать информацию, равную по объему книге в 300 страниц. Принцип действия устройства основан на воспроизведении и накоплении двоичных знаков на экране электроннолучевой трубки — характрона, диаметром 175 *мм*, и фотографировании их на стандартную киноленту. На экране может размещаться 6 500 знаков (65 строк по 100 знаков в каждой). Для заполнения экрана полностью требуется $^2/_3$ сек.; однако поскольку записывать такой объем обычно не требуется, фотографирование экрана может вестись с предельной скоростью камеры 10 кадров в 1 сек. При максимальной скорости съемки обработка пленки должна производиться отдельно от устройства. При фотографировании экрана через каждые 2 сек. устройство обрабатывает пленку автоматически. Указывается, что сложность устройства оправдана, так как стоимость рабочего времени электронной вычислительной машины довольно велика и равна приблизительно 300 долл. за час для машины стоимостью 1,5 млн. долл. А. И. Щурев

9001. Устройства ввода и вывода вычислительных машин. Дейвис (Input and output. Davies D. W.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 102—114. Discuss., 114—116 (англ.)

Подробный обзор входных и выходных устройств универсальных цифровых вычислительных машин. Приводятся характеристики основных видов входных и выходных устройств на примере машин, построенных в США, а также рассматривается возможность использования их в качестве дополнительных запоминающих устройств. Рассмотрены возможные варианты синхронизации работы этих устройств с вычислительной машиной, а также контроль и методы обнаружения ошибок. Основные характеристики отдельных устройств уже освещались в литературе. А. Б. Залкинд

9002. ЭРА. Электронный читающий автомат. (ERA. An Electronic Reading Automation), Electronic Engng, 1957, 29, № 350 (англ.)

Автомат, разработанный фирмой „Солартрон электроник групп" (Solartron Electronic Group), предназначен для считывания цифр, букв и других знаков, напечатанных обычным образом. Выходной сигнал автомата можно подавать непосредственно на вход вычислительной машины. Основная модель предназначена для считывания цифр от 0 до 9 со скоростью 120 знаков в 1 сек. Отмечается, что число знаков и скорость считывания могут быть легко увеличены.

Приводится упрощенная блок-схема автомата и излагается принцип действия. На экране электронно-лучевой трубки создается растр, который проектируется фотообъективом на „читаемый" объект. Отраженный свет, промодулированный по яркости (из-за разности коэффициентов отражения белой и зачерненной бумаги), попадает на фотоумножитель, который дает на выходе электрический сигнал, модулированный по амплитуде. Этот сигнал усиливается и ограничивается. Затем сигналы через электронный переключатель подаются на запоминающее устройство емкостью 100 ячеек. После считывания одной цифры заполняются все 100 ячеек. По состоянию запоминающего устройства дешифраторное устройство определяет прочитанный знак.

Описываются способы контроля правильности считывания. Автомат выдает импульсы, появляющиеся на клеммах, соответствующих цифрам от 0 до 9.

З. Д. Доброхотова

9003. Автоматическое преобразование данных. Клейн, Вильямс, Морган (Automatic data reduction. Klein Martin L., Williams Frank K., Morgan Harry C.), Instrum. and Automat., 1956, 29, № 9, 1767—1772 (англ.)

Отмечается, что в ряде случаев возникает необходимость регистрации большого количества данных, использующихся затем в расчетах. Например, в задаче определения оптимального профиля модели в аэродинамической трубе число точек, в которых измеряется давление, достигает нескольких сотен. В таких случаях проблема преобразования данных заключается в их считывании, установлении масштаба и в подстановке их в формулы для вычислений. Обычно данные накапливаются в форме графиков, представляющих функции измеряемых величин во времени. Процесс преобразования данных осуществляется после завершения эксперимента и может быть разбит на следующие основные ступени: 1) считывание данных и превращение их в числа; 2) выбор масштаба; 3) внесение поправок на нелинейность; 4) запись исправленных данных в численной форме; 5) подстановка данных в формулы для вычислений. Выполнение этой работы оператором ненадежно и мало эффективно. Указываются возможности автоматизации отдельных этапов преобразования.

Другой автоматический метод преобразования данных заключается в преобразовании измеряемых величин одновременно с ходом эксперимента.

Метод преобразования данных в числа может быть любым, причем точность 0,1% вполне достаточна.

Рассматриваются методы записи данных для последующей их обработки на вычислительных машинах и подчеркиваются преимущества записи на кинопленке.

Разбирается система автоматического преобразования данных по ходу эксперимента ИДИОТ фирмы „North American". Были разработаны три варианта этой системы в зависимости от типа кодирования данных: временного, с помощью обратной связи и пространственного. Их характеристики приведены в таблице:

	Тип I	Тип II	Тип III
Число каналов	8	128	256
Точность	1,0%	0,1%	0,5%
Способ декодирования	Временной	Обратная связь	Трубка типа моноскоп (пространственный)
Скорость преобразования	2500 в 1 сек.	100 000 в 1 сек.	5 000 000
Запись	Кинопленка	Магнитная лента	Нет
Уровень входного сигнала	100 *мв* (макс.)	100 *мв* (макс.)	1,0 *в*

В качестве примера рассматривается система с временным кодированием (тип I). В этой системе скорость опрашивающего устройства — 1000 шагов в 1 сек. Из одного канала за время 0,008 сек. на вход системы с запоминающей схемы подается постоянное напряжение, соответствующее среднему значению величины, измеренному за 5 *мсек*. Последовательная во времени серия импульсов, отвечающая измеренной величине, с помощью запоминающего устройства преобразуется в серию импульсов, параллельных во времени, которые подаются на блок из 13 неоновых лампочек. Запись осуществляется фотографированием с помощью кинокамеры вспышек неоновых лампочек. В системе предусмотрена внутренняя проверка точности преобразования. Приводится блок-схема и краткое описание устройства для считывания данных, записанных

на кинопленке, и введения их в вычислительные машины.

Указывается, что система автоматического преобразования данных может быть использована в схемах автоматического управления технологическими процессами. З. Д. Доброхотова

9004. Быстродействующая система для обработки данных. Клейн, Раш, Морган (A high-speed data processing system. Klein M. L., Rush R. B., Morgan H. C.), Electronic. Engng, 1957, **29**, № 350, 158—163 (англ.)

Приводится блок-схема, а также описание схем отдельных узлов системы IDIOT, предназначенной для обработки данных измерений. В системе предусматривается от 20 до 100 независимых входных каналов, причем диапазон измеряемых напряжений в каждом канале — до 100 *мв*. Каналы поочередно подключаются к системе с помощью специального ртутного переключателя, действующего со скоростью 10 000 переключений в 1 сек. После усиления измеряемое напряжение фиксируется на уровне, соответствующем его значению в начале интервала измерения, и сохраняет свою величину в течение 100 *мксек*. За это время кодирующее устройство вырабатывает десятизначное двоичное число, отвечающее уровню измеряемого напряжения. Кодирующее устройство представляет собой логическую схему с постоянной программой, осуществляющую компенсацию измеряемого напряжения с помощью суммирования или вычитания стандартных последовательно уменьшающихся напряжений, находящихся в отношении двоичных чисел, наибольшее из которых отвечает половине значения полной шкалы. Частота следования импульсов в логической схеме 120 *кгц*; управляются они сигналами с ртутного переключателя. В системе предусмотрена проверка точности преобразования уровня напряжения в число; в случае большого расхождения вырабатывается сигнал ошибки. Числа, отвечающие значению измеряемой величины, номеру канала и сигналу ошибки, подаются на промежуточное запоминающее устройство на электронных лампах, а затем записываются на 8-канальную магнитную ленту в виде 18-значных двоичных чисел. Лента длиной ~730 *м* содержит до 4,8 млн. таких чисел. Плотность записи на ленте 20 *имп/мм*. Скорость ленты 1,5 *м/сек*. После записи на ленте устройство, фиксирующее уровень, кодирующая схема и промежуточная память освобождаются и готовы к обработке данных со следующего канала. Специальное устройство предназначено для преобразования данных, записанных на магнитной ленте, к виду, пригодному для их ввода в вычислительную машину ИБМ 704.

Сообщается, что точность всей системы составляет 0,1% при входном напряжении 100 *мв*. Отмечается возможность уменьшения скорости опроса входных каналов и использования системы для продолжительных измерений. З. Д. Доброхотова

Примечание редакции. Данная система, по-видимому, является одним из вариантов системы, описанной в реф. 9003, а именно вариантом II.

9005. Двоично-десятичный код, в котором следующие друг за другом числа отличаются лишь значением одного разряда, для двухдорожечной коммутации. Томпкинс (Unit-distance binary-decimal codes for two-track commutation. Tompkins Howard E.), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, EC-5, № 3, 139 (англ.)

Код, предложенный Липпелом (Lippel) для преобразования положения вала в десятичное число, требует для получения каждого разряда десятичного числа всего две дорожки. Три двоичных разряда из четырех, представляющих искомый десятичный, снимаются при этом с одной коммутирующей дорожки, которая имеет соответственно сдвинутые на определенный угол три токосъемные щетки. Четвертая щетка используется на второй коммутационной дорожке.

Однако в общем случае такой код может давать динамические ошибки преобразования, избежать которые можно, лишь увеличив число токосъемных щеток до восьми.

Автор предлагает модификацию кода Липпела, в котором следующие друг за другом числа отличаются лишь значением одного двоичного разряда. Семейство таких кодов может быть получено при использовании карт, предложенных Витчем (E. W. Veitch) и Карнау (M. Karnaugh). Всего имеется 1920 разновидностей такого кода. Приводятся правила для преобразования такого кода в обычные двоично-кодированные десятичные коды типа 5—2—2—1 или 8—4—2—1.

А. Б. Залкинд

9006. Модель полупроводникового триода. Лушер, Шокар (Un simulateur de transistors. Luscher J., Choquard P.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955, Bruxelles, 1956, 165—169 (франц.; рез. англ.)

Рассматриваются физические процессы в плоскостном полупроводниковом триоде. На основании закона распределения Больцмана и уравнения диффузии Шокли показана возможность построения модели явлений инъекции носителей зарядов через эмиттерный переход, диффузии их и рекомбинации.

Эмиттер и база триода моделируются при помощи длинных линий с сосредоточенными постоянными, а переходы эмиттер — база и база — коллектор триода — при помощи усилителей и дополнительных источников питания. Распределение плотности дырок в эмиттере (для триода типа *n-p-n*) и электронов в базе моделируется распределением потенциала вдоль соответствующей линии эквивалентной схемы. Ширина базы имитируется длиной линии. Небольшое усложнение приведенной схемы позволяет учитывать активное сопротивление базы, а также емкость коллекторного перехода, зависящего от напряжения на коллекторе.

Схема предназначена для исследования работы триодов при малых уровнях сигналов. Схема позволяет исследовать различные свойства триодов, используемых в специальных условиях применения, а также позволяет имитировать желаемые свойства триода соответствующими изменениями величин параметров схемы с тем, чтобы по полученным значениям параметров создавать новые триоды.

Приведены экспериментальные данные сравнения работы модели и моделируемого триода.

В. К. Зейденберг

9007. Плоскостной полупроводниковый триод в качестве счетного элемента. Ч. I. Вулфендейл, Морган, Стивенсон (The junction transistor as a computing element. Part I. Wolfendale E., Morgan L. P., Stephenson W. L.), Electronic Engng, 1957, **29**, № 347, 2—7 (англ.)

На основании эквивалентной схемы рассматривается физика работы плоскостного полупроводникового триода в трех режимах: отсечки, насыщения и в переходном состоянии. Рассматриваются эффект накопления дырок, а также основные схемы переключения на двух плоскостных триодах с коллекторно-базовыми связями: с одним и с двумя устойчивыми состояниями и свободно идущий мультивибратор. Приводятся расчетные формулы и экспериментальные данные о времени переключения при работе с низкочастотными и высокочастотными триодами в конкретных схемах.

В. К. Зейденберг

9008. Электронное моделирующее устройство Национальной физической лаборатории. Блейк (The N. P. L. electronic simulator. Blake D. V.),

Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955, Bruxelles, 1956, 42—45 (англ.; рез. франц.)

Описывается универсальное электронное моделирующее устройство Национальной физической лаборатории, имеющее в своем составе счетно-решающие блоки для выполнения как линейных, так и нелинейных математических операций. Набор уравнений моделируемой системы производится на общем коммутационном поле. Моделирование может производиться как в натуральном, так и в ненатуральном масштабе времени. Предусмотрен ввод возмущений как в виде прямоугольной волны напряжения, так и в виде синусоидального напряжения или любого случайного возмущения. При периодизации решение воспроизводится на экране электронолучевой трубки с целью исследования влияния ряда параметров на характер переходного процесса. При моделировании с периодизацией до 50 периодов в секунду возможна регистрация решения обычным стандартным самописцем с помощью специальной схемы, состоящей из устройства для импульсной модуляции и запоминающего устройства на конденсаторах. Приводятся: схема моделирования механической системы, состоящей из мотора, передающего вращающий момент на нагрузку через редуктор с мертвым ходом; схема для получения фазового сдвига; схема воспроизведения резонансной цепи с использованием стандартных элементов модели. Библ. 5 назв. В. Ш. Беркович

9009. Новое большое моделирующее устройство Центра авиационных исследований. Варшавский (WADC's new large analog computer. Warshawsky L. M.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 88—90. Discuss. 90—91 (англ.; рез. франц.)

Излагаются принципы построения большой моделирующей установки, находящейся в стадии разработки, которую Центр авиационных исследований (Wright Air Development center) в Дайтоне, штат Огайо, предполагает использовать для целей анализа и синтеза авиационных систем вооружения, а также для решения других инженерных задач для ВВС США. Устройство включает в себя более 500 решающих усилителей с соответствующим числом нелинейных решающих элементов. Решающие усилители имеют коэффициент усиления 60 млн. Сопротивления и конденсаторы, используемые в качестве входных цепей и цепей обратной связи, имеют точность 0,01%. Конструктивно модель будет выполнена в виде четырех основных отдельных секций и одной дополнительной секции. Программирование задач предполагается осуществлять на съемных панелях, на которых производится коммутация с помощью шнуров. Для обнаружения ошибок при наборе задач предусматривается специальное устройство для автоматической проверки качества соединений на коммутационных панелях. Предусматривается возможность автоматического контроля счетно-решающих блоков путем регистрации всех переменных с помощью специального регистрирующего устройства. С помощью этого же устройства может быть произведена автоматическая установка всех 700 десятиоборотных спиральных потенциометров, входящих в состав устройства, и набор нелинейных функций на диодных преобразователях. Предусматривается система автоматической индикации работы счетно-решающих элементов в оптимальном диапозоне частот и уровней напряжения, а также удобная для эксплуатации система сигнализации достижения выходными напряжениями решающих элементов пределов линейности их характеристик.

Б. Ш. Беркович

9010. Моделирующее устройство для изучения тепловых потоков (Analogue for heat flow studies), Engineering, 1957, 183, № 4749, 343 (англ.)

Сообщается о пуске в Лондонском университете моделирующего устройства, предназначенного для решения задач, связанных с конструированием паровых и газовых турбин. Машина представляет собой электрическую цепь из сопротивлений, моделирующую уравнение в конечных разностях, которым заменяется дифференциальное уравнение решаемой задачи. Температура представляется напряжением, пространственные характеристики — схемой параллельных сопротивлений, а тепловые константы — параллельными и последовательными сопротивлениями. Отмечается, что использованный метод подобен некоторым численным методам, но более гибок. После каждого цикла регулировка потенциометров осуществляется сервомеханизмом. После установки начальных условий машина действует полностью автоматически. Напряжения в различных точках цепи, зависящие от угла поворота потенциометров, преобразуются в код с помощью реле и записываются в конце каждого цикла вычислений электромеханическим регистратором. З. Д. Доброхотова

9011. Сетка из сопротивлений для решения уравнения Пуассона. Хехтель (Ein Widerstandsnetzwerk zur Lösung der Poissonschen Gleichung. Hechtel Richard), Telef.-Röhre, 1955, № 32, 38—46 (нем.; рез. англ., франц.)

Описывается сетка из сопротивлений для моделирования поля с осевой симметрией, описываемого уравнением Лапласа или Пуассона. В случае уравнения Пуассона определение поля производится методом последовательных приближений. При этом влияние пространственного заряда моделируется источниками тока, питающими различные узлы сетки. В устройстве использовались сопротивления точностью $\pm 0{,}2 \div 0{,}4\%$. Общее число узлов сетки составляет 1040. Вывод расчетных формул дан в приложении. Библ. 7 назв.

Е. Ф. Сабаев

9012. Электронная моделирующая вычислительная техника для решения проблем тригонометрии. Робинсон (An electronic analog computing technique for the solution of trigonometric problems. Robinson A. S.), IRE Trans. Electronic Comput., 1955, **4**, № 3, 95—101 (англ.)

Описываются решения тригонометрических задач при помощи моделирующих устройств с использованием постоянной несущей частоты, демодуляторов, модуляторов, сопротивлений, конденсаторов и операционных усилителей с обратной связью. Решения получаются в виде амплитудных и фазовых изменений напряжений относительно эталонной несущей частоты. Описывается типовое моделирующее устройство, работающее на частоте 400 периодов и дающее погрешность 0,2%. Статья иллюстрирована принципиальными схемами отдельных узлов моделирующих устройств и их блок-схемами.

Г. К. Кузьминок

9013. Влияние полосы пропускания частот на решения, проводимые на моделирующих вычислительных устройствах. Кайзер, Мак-Глинн (The effect of bandpass limitations on analog computer solutions. Kaiser Joachim, Jr., McGlinn Edward J.), Industr. Math., 1955, **6**, 7—15 (англ.)

Большинство простых систем дифференциальных уравнений может быть записано в виде $\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2 y = F(t)$, и их решениям, таким образом, присущи характеристики колебательных процессов. Многие сложные системы представляют собой сочетания из вышеобозначенных простых дифференциальных уравнений. Исходя из этого, авторы приводят анализ влияния полосы пропускания частот основных элементов моделирующих устройств (усилителей, интеграторов) на полученные с их помощью решения рассматриваемых дифференциальных уравнений. Полоса пропускания частот

характеризуется коэффициентом затухания решения. Выводится зависимость коэффициента затухания ξ_e, полученного при решении на моделирующем устройстве, от коэффициента затухания ξ, полученного путем аналитического решения. Дается метод (графики) определения ошибок, связанных с ограничениями, которые вносит полоса пропускания усилителя или интегратора в моделирующих устройствах. На примере авиационного тренажера рассмотрено влияние полосы пропускания сервомеханизмов, которые обычно используются для множительных и синусно-косинусных устройств, на ограничения в применении моделирующих устройств этого типа. Показано, что полоса пропускания электромеханических сервомеханизмов может стать причиной того, что теоретически стабильная система, будучи имитированной моделирующим устройством, становится нестабильной. Библ. 3 назв. Г. К. Кузьминок

9014. Новые вычислительные блоки для механических моделирующих устройств. Эрисман (New computing components for mechanical analogue computers. Erisman T. L.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 262—263. Discuss., 263 (англ.; рез. франц.)

Излагаются основные технические характеристики двух новых решающих блоков электромеханического моделирующего устройства — дискового интегратора и нелинейного блока функций одной переменной с фотоследящей системой. Рассматриваемые устройства отличаются от известных более высокой точностью и лучшими эксплуатационными данными. Г. М. Петров

9015. Схемы для умножения непрерывных величин, использующие переключательные полупроводниковые триоды. Чжэнь, Деккер (Analogue multiplying circuits using switching transistors. Chen K., Decker R. O.), IRE Convent. Rec., 1956, 4, № 4, 74—80 (англ.)

Приведены теоретические обоснования, схемы и экспериментальные данные множительных устройств непрерывного действия, использующих переключательные полупроводниковые триоды. В устройствах использована модуляция импульсов напряжения. В предлагаемом двухквадрантном множительном устройстве частота следования прямоугольных импульсов пропорциональна одному из перемножаемых напряжений, амплитуда импульсов пропорциональна другому из перемножаемых напряжений; при стандартной форме импульсов (экспоненциальной) средний уровень выходного напряжения пропорционален произведению двух перемножаемых напряжений. Двухквадрантность объясняется тем, что при перемене знака первого из перемножаемых напряжений схема перестает работать. В предлагаемом четырехквадрантном множительном устройстве частота следования импульсов поддерживается постоянной; амплитуда и ширина импульсов пропорциональны, соответственно, одному и другому из перемножаемых напряжений. В этом устройстве также средний уровень выходного напряжения пропорционален произведению перемножаемых величин. Оба предложенных устройства обеспечивают простоту конструкции (меньше 6 активных элементов), точность в 1% в широком диапазоне выходной величины, быструю реакцию (меньше 1) *мксек*, хорошую заменяемость любых деталей на новые без снижения нормальной точности и механическую прочность. В. К. Зейденберг

9016. Перемножающее устройство непрерывного действия, использующее эффект Холла. Лёфгрен (Analog multiplier based on the Hall effect. Lofgren Lars), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 11—115, Discuss., 115 (англ.; рез. франц.)

Дается подробный анализ задачи построения перемножающего устройства для электромоделирующих установок на базе эффекта Холла. Основная часть устройства представляет собою германиевую пластину, через которую пропускается электрический ток. Пластина помещена в магнитное поле, перпендикулярное направлению тока. На концах пластины появляется электрическое напряжение, которое приблизительно пропорционально произведению тока на величину индукции магнитного поля. Для обеспечения необходимой точности в перемножающем устройстве использована система с глубокой отрицательной обратной связью для преобразования одного из сомножителей, представленного постоянным напряжением, в магнитную индукцию. Электрическая схема перемножающего устройства в окончательном варианте имела 8 электронных ламп.

Экспериментальный образец блока перемножения, построенный на основе разработанной схемы, имел следующие технические характеристики: а) минимальный диапазон изменения входных величин $\pm 0{,}4$ *в*, максимальный ± 40 *в*; б) диапазон изменения выходной величины ± 40 *в*; в) погрешность в статическом режиме работы не более 0,1% (к шкале 40 *в*); г) погрешность в динамическом режиме не превышает 0,2% при изменении входной величины с частотами до 10 *кгц* для токового канала и со скоростью 10^5 *в·гц* для канала напряжения; д) максимально допустимое значение температуры $+35°$ С. Г. М. Петров

9017. Делительное устройство непрерывного действия, использующее принцип интегратора Миллера. Гордон (An analogue divider employing the principle of the Miller integrator. Gordon R. L.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 98—100. Discuss., 100 (англ.; рез. франц.)

Излагается принцип построения одноквадрантного делительного устройства для электромоделирующих установок на основе двух интеграторов Миллера. С помощью одного интегратора, работающего в автоколебательном режиме в схеме санатрона, образуются импульсы, длительность которых t_1 обратно пропорциональна величине делителя E_D. С помощью второго интегратора, включаемого импульсами первого интегратора на время t_1, образуется пилообразное напряжение с крутизной, пропорциональной делимому E_N, в результате чего изменение анодного напряжения второго интегратора за время t, запоминаемое типовым вольтметром, оказывается пропорциональным частному E_N/E_D. На данном принципе был построен образец делительного устройства со следующими данными: а) погрешность в статическом режиме 0,5%; б) диапазон изменения входных величин $0 \leqslant E_n \leqslant 70b$, $15b \leqslant E_D \leqslant 70b$; в) рабочая частота 10 *кгц*. Г. М. Петров

9018. Новое электронное запоминающее устройство для моделирующих установок. Бергман (A new electronic analogue storage device. Bergman G. D.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955, Bruxelles, 1956, 92—94 (англ.; рез. франц.)

Исходя из быстродействия моделирующего устройства, работающего с периодизацией (не менее 50 решений в 1 сек.), автор утверждает, что запоминающее устройство, предназначенное для работы с такой моделью, должно обеспечить запоминание процесса длительностью в 1 *мсек*, в течение 1 *мсек* с последующим его воспроизведением для использования в дальнейших шагах вычислений. Описывается принцип действия запоминающего устройства, удовлетворяющего этим требованиям, основанный на свойстве сохранения электростатического заряда экраном электроннолучевой трубки. Схема импульсной модуляции для такого устройства вносит ошибку порядка 1% от максимального выходного напряжения (± 20 *в*). Минимально отсчитывае-

мое расстояние между линиями растра — порядка 1 *мм*. Использовавшаяся трубка имела диаметр экрана 100 *мм*. Выходное напряжение имело фон, достигавший величины порядка 60 *мв*. Б. Ш. Беркович

9019. Более точные входные функции в моделирующих устройствах. Киф (Truer input functions in electronic analog computers. Keefe T. J, Jr), Computers and Automat., 1955, **4**, № 1, 27—30 (англ.)

Изучение динамических свойств механических систем на моделирующих устройствах требует преобразования входного механического сигнала в сигнал электрический. Существующие преобразователи только аппроксимируют непрерывные сигналы, что понижает точность анализа. Предлагаются два метода, с помощью которых „электрическая" функция может быть получена почти точно совпадающей с „механической" входной функцией.

Первый метод состоит в том, что на моделирующем устройстве набираются две модели преобразователя. Аппроксимированная входная функция снимается с реального преобразователя и подается на вход первой модели преобразователя. Регулировкой модели преобразователя „исправляют" входную функцию до точного совпадения с требуемой. Полученную точную входную функцию подают на вход второй модели преобразователя, с которой снимают все требуемые параметры.

Второй метод применяется для входных функций, которые нельзя получить на преобразователе. Однако такие функции можно легко получить с механической системы пружина—масса, поэтому автор дополняет первый метод моделью данной системы, которую включает между выходом преобразователя и входом модели преобразователя. Преобразователь дает одиночные импульсы силы, модель системы пружина—масса регулируется для выдачи сигнала, более или менее совпадающего с желаемой входной функцией; далее устройство работает аналогично первому методу.

Приводятся блок-диаграмма решающих блоков для первого метода и сравнительные осциллограммы.

П. В. Тихонов

9020. Автоматические вычислительные машины. Смак (Automatic computers. Smuck W.), Engng J., 1957, **40**, № 2, 138—140 (англ.)

Приводится краткий обзор развития вычислительной техники. Рассматриваются возможности счетных машин, использующих перфокарты.

В настоящее время большое применение получают машины по обработке данных. В качестве примера приводятся некоторые данные машины ИБМ-705. Емкость запоминающего устройства машины, выполненного на магнитных сердечниках, составляет 40 000 цифр, причем время выбора составляет 17 *мксек*. За одну минуту может быть выполнено: 504 000 сложений или вычитаний, 50 000 умножений, 24 000 делений, 1 765 000 логических операций. Информация в машину может быть введена либо с клавишного вводного устройства с пульта управления, либо с перфокарт со скоростью 20 000 знаков в 1 мин., либо с магнитной ленты со скоростью 15 000 знаков в 1 сек. Выходные данные могут быть записаны печатающим устройством со скоростью 900 знаков в 1 мин., со скоростью 8 000 знаков в 1 мин. на перфокартах, 15 000 знаков в 1 сек. на магнитной ленте и со скоростями 18 000, 60 000 и 120 000 знаков в 1 мин. на специальном печатающем устройстве.

Указывается, что разработка электронных машин такого типа является важным этапом на пути создания полностью автоматизированных „контор". Отмечается, что машины позволят широко использовать теоретическую математику для решения различных хозяйственных проблем и будут играть важную роль в управлении предприятиями. З. Д. Доброхотова

9021. Электронные вычислительные машины. Лебедев С. А. В сб.: Сессия АН СССР по научн. пробл. автоматиз. произ-ва, 1956, Пленарн. заседания. М., АН СССР, 1957, 162—180

Доклад на сессии Академии наук СССР. Рассмотрены пути повышения скорости и надежности работы электронных вычислительных машин и их узлов.

Рассматриваются принципы действия, преимущества и недостатки запоминающих устройств: 1) построенных на ферритовых сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса типа Z и матричного типа, работающего по принципу сложения двух токов; 2) построенных на сегнетоэлектриках (с прямоугольной формой петли диэлектрического гистерезиса) в сочетании с полупроводниковыми элементами; 3) построенных на магнитострикционных линиях задержки с использованием эффекта магнитострикции для получения и детектирования ультразвуковых колебаний. Дается описание и принцип действия динамического триггера с запоминающей емкостью и его различных модификаций. Приводятся схемы сумматоров на триггерных и логических схемах. При последовательном включении логических элементов их общее время запаздывания растет, и это снижает скорость работы вычислительной машины. Схемы арифметического устройства при чисто параллельном включении логических элементов настолько сложны, что практически их невозможно выполнить. Для увеличения быстродействия машины нужно стремиться к тому, чтобы ее арифметическое устройство по возможности имело большее число параллельно включенных логических схем, а в последовательных цепях имело элементы с возможно меньшим запаздыванием. Показаны примеры схем сумматоров с уменьшенным числом последовательно включенных логических элементов в цепочке переноса. Поднять общую скорость машины можно и за счет сокращения операций сдвига при выравнивании порядков и нормализации результатов в машинах с плавающей запятой. Рассмотрены наиболее рациональные, с точки зрения сокращения времени, методы выполнения операции умножения. Повышение скорости работы машины может быть осуществлено за счет совмещения по времени выполнения ряда логических действий с непосредственным выполнением арифметических действий, а также путем совмещения самих операций. Например, арифметические действия с обращением к запоминающему устройству, вызов команд с вызовом чисел по двум независимым каналам и т. п. Рассматриваются способы сокращения времени обращения к запоминающему устройству. Наконец, для повышения скорости решения некоторых особо трудоемких задач, например задач математической физики, возможна организация параллельной работы нескольких вычислительных машин или параллельной работы нескольких отдельных устройств, например запоминающих устройств. При этом необходимо общее дополнительное устройство управления и устройства для передачи кодов чисел из одной машины в другую. Поднимается вопрос о стандартизации отдельных элементов и узлов электронных вычислительных машин и организации промышленного их изготовления. Эти мероприятия значительно облегчат создание новых типов вычислительных машин и будут способствовать построению специализированных машин.

Г. К. Кузьминок

9022. Перспективы применения управляющих машин в автоматизации. Брук И. С. В сб.: Сессия АН СССР по научн. пробл. автоматиз. произ-ва, 1956. Пленарн. заседания. М., АН СССР, 1957, 131—148. Дискус., 148—161

Доклад на сессии Академии Наук СССР.

Дается краткий обзор развития автоматизации и соображения об использовании вычислительных машин для автоматизации производственных процессов

и управления другими машинами. Указываются некоторые возможные применения управляющих машин в народном хозяйстве. Г. К. Кузьминок

9023. Математические вопросы теории счетных машин. Келдыш М. В., Ляпунов А. А., Шура-Бура М. В. В сб.: Сессия АН СССР по научн. пробл. автоматиз. произ-ва, 1956. Пленарн. заседания, М., АН СССР, 1957, 100—130. Дискус., 148—161

Доклад на сессии Академии наук СССР. Дается описание и принципы построения как моделирующих устройств, так и цифровых машин. Приводятся их преимущества и недостатки. Рассматриваются принципы программирования и приводятся некоторые примеры. Г. К. Кузьминок

9024. Вычислительные машины и форма (Gestalt). Винер (Les machines à calculer et la forme (Gestalt). Wiener N.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, **37**, 461—463. Discuss., 473 (франц.)

Общие соображения о возможности при помощи вычислительных машин „узнавать" форму или, по крайней мере, то обобщение формы, не зависящее от соотношения размеров и ориентации предмета, которое немецкие психологи называют словом „Gestalt" (образ, вид). В. П. Кузнецова

9025. Вклад электронных вычислительных машин в автоматизацию. Соваж (L'apport des calculateurs électroniques à l'automatisme. Sauvage André), Automatisme, 1957, **2**, № 1, 20—25 (франц.)

Популярная статья с небольшим числом простых примеров, в первой половине которой приводятся краткие сведения об устройстве и работе электронных вычислительных машин, а во второй половине рассказывается об автоматизации промышленных процессов и особенно об автоматизации бухгалтерского и статистического учета. Н. Н. Поснов

9026. Применение цифровых вычислительных машин для проектирования. Мидлтон (Digital computer in design. Middleton Marshall, Jr), Mach. Design, 1956, **28**, № 4, 88—92 (англ.)

Рассматривается вопрос о применении цифровых вычислительных машин для проектирования различных машин и устройств.

Указывается, что при проектировании с помощью цифровых вычислительных машин можно оценить большое количество различных вариантов для получения наилучшего решения.

Для решения задачи проектирования составляется блок-схема с указанием всех зависимостей между отдельными узлами проектируемой машины и их возможных вариаций. Затем, используя блок-схему, составляют программу вычислений, которую и вводят в вычислительную машину.

Приведена с пояснениями блок-схема для проектирования мощного трансформатора и фотография трансформатора, построенного по проекту, рассчитанному вычислительной машиной за несколько минут. Приведены сведения о проектировании асинхронного двигателя. Н. Н. Поснов

9027. Три вычислительные машины повышают эффективность работы страховой компании. Вогел (Three computers speed data flow at Metropolitan life. Vogel Frederick), Office Manag, 1957, **18**, № 2, 32—33, 72, 74, 76, 78, 80 (англ.)

Сообщается, что во Всеобщей компании страхования жизни в настоящее время работают три больших вычислительные машины УНИВАК-I, две из которых установлены осенью 1956 г., а первая начала работать в сентябре 1954 г. Машины, установленные в 1956 г., заняты на выполнении разнообразных операций, связанных с выплатой страховых премий. Возможности использования электронных вычислительных машин в работе компании изучались специальным комитетом, учрежденным в 1948 г.

Первая машина УНИВАК-I была установлена в статистическом отделе, где вычислительные работы были и прежде достаточно высоко механизированы. Двухлетний опыт эксплуатации показал, что: 1) надежная работа машины позволяет успешно использовать ее в течение 85% общего рабочего времени; 2) при использовании машины достигается очень высокая точность обработки данных и существенный экономический выигрыш. Высказывается мнение, что затраты на приобретение машины и разработку методики расчетов окупятся в течение 4 лет. Машины выполняют самые разнообразные виды работ по 500 различным программам. В компании создан специальный отдел электронных установок со штатом 118 человек, в задачу которого входит математическая и техническая эксплуатация вычислительных машин. Все вычислительные машины обслуживаются персоналом из 12 человек, и 16 человек заняты обслуживанием вспомогательного оборудования.

В связи с вводом в действие первой машины в октябре 1955 г. было уволено более 130 служащих компании. З. Д. Доброхотова

9028. Возможности вычислительных машин. Хьюбнер (The power of the computer. Huebner George J., Jr), Computers and Automat., 1956, **5**, № 11, 12—17, 48 (англ.)

Приводится доклад, прочитанный на конференции Мичиганского университета по вопросам применения математики в технике, которая состоялась в июне 1956 г., о специальных областях применения вычислительных машин для инженерных расчетов и для решения некоторых проблем биологии. О. К. Щербаков

9029. Открытие вычислительного центра в Европе (Opening of European computer centre), Engineer, 1956, **202**, № 5258, 634 (англ.)

Сообщение об открытии 19 октября 1956 г. вычислительного центра при филиале Бателлевского института во Франкфурте-на-Майне, оборудованного электронной вычислительной машиной фирмы „Ремингтон Рэнд" (Remington Rand) УНИВАК-1. Приводятся основные данные этой машины. А. Б. Залкинд

9030. О возможности применения комплекса перфокартных математических машин для нужд геодезии. Куделъский, Касперек (O możliwości zastosowania maszyn matematycznych systemu kart dziurkowanych dla potrzeb geodezji. Kudelski Gerard, Kasperek Stanisław), Prace Inst. geod. i kartogr., 1956, **4**, № 2, 244—252 (польск.; рез. русск., англ.)

Описывается решение систем линейных алгебраических уравнений, встречающихся в геодезии, при помощи арифмометров и счетно-аналитических машин. Решение таких систем на машине фирмы „Булль" в 4 раза эффективнее решения на арифмометре; при использовании умножающей машины „Аритма" это соотношение составит 15 : 1; если же приспособить умножающие машины „Аритма" для геодезических вычислений, то эффективность последних по сравнению с вычислениями на арифмометрах выразится соотношением 40 : 1. Г. К. Кузьминок

9031. Решение систем линейных алгебраических уравнений при помощи комплекта перфокартных математических машин. Куделъский (Rozwiązywanie układów równań normalnych przy pomocy maszyn matematycznych systemu kart dziurkowanych. Kudelski Gerard), Prace Inst. geod. i kartogr., 1956, **4**, № 2, 223—243 (польск.; рез. русск., англ.)

Описаны перфораторы (алфавитный и цифровой), раскладочная машина, сортировка и табулятор. Указаны их эксплуатационные возможности. Приводится сим-

волика линейной алгебры и программы для решения систем линейных алгебраических уравнений на счетно-аналитических машинах как методом исключения, так и методом вычисления определителей. Библ. 5 назв.
Г. К. Кузьминок

9032. Вычислительный перфоратор „Аритма". Свобода (ARITMA calculating punch. Svoboda Antonin), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, **4**, 72, 226 (англ.; рез. нем.)

Автор описывает релейный вычислительный перфоратор фирмы „Аритма" (Aritma). Необходимое время для выполнения одного сложения или умножения чисел с 7 десятичными знаками равно 600 *мсек*, для деления — 1200 *мсек*. Объяснены методы умножения и деления. В заключение перечислены работы, выполненные в математическом институте в Праге. В. Л. Евтеев

9033. Прибор для черчения некоторых видов кривых. Ключарев Г. А., Тр. Куйбышевск. инж.-строит. ин-та, 1956, вып. 3, 309—311

9034. Функциональный преобразователь ФОСИАК. (Information of PHOSIAC from the Stephen-Douglas Co., Santa-Monica, Calif.), Instrum. and Automat., 1956, 29, № 5, 926 (англ.)

Сообщается, что в 1956 г. фирмой „Стивен-Дуглас" (Stephen-Douglas Co.) разработан функциональный преобразователь ФОСИАК (PHOSIAC) для представления функций двух переменных. Независимые переменные, нанесенные на киноленту, считываются лучом света и поступают в машину в виде соответствующих уровней напряжения. Результаты получаются с погрешностью менее 1%. Н. Н. Поснов

9035. Автоматический регистратор кадров микрозаписи (An automatic micro-image file), Computers and Automat., 1956, **5**, № 11, 26—27, 50 (англ.)

Сообщается о разработке устройства, предназначенного для обработки и воспроизведения данных микрозаписи. Установка обеспечивает быстрый выбор любого из 10 000 кадров, записанных на листке пленки площадью около 62 *см*^{2}, позволяет при записи располагать кадры в заданной последовательности, причем управление этим процессом автоматическое, и печатать увеличенные кадры со скоростью 1 кадр в 2 сек. Отмечается, что установка представляет собой комбинацию электронной вычислительной машины и двух прецизионных сервомеханизмов. Управление осуществляется с помощью перфоленты, содержащей в виде кода координаты нужных микрокадров. Координаты запоминаются в 20-разрядном регистре. С помощью кодового коммутатора, связанного с сервомеханизмами, находится нужный кадр, который затем печатается на ленте фотографической бумаги шириной 25 *см*. В одном ряду печатается 15 кадров, площадь одного увеличенного кадра—около 3 *см*^{2}. Приводится общий вид и блок-схема установки. З. Д. Доброхотова

См. также: 8386, 8740

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Александров А. Д. (ред.) 8367К, 8368К
Аржаных И. С. 8683, 8690
Архангельская В. М. 8401
Ахундов А. М. 8650
Ацель Я. 8704

Б

Баренблатт Г. И. 8681
Белецкий А. 8867
Беляев М. Г. 8882
Берман С. Д. 8451
Биглов З. И. 8617
Блюменфельд В. Н. 8782
Болтянский В. Г. 8685
Бондаренко Б. А. 8683
Борисов Ю. Ф. 8895
Бохнер С. 8927К
Брук И. С. 9022
Булешев У. Б. 8651
Быховский Э. Б. 8674

В

Вагнер В. В. 8910
Венецкий И. Г. 8336К
Вентцель Т. Д. 8665
Виленкин Н. Я. 8758
Витушкин А. Г. 8536Д
Волков И. Ф. 8602
Вороновская Е. В. 8705

Г

Гаврилов Н. И. 8358
Гамкрелидзе Р. В. 8685
Гельфанд И. М. 8795, 8796
Геронимус Я. Л. 8574
Гестрін Г. М. 8645
Гихман И. И. 8790
Глейзер Г. И. 8860
Глоговский В. В. 8881
Глускин Л. М. 8463
Гончар А.А. 8598
Гуань Чжао-чжи 8765
Гун Шэн 8567
Гуревич Г. Б. 8480

Д

Давидов И. И. 8387
Дезин А. А. 8663
Депман И. Я. 8389
Джрбашян М. М. 8563
Дидидзе Ц. Е. 8485
Дядьков С. 8740

З

Задорожный А. М. 8883
Земба А. 8844

И

Иваненко В. В. 8710К
Иванов А. В. 8744Д
Иидзума 8717
Инь Вэнь-линь 8403

К

Каварабаяси 8717
Каган В. Ф. 8869
Казачков Б. В. 8454
Калашников М. Д. 8558
Карасев И. М. 8608
Карклиньш И. В. 8734
Катков Г. Ф. 8907
Келдыш М. В. 9023
Кильдышев Г. С. 8836К
Ключарев Г. А. 9033
Коваль П. Й. 8673
Кованцов М. І. 8896
Кованько А. С. 8875
Кольман Э. 8369
Коронкевич А. И. 8800Д
Колмогоров А. Н. 8367К (ред.), 8368К (ред.), 8796
Коронкевич А. И. 8800Д
Кошелев А. И. 8659
Кубилюс И. П. 8781
Кудрявцев Л. Д. 8535

Л

Лабазин В. Г. 8585
Лаврентьев М. А. 8367К (ред), 8368К (ред.), 8652
Лебедев С. А. 9021
Лидский В. Б. 8616
Ли Цзин-си 8550
Люстерник Л. А. 8760
Ляпунов А. А. 9023

М

Мальцев А. И. 8438К
Маркус С. 8532
Масленникова В. Н. 8671
Мацуда 8604
Мельников И. Г. 8383
Мильман Д. П. 8761
Минц Р. М. 8619
Михалевич В. С. 8834, 8840Д
Морозов В. В. 8479
Муравьев П. А. 8943
Мыцельский Я. 8844, 8934
Мышкис А. Д. 8562, 8670

Н

Натанзон В. Я. 8730
Николенко Л. Д. 8626

О

Огиевецкий В. И. 8738
Олейник О. А. 8641, 8642, 8665

П

Петров В. В. 8785
Петропавловская Р. В. 8625
Пинскер М. С. 8793
Погорелов А. В. 8893, 8894
Положий Г. Н. 8599
Понтрягин Л. С. 8685
Попов Е. П. 8627, 8628
Прохоров Ю. В. 8788, 8789

Р

Рабинович В. С. 8721
Ральцевич В. Н. 8362
Рапопорт І. М. 8614
Рашајски Б. 8679
Реморов П. Н. 8374
Риекстыньш Э. Я. 8675, 8676, 8718
Розенфельд Б. А. 8857
Ронкин Л. И. 8586
Рубинштейн Г. Ш. 8706
Рябов Ю. А. 8635

С

Савастеев В. Г. 8743К
Салехов Г. С. 8643
Саульев В. К. 8942
Сверчковский С. 8844
Се Бан-цзе 8174
Семиліт М. Й. 8634
Скундин Е. А. 8858
Соболев С. Л. 8646
Соколин А. С. 8715
Соколов И. Г. 8557
Стојаковиħ М. 8957
Сутормин А. М. 8884
Суэканэ 8414

Т

Тевзадзе Г. Н. 8909
Темкин А. Г. 8735
Темко К. В. 8552
Темляков А. А. 8587
Тодорова Л. Г. 8359
Трохимчук Ю. Ю. 8561
Турецкий А. Х. 8547, 8559
Тутаев Л. К. 8897, 8898

У

Уфлянд Я. С. 8737Д

Ф

Фишман К. М. 8579
Фомин Н. М. 8711
Фрейман Г. А. 8784

Х

Хазанов М. Б. 8973
Харламов П. В. 8682
Хачатрян И. О. 8563
Хион Я. В. 8475
Хованский А. Н. 8978К
Хохлов М. А. 8600
Ху Цзя-чань 8568

Ц

Цинь Юань-сюнь 8621
Цодыкс В. М. 8528
Цянь Бао-цун 8371

Ч

Ченцов Н. Н. 8794
Чех Э. 8900
Чистяков В. Д. 8385

Ш

Шабат Б. В. 8652, 8672
Шлопак А. С. 8670
Штраус А. В. 8615
Шустэф Ф. 8361
Шура-Бура В. Р. 9023

Щ

Щербаков Р. Н. 8892

Я

Яглом А. М. 8796
Яглом И. М. 8918
Яно К. 8927К
Ян Цзун-пань 8542
Ястребов Ю. М. 8866, 8920
Ястремский Б. С. 8837К

A

Abhyankar S. 8449
Acosta Lieras J. 8605
Acrivos A. 8636, 8637
Aiken H. H. 8990
Al—Dhahir M. W. 8879
Allen H. S. 8696
Al—Salam W. A. 8722
Alvarado R. A. 8605
Amato V. 8538
Amitsur S. A. 8446
Anderson R. D. 8497, 8498
Aquaro G. 8525
Arcidiancono G. 8398
Arregui Fernàndez J. 8886
Arscott F. M. 8729
Artèmiadis N. K. 8569, 8570, 8731
Asgeirsson L. 8662
Austin D. G. 8530
Azpeitia A. G. 8962

B

Bagemihl F. 8573, 8581
Balsimelli P. 8891
Barnes E. S. 8409
Barratt M. G. 8513, 8515
Barrett L. C. 8944
Barton D. E. 8806, 8810
Bass J. 8783
Basu D. 8809
Bauer H. 8766
Beard A. D. 8981
Bendat J. 8853
Benedicty M. 8436, 8491
Bensky L. S. 8981
Berberian S. K. 8477
Berge C. 8842
Bergman G. D. 9018
Bernard M. 8366
Bers L. 8654, 8678
Bhonsle B. R. 8723
Blake D. V. 9008
Blanc Ch. 8953
Blanchard A. 8504
Blaney H. 8407
Blaschke W. 8940
Blij F. van der 8537
Boas R. P., Jr 8577
Boboc N. 8657
Boccioni D. 8468
Bodewig K. E. 8960
Bopp K. 8639Д
Borneas M. 8689
Bose R. C. 8838К
Bosse G. 8741
Bouligand G. 8400
Bourbaki N. 8544К, 8545К
Brand L. 8859
Breiter M. C. 8949
Brodin J. 8739
Brown R. H. 8845
Brueckel F. J. 8872
Brücker-Steinkuhl K. 8821
Burau W. 8931

C

Canen M. 8926
Campedelli L. 8388
Carlitz L. 8423, 8424, 8427, 8725
Cartan H. 8490, 8503, 8505, 8506, 8507, 8508
Cartwright D. E. 8854
Castoldi L. 8698, 8915
Cavallaro V. G. 8382
Ceschino F. 8947
Chaki M. C. 8905
Chehata C. G. 8456
Chen K. 9015
Cherubino S. 8435, 8437
Chevalley C 8469К
Christofferson S. 8417
Choquard P. 9006
Choquet G. 8660
Chowdhury S. B. 8811
Ciliberto C. 8667, 8668
Civin P. 8748
Clatworthy W. H. 8838К
Clayden D. O. 8998
Coffman R. 8365
Cohen E. 8415, 8473
Cohn H. 8431
Conti R. 8606
Coombs A. W. M. 8999
Čulík K. 8432
Cunningham W. J. 8975
Curtis C. W. 8478
Czárnota A. 8428

D

Daboni L. 8524
Dantzig D. van 8831
Darmois G. 8830
David E. N. 8806
Davies D. W. 9001
Davis H. F. 8716
Debever R. 8926
Decker R. O. 9015
Delange H. 8404, 8406
Deny J. 8660
Derman C. 8787
Devinatz A. 8756
Dieudonné J. 8483
Dijkstra E. W. 8970
Dinghas A. 8580
Dixmier J. 8459, 8773
Doob J. L. 8791
Downing A. C., Jr 8963
Drazin M. P. 8724
Dreyfus P. L. 8983
Durand É. 8917
Dwinger Ph. 8486

E

Ederer A. 8379
Egloff W. 8938
Ehrenpreis L. 8630, 8768
Ehrhart E. 8410, 8411, 8412
Eijk C. J. van 8823
Elianu I. P. 8906
Elias P. 8849
Ellis K. P. 8493Д
Engel W. 8472
Engelhardt W. von 8364
Erdös P. 8430
Erisman T. L. 9014

F

Feissel H. G. 8983
Feldman J. 8757
Fernández G. 8911
Fichera G. 8647
Finkelstein R. J. 8444
Finn R. 8658
Fladt K. 8885
Fletcher T. J. 8441
Fox L. 8956
Fraenkel A. A. 8363
Fraeys de Veubeke B. 8967
Franckx Ed. 8841
Fraser D. A. S. 8805, 8839К
Fréchet M. 8764
Freitag A. H. 8873
Freud G. 8548
Freudenthal H. 8372
Fritz W. 8971
Froda A. 8534
Fudali S. 8375
Fukami T. 8923
Fulks W. 8669
Fuller A. T. 8629

G

Gale D. 8937
Garnir H. G. 8661
Geri G. 8959
Gerrish F. 8695
Getoor R. K. 8755
Gheorghiu O. E. 8864
Ghermanescu M. 8709К
Gnizzetti A. 8555, 8556
Ginatempo N. 8418, 8429
Godambe V. P. 8816
Goldberg S. I. 8925
Goldberg K. 8433
Goldstine H. H. 8989
Gomory R. E. 8622
González M. O. 8719
González Domínguez A. 8699
Goodstein R. L. 8697
Goormaghtigh R. 8876
Gordon R. L. 9017
Gordon W. L. 8500
Grauert H. 8580
Greiff Bravo L. de 8703
Groot J. de 8448, 8529
Grün F. 8852
Gunning R. C. 8522
Gutwirth A. 8890

H

Haas K. 8373
Haefliger A. 8520
Hamilton J. R. 8707К
Hamilton W. T. 8707К
Hájek J. 8786
Hamström M.-E. 8496, 8497
Harper L. R., Jr 8484
Haupt O. 8928
Head J. W. 8963
Hechtel R. 9011
Heerema N. 8455
Heller A. 8521
Hennequin Fr. 8916Д
Henstock R. 8745
Herbst E. H. 8985
Hersch J. 8950
Higman D. G. 8476
Hill C. K. 8753
Hirvonen R. A. 8871
Hoehnke H.-J. 8426
Hodge W. V. D. 8391
Hoffman A. J. 8494
Hofmann J. E. 8376, 8377
Hogben L. 8798К
Holdt R. E. von 8966
Hopper G. M. 8995
Horvay G. 8958
Horie N. 8912
Hornich H. 8863
Householder A. S. 8963
Huber A. 8596
Huebner G. J., Jr 9028
Hylten-Cavallius C. 8560Д

I

Ince E. L. 8638 К
Inoue Y. 8512
Iséki K. 8435
Ishihara S. 8923
Izumi S. 8549

J

Jaswon M. A. 8720
Jenkins J. A. 8572
Jennings S. A. 8482
Johnson N. L. 8829
Jones J., Jr 8624

K

Kaiser J., Jr 9013
Kamat A. R. 8818
Kampé de Fériet J. 8687
Kampen N. G. van 8701, 8702
Kanno K. 8551
Kashiwagi S. 8594, 8595, 8751, 8763
Kasperek S. 9030
Katsuma S. 8620
Kawata T. 8732
Kay I. 8770, 8771, 8772
Kazarinoff N. D. 8631
Keefe T. J., Jr 9019
Keeping E. S. 8832
Kendall M. G. 8378
Kinna W. 8540
Kiss E. 8861
Klein M. L. 9003, 9004
Klingenberg W. 8584
Klotter K. 8684
Knapowski S. 8442
Kondo T. 8813
König H. 8769
Koopman B. O. 8351
Kose T. 8843
Králik D. 8548
Krasner M. 8471
Kremmer J. 8689
Krum B. 8878К
Kubota T. 8416
Kudelski G. 9030, 9031
Kumar Jain M. 8578
Küst J. 8384

L

Laderman J. 8846
Laha R. G. 8825, 8827
Lambacher Th. 8877, 8976
Lazard M. 8481
Leader S. 8707
Leclerc B. M. 8983
Ledger A. J. 8924
Leech J. 8402
Lehmann E. L. 8803
Lehto O. 8582
Lekkerkerker C. G. 8523
Leptin H. 8447
Lesieur L. 8487, 8488
Levy G. 8492Д
Lévy P. 8799К
Lichnerowicz A. 8708К
Lipiński J. S. 8527
Littlewood D. E. 8443
Loewner C. 8653, 8932
Lofgren L. 9016
Lohwater A. J. 8575
Longuet-Higgins M. S. 8854
Łoś J. 8774
Lotkin M. 8964
Łukasiewicz J. 8397
Luscher J. 9006
Lyttkens S. 8700

M

Macmillan R. H. 8629
Makar B. H. 8564
Makar R. H. 8564
Manarini A. M. 8688
Marcus S. 8526, 8533
Maschler M. 8589
Mason R. M. 8994
Masotti Biggiogero G. 8939
Matsushita S. 8759
McGlinn E. J. 9013
McKelvey R. 8631
McLain D. H. 8452
McMillin K. M. 8553
Mehra A. N. 8736
Meinesz M. 8777
Meserve B. E. 8370
Metropolis N. 8985
Mička J. 8955
Middleton M., Jr 9026
Miller J. C. P. 8996
Minorsky N. 8623
Miron R. 8903
Mishra R. S. 8901
Mitrinovitch D. S. 8649, 8680
Mitrović D. 8974
Miyadera I. 8747
Mlak W. 8666
Moerman H. 8823
Montaldo O. 8664
Morel H. 8946
Morgan H. C. 9003, 9004
Morgan L. P. 9007
Moppert K.-F. 8852
Moses H. E. 8770, 8771, 8772
Moore P. G. 8814
Muller M. 8775
Munn W. D. 8461, 8462
Munschy G. 8728
Mycielski J. 8844, 8934

N

Nagarathnamma H. S. 8908
Nakaoka M. 8518
Nandi H. K. 8817
Nash J. P. 8987
Nehari Z. 8597
Nemyckij V. V. 8613
Nettleton D. L. 8981

Neumann B. H. 8457
Neumeister R. 8865
Neumer W. 8392, 8393, 8394 8395, 8396
Newns W. F. 8919
Nič̆e V. 8887
Nisida T. 8780
Nitsche J. 8656
Noguchi H. 8499
Nomizu K. 8921
Nussbaum A. E. 8756

O

Oblonský J. 8980
Ohkuma T. 8541
Onicescu O. 8792
Ono I. 8592
Opial Z. 8610
Opluštil K. 8539
Osima M. 8440, 8445
Ostrowski A. 8935
Ozaki S. 8594, 8595, 8751, 8763

P

Paasche I. 8712
Palamà G. 8421, 8422
Papoulis A. 8742
Parker R. V. 8691
Parodi M. 8583
Paszkowski S. 8776
Pavlíček J. 8381
Pelegrin M. 8855 K
Perron O. 8408
Peschl E. 8868
Peterson F. P. 8516, 8517
Pieruschka E. 8833
Pillai K. C. S. 8801
Pinl M. 8904
Piranian G. 8575
Pirvulescu N. S. 8961
Plans A. 8862
Poorte G. E. 8931
Popoviciu T. 8952
Prékopa A. 8797 K
Protter M. H. 8677

R

Ráb Miloš 8632, 8633
Raichl J. 8972
Ramakrishnan C. S. 8826
Rankin R. A. 8413, 8752
Rao C. R. 8824
Raškovič D. P. 8977 K
Reade M. O. 8565
Ree R. 8482
Reid W. P. 8648
Remmert R. 8590
Rényi A. 8786
Riguet J. 8464
Rosati L. A. 8450
Robbins H. 8787, 8847
Robinson A. 8470
Robinson A. S. 9012
Rogosinski W. W. 8746
Rosenthal A. 8531
Rosina B. A. 8889
Rostand F. 8399
Roy J. 8825, 8827
Royston E. 8835
Rudin W. 8749
Rush R.B. 9004

S

Sade A. 8439
Saha M. 8390
Sales Vallés F. de A. 8576
Salinas Palero B. R. 8607
Sanden H. von 8979 K
Sansone G. 8606
Santaló L. A. 8936
Sasaki S. 8922
Sauvage A. 9025
Scarfiello R. 8699
Schinzel A. 8405
Schmidt O. 8955
Schreiber M. 8754
Schröder J. 8945
Schütte K. 8930, 8933
Sebastião e Silva J. 8762
Sen R. N. 8914
Serre J.-P. 8501, 8502, 8509, 8510
Severi F. 8588, 8888
Shapiro V. L. 8554
Shepperd J. A. H. 8457
Shirota T. 8644
Shrikhande S. S. 8838 K
Sierpiński W. 8546 K
Simonin R. F. 8870
Singh V. 8727
Smuck W. 9020
Sokołowski M. 8951
Spanier E. H. 8511
Sprott D. A. 8828
Stampacchia G. 8655
Stark J. M. 8566
Stein C. 8804
Stein K. 8591
Stein S. 8941
Steinberg J. 8733
Stephenson W. L. 9007
Stern M. 8686
Stolt B. 8419, 8420
Stone A. H. 8495
Stone R. 8856K
Sugawara M. 8593
Svoboda A. 9032
Swierczkowski S. 8844
Szybiak A. 8571

T

Takács L. 8850
Takano K. 8778, 8779
Takeuchi Y. 8713
Tamura T. 8460
Tanzi Cattabianchi L. 8692
Tarski A. 8929
Taussig Treitag H. 8873
Taussky O. 8434
Terracini A. 8899
Thébault V. 8874
Thierrin G. 8466
Thomas J. 8613
Toda H. 8514
Todd J. 8434
Tompkins H. E. 9005
Tonooka K. 8913
Toscano L. 8726
Trimble G. R., Jr 8954, 8969
Tryuk K. 8902
Tsuboi T. 8594, 8595, 8751, 8763
Tukey J. W. 8819
Turri T. 8880
Tzénoff I. 8612

U

Urabe M. 8620
Utz W. R. 8603

V

Vala K. 8750
Varma C. B. L. 8723
Vejvoda O. 8948
Veselý F. 8380
Vogel F. 9027
Vrănceanu G. 8519

W

Wagner K. 8540
Wald A. 8812
Walker A. G. 8919
Walsh C. E. 8714
Wang Hsien-Chung 8458
Warshawsky L. M. 9009
Watson G. S. 8808
Wazewski T. 8611
Wegner L. H. 8807
Weiler H. 8820, 8822
Weir A. J. 8453
Welch B. L. 8802
Wells M. B. 8985
Western A. E. 8425
Westfold K. C. 8630
Whitehead J. H. C. 8511, 8513, 8515
Wiener N. 9024
Wilkinson J. H. 8965, 8991
Williams C. B. 8848
Williams E. J. 8808, 8848, 9003
Williams F. K. 9003
Wintner A. 8601, 8609
Wojciechowski K. F. 8386
Wolfendale E. 9007
Wright F. B. 8467
Wright F. M. 8694
Wylie C. R., Jr 8944

Y

Yamamoto K. 8489
Yano K. 8922
Yood B. 8748

Z

Zeckendorf E. 8693
Zieba A. 8844
Zitek F. 8815

朱文霖 8403
末包良太 8414
經李熙 7550
松田千鶴子 8604
楊宗磐 8542
河原林京子 8717
秦元勳 8621
胡家驥 8568
射邦傑 8474
錢寶琮 8371
關肇直 8785
飯島泰藏 8717
龔昇 8567

Технический редактор *Т. М. Морозова*